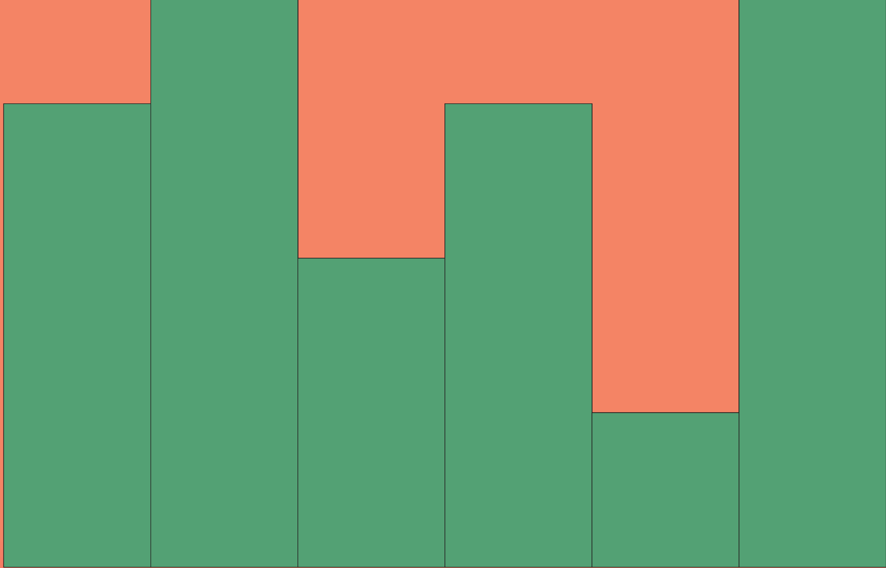
Buku Referensi

# STATISTIKA NONPARAMETRIKA

edisi pertama



SIGIT NUGROHO, PH.D.

UNIB Press

# METODE
# STATISTIKA NONPARAMETRIK

Sanksi Pelanggaran Pasal 72
Undang-Undang Nomor 19 Tahun 2002 tentang Hak Cipta

1. Barangsiapa dengan sengaja dan tanpa hak melakukan perbuatan sebagaimana dimaksud dalam Pasal 2 ayat (1) atau Pasal 49 ayat (1) dan (2) dipidana dengan pidana penjara masing-masing paling singkat 1 (satu) bulan dan/atau denda paling sedikit Rp. 1.000.000,00 (satu juta rupiah), atau pidana penjara paling lama 7 (tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp. 5.000.000.000,00 (lima miliar rupiah)

Barangsiapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran Hak Cipta atau Hak Terkait sebagaimana dimaksud pada ayat (1) dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp. 500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah)

# Metode Statistika Nonparametrik

**Sigit Nugroho, Ph.D.**
***Universitas Bengkulu***

**UNIB Press**
Bengkulu
2008

METODE STATISTIKA NONPARAMETRIK
**Sigit Nugroho, Ph.D.**
ISBN : 978-979-9431-35-6  184hal.
Cetakan Pertama. Edisi 1. 2008.

Penyeleksi Naskah : Fachri Faisal

Editor : Jose Rizal
Desain Sampul : Ratna Astuti Nugrahaeni

©Sigit Nugroho,Ph.D. 2008
Hak Cipta dilindungi undang-undang.
Diterbitkan pertama kali oleh **UNIB Press**, Jalan WR Supratman, Bengkulu.

*Dilarang keras menerjemahkan, memotokopi, atau memperbanyak sebagian atau seluruh isi buku ini tanpa izin tertulis dari penerbit*.

# Kata Pengantar

Statistika merupakan ilmu pengetahuan tentang data. Mulai dari bagaimana cara memperoleh data, menyajikan data, menganalisis data, bahkan sampai menginterpretasikannya merupakan bagian dari tugas ”statistika”.

Dalam buku ini akan disajikan metode statistika nonparametrik dengan berbagai ilustrasi dengan menggunakan paket-paket program statistika yang banyak dipakai di pasaran, khususnya SPSS. Diawali dengan landasan yang diperlukan di dalam mempelajari metode ini, yaitu diawali dengan penyegaran tentang teori peluang dan statistika inferensia. Teladan-teladan bagian ini sudah penulis berikan pada buku yang juga penulis susun terlebih dulu yaitu Dasar-Dasar Metode Statistika. Kemudian, dilanjutkan dengan prosedur statistika nonparametrik dimulai dari yang paling sederhana, yaitu statistik dari peubah biner. Tabel kontingensi yang digunakan untuk menganalisis data kategorik juga disajikan dengan berbagai ilustrasi. Penggunaan skala ordinal dalam statistika nonparametrik adalah hal yang tak sedikit dijumpai. Oleh karenanya, kita perlu mengetahui statistik-statistik yang menggunakan skala ordinal. Untuk melihat adanya kesesuaian antara sebaran amatan dan sebaran hipotetisnya dikembangkan beberapa statistik yang dikenal dengan statistik tipe Kolmogorov. Beberapa prosedur nonparametrik lain yang tak dapat dikelompokkan kedalam bagian-bagian depan dari buku ini disajikan di bagian akhir.

Penulis mengucapkan ribuan terima kasih kepada istri *Mucharromah, Ph.D.*, anak-anak *Shofa Ulfiyati Nugrahaeni* dan *Ratna Astuti Nugrahaeni*, serta para kolega yang selama ini telah memberikan dorongan, kritik, dan saran hingga buku ini selesai disusun. Kritik dan saran yang membangun lainnya masih penulis harapkan dari siapa saja guna perbaikan buku ini.

Bengkulu, 20 Juli 2008

Sigit Nugroho, Ph.D.

Oentoek:

Mucharromah Nugroho, Ph.D.,
Shofa Ulfiyati Nugrahaeni, dan
Ratna Astuti Nugrahaeni.

# Daftar Isi

# Teori Peluang

Sebuah buku Dictionary memberikan definisi kata **sains** sebagai suatu kebenaran yang diperoleh melalui observasi, percobaan, dan induksi. Waktu, uang, dan energi banyak dicurahkan oleh berbagai organisasi untuk kepentingan sains. Namun, kadang kala menimbulkan frustasi, karena sebagaimana ilmuwan tahu, proses pengamatan, percobaan, dan induksinya tidak selalu mrnghasilkan suatu ”kebenaran”. Misalkan saja, sebuah percobaan, dari suatu gugus observasi, dapat saja membuat dua ilmuwan menghasilkan dua kesimpulan yang tak sama.

Tujuan sains yang lebih dikenal dengan ”statistika” adalah menyediakan alat untuk mengukur banyaknya subyektifitas yang menjadi konklusi ilmuwan, yang dengan demikian memisahkan antara sains dan opini. Dalam bab ini, akan disajikan terlebih dahulu dasar-dasar peluang dan Peubah Acak, agar memudahkan pemahaman materi yang akan dibahas pada bab-bab berikutnya.

## Catatan Penting

Untuk menggunakan metode statistika guna keperluan analisis data dari suatu percobaan, diperlukan formulasi percobaan ideal. Dalam beberapa hal, diperlukan asumsi untuk mencapai keadaan tersebut.

Percobaan sungguhan kadang-kadang atau jarang dilakukan pada kondisi yang ideal. Namun demikian, peneliti berasumsi bahwa percobaan ideal mencakup semua aspek percobaan sungguhan, kecuali aspek-aspek yang pengaruhnya pada hasil percobaan dapat diabaikan.

Pernyataan peluang dibuat dengan memperhatikan percobaan ideal yang disebut dengan ”model”. Jika model secara realistik telah diformulasikan, maka pernyataan peluang yang menyangkut model, adalah valid bilamana diterapkan pada percobaan sesungguhnya.

## Konsep Menghitung

Berbagai konsep yang dapat digunakan untuk mencari dilai peluang akan disajikan dalam sub bab ini.

### Aturan 1.

Jika suatu percobaan terdiri dari $n$ tindakan, dimana setiap tindakan dapat menghasilkan satu dari $k$ macam keluaran, maka secara keseluruhan percobaan tersebut dapat menghasilkan $k^n$ kemungkinan keluaran.

**Teladan 1**

Sebuah soal pilihan berganda yang terdiri dari 20 soal, dimana tiap soal terdiri dari 4 kemungkinan jawaban (A, B, C, atau D) akan memberikan total kemungkinan jawaban sebanyak $4^{20}$ macam.

## Aturan 2.

Terdapat sebanyak *n*! cara untuk mengurutkan *n* obyek yang berbeda dalam sebuah baris. *n* ! (dibaca: n faktorial) yang didefinisikan sebagai 1 apabila $n = 0$ atau $n(n-1)(n-2)...(3)(2)(1)$ apabila *n* adalah bilangan bulat positif.

## Aturan 3.

Terdapat sebanyak $(n-1)$ ! cara untuk mengurutkan *n* obyek yang berbeda dalam sebuah lingkaran.

## Aturan 4.

Suatu gugus *n* obyek yang terdiri dari $n_1$ obyek identik jenis 1, $n_2$ obyek identik jenis 2, ..., dan $n_r$ obyek identik tipe r ($n = n_1 + n_2 + ... + n_r$), maka banyaknya susunan yang dapat dibedakan bila disusun dalam sebuah baris, dinotasikan dengan

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_r!}$$

**Teladan 2.**

Dari huruf-huruf pembentuk kata JAKARTA, akan dapat dibuat sebanyak $\frac{7!}{1!3!1!1!1!} = 840$ susunan huruf, karena ada 1 huruf J, 3 huruf A, 1 huruf K, 1 huruf R, dan 1 huruf T sebagai penyusun JAKARTA.

**Teladan 3.**

Penggunaan lain dari aturan ini adalah dalam hal mencari koeffisien dari sebuah multinomial dalam bentuk misalnya $(v + w + x + y + z)^n$. Kita tahu bahwa bentuk tersebut dapat dinyatakan sebagai

$$\sum_{a_1}\sum_{a_2}\sum_{a_3}\sum_{a_4} \frac{n!}{a_1!a_2!a_3!a_4!(n - a_1 - a_2 - a_3 - a_4)!} v^{a_1} w^{a_2} x^{a_3} y^{a_4} z^{n-a_1-a_2-a_3-a_4}$$ untuk

$0 \le a_i \le n, \quad i = 1, 2, 3, 4$ dan $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = n$

# Peluang

## Definisi 1.

**Ruang contoh** adalah koleksi semua kemungkinan keluaran yang berbeda dari suatu percobaan.

## Definisi 2.

Suatu titik (setiap anggota) dalam ruang contoh adalah sebuah **kemungkinan** keluaran suatu percobaan.

## Definisi 3.

Suatu **peristiwa** adalah sembarang himpunan bagian dari ruang contoh.

## Definisi 4.

Jika $A$ merupakan suatu peristiwa dari suatu percobaan, dan jika $n_A$ merepresentasikan berapa kali $A$ muncul atau terjadi dalam $n$ pengulangan percobaan secara bebas, maka ***peluang peristiwa A terjadi***, yang dinotasikan dengan $P(A)$ adalah $P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$ yang dibaca "limit rasio banyaknya $A$ terjadi terhadap banyaknya ulangan percobaan, bilamana ulangannya menjadi sangat besar atau menuju tak hingga"

## Definisi 5.

**Fungsi peluang** adalah suatu fungsi yang daerah fungsinya adalah peristiwa dalam ruang contoh dan wilayah fungsinya adalah interval [0,1] dengan beberapa kriteria yang harus dipenuhi, yaitu:

1. Jika $A$ adalah suatu peristiwa, maka $P(A) \geq 0$.
2. $P(S) = 1$, dimana $S$ adalah ruang contoh
3. $P(A^c) = 1 - P(A)$, dimana $A^c$ adalah komplemen dari peristiwa $A$.

## Definisi 6.

Jika $A$ dan $B$ adalah dua peristiwa dalam ruang contoh $S$, maka peristiwa $A$ dan $B$ keduanya terjadi, yang ditunjukkan dengan titik-titik dalam ruang contoh yang ada di dalam $A$ dan $B$ pada saat yang sama, yang disebut dengan peristiwa/kejadian bersama $A$ dan $B$, yang dinotasikan dengan $AB$ atau $A \cap B$. Peluang dari peristiwa tersebut dinyatakan dengan $P(AB)$ atau $P(A \cap B)$.

## Definisi 7.

Peluang bersyarat peristiwa $A$ terjadi setelah terjadinya $B$ didefinisikan sebagai

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

dimana $P(B) > 0$. Jika $P(B) = 0$, $P(A|B)$ tidak didefinisikan.

## Teladan 4.

Sebanyak M bola merah yang dapat dibedakan dan B bola biru yang dapat dibedakan juga akan dimasukkan dalam kotak yang disusun seperti pada gambar.

| | |
|---|---|
| **Kotak II**: *m* bola merah | **Kotak I**: *b* bola biru |
| **Kotak III**: *M-m* bola merah | **Kotak IV**: *B-b* bola biru |

Banyaknya cara Kotak II dapat terisi sebanyak $m$ bola merah tentunya adalah $C_m^M$, sedangkan banyaknya cara Kotak I dapat terisi $b$ bola biru adalah $C_b^B$. Dengan demikian ada sebanyak $C_m^M \, C_b^B$ cara penyusunan seperti pada gambar atau diagram diatas. Jika peristiwa $A$ adalah terdapat sebanyak $m$ bola merah dan $b$ bola biru dalam kotak I atau kotak II (kotak-kotak sebelah atas), dan peristiwa $B$ adalah terdapat $m+b$ bola dalam kotak-kotak sebelah atas, maka

$$P(A \cap B) = P(AB) = P(A) = \frac{C_m^M C_b^B}{2^{M+B}}$$

$$P(B) = \frac{C_{m+b}^{M+B}}{2^{M+B}}$$

Dengan demikian

$$P(A \mid B) = \frac{\left(\dfrac{C_m^M C_b^B}{2^{M+B}}\right)}{\left(\dfrac{C_{m+b}^{M+B}}{2^{M+B}}\right)} = \frac{C_m^M C_b^B}{C_{m+b}^{M+B}}$$

### Definisi 8

Dua peristiwa *A* dan *B* dikatakan saling independen atau saling bebas, jika *P(AB) = P(A)P(B)*.

## Peubah Acak

**Peubah acak** adalah suatu fungsi riil dari ruang contoh. Yang dimaksudkan disini adalah setiap anggota pada ruang contoh disini dihubungkan dengan sebuah bilangan riil.

**Fungsi kepekatan peluang** peubah acak, biasanya dinotasikan dengan *f(x)*, adalah fungsi yang bernilai peluang peubah acak *X* pada nilai *x*, untuk sembarang bilangan riil *x*. Dengan lain perkataan, *f(x) = P(X=x)*.

**Fungsi sebaran kumulatif peluang** peubah acak *X*, biasanya dinotasikan dengan *F(x),* adalah fungsi yang memberikan peluang *X* lebih kecil atau sama dengan *x*. Dengan lain perkataan,

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{t \le x} f(t)$$

## Sebaran Peubah Acak Diskrit

### Definisi 9

Jika gugus semua nilai yang mungkin dari peubah acak *X* merupakan gugus terhitung $x_1, x_2, \ldots, x_n$ atau $x_1, x_2, \ldots$ maka *X* disebut dengan peubah acak diskrit. Fungsi *f(x)* = P[*X*=*x*] untuk $x = x_1, x_2, \ldots$ mengalokasikan peluang untuk setiap kemungkinan nilai x yang disebut dengan Fungsi Kepekatan Peluang Diskrit atau Fungsi Densitas Peluang Diskrit.

**Sebaran Bernoulli**

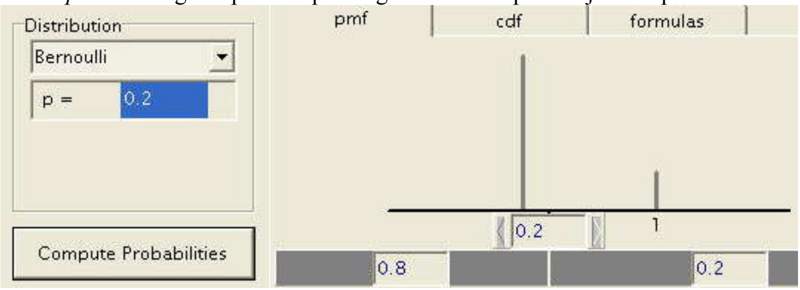
Performans dari suatu percobaan dengan hanya memiliki dua macam keluaran disebut dengan **tindakan Bernoulli**. Bila kemungkinan keluaran tersebut kita sebut dengan 'Berhasil' dan 'Gagal', maka peubah acak Bernoulli adalah

$$X(e) = \begin{cases} 1 \ jika \ e \in E \\ 0 \ jika \ e \in E^c \end{cases}$$

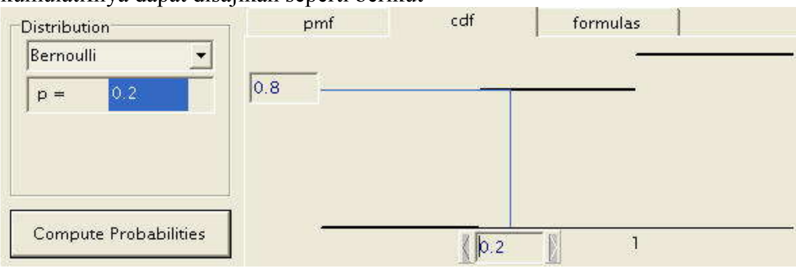
Pernyataan diatas mengandung arti bahwa : jika luaran dari suatu tindakan menghasilkan sesuatu yang "Berhasil", maka nilainya 1. Sebaliknya jika luaran menghasilkan sesuatu yang "Gagal", maka nilainya 0. Sedangkan fungsi kepekatan peluangnya didefinisikan dengan $f(0)=q$ dan $f(1)=p$. Sebaran dimaksud sering disebut dengan Sebaran Bernoulli, dan fungsi kepekatan peluangnya dapat diekspresikan sebagai

$$f(x) = p^x q^{1-x} \quad \text{untuk } x = 0 \text{ atau } 1$$

Besarnya $q = 1-p$ dan $0 < p < 1$.
Untuk $p = 0.2$ fungsi kepekatan peluang Bernoulli dapat disajikan seperti berikut




dan fungsi sebaran kumulatif peluang atau disingkat dengan fungsi sebaran kumulatifnya dapat disajikan seperti berikut




Ilustrasi dari kedua grafik fungsi diatas memberikan informasi kepada kita tentang beberapa hal:

1. $P(X=0) = 0.2$
2. $P(X=1) = 0.8$
3. $P(X<0.2) = 0.8$, dan
4. $P(X>0.2) = 0.2$

Catatan : *pmf = probability mass function* sama artinya dengan *probability density function*.

**Sebaran Binomial**

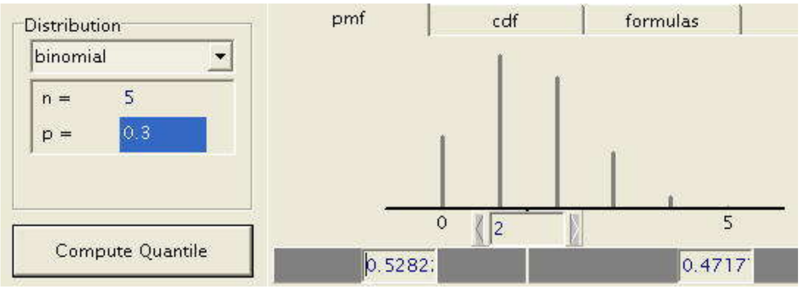
Bila percobaan terdiri dari sederetan tindakan Bernoulli yang saling bebas, dimana kuantitas yang diamati adalah banyaknya 'Berhasil' dari sebanyak n tindakan tersebut. Jika peluang 'Berhasil' pada setiap tindakan Bernoulli tersebut adalah *p*, dan $X$ melambangkan banyaknya 'Berhasil' tersebut, maka fungsi kepekatan peluang dari $X$ ini adalah

$$b(x;n,p) = C_x^n p^x q^{n-x} \qquad x = 0,1,2,\ldots,n$$

Peristiwa $[X=x]$ terjadi apabila terdapat sebanyak $x$ 'Berhasil' dan $n$-$x$ 'Gagal' dalam keseluruhan $n$ tindakan Bernoulli yang saling bebas tersebut. Seluruhnya akan ada sebanyak $C_x^n$ cara. Sehingga diperolehlah fungsi kepekatan peluang Bernoulli seperti *b(x;n,p)* . Notasi ini digunakan sebagai pengganti *f(x)*, yang sekaligus mengindikasikan bahwa *b* singkatan dari Bernoulli, dengan argumen *x* serta fungsi tersebut sangat tergantung dari besaran parameter *n* dan *p*.

Binomial adalah sebaran diskrit yang digunakan untuk menduga peluang keluaran tertentu muncul sebanyak ***x*** kali dalam suatu contoh terhingga berukuran ***n*** yang diambil dari suatu populasi tak terhingga dimana peluang munculnya keluaran tersebut konstan sebesar ***p***.

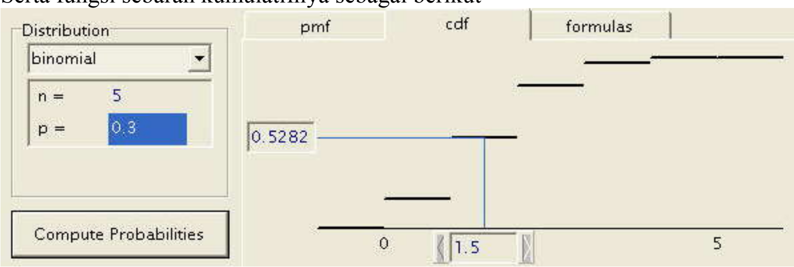
Binomial dengan *n = 5* dan *p = 0.3* memiliki fungsi kepekatan peluang seperti dibawah ini




Informasi yang dapat diperoleh dari gambar diatas adalah

1. *P(X<1.5) = 0.5282*
2. *P(X>1.5) = 0.4717*

Serta fungsi sebaran kumulatifnya sebagai berikut




Sama seperti grafik *pmf* nya, kita dapatkan informasi bahwa

1. *P(X<1.5) = 0.5282* atau
2. *P(X>1.5) = 0.4717*

**Sebaran Hypergeometrik**

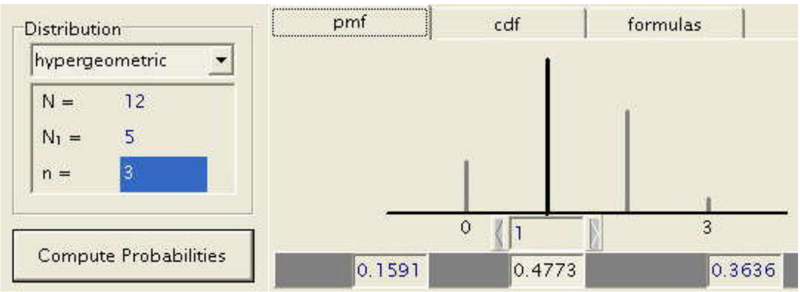
Suatu populasi atau kumpulan obyek yang terdiri dari $N$ item, dan dari sejumlah itu ada sebanyak $M$ item dari kategori pertama, sedangkan sisanya sebanyak $N$-$M$ dari kategori kedua. Misalkan sejumlah $n$ item diambil secara acak tanpa dikembalikan, dan $X$ adalah peubah acak banyaknya item dari kategori pertama terambil.

Fungsi Kepekatan Peluang Diskret dari peubah acak $X$ ini adalah

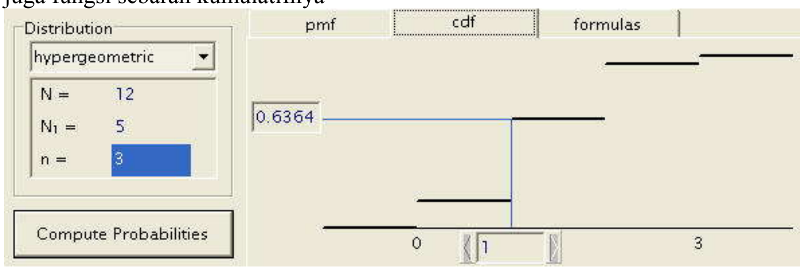
$$h(x;n,M,N)=\frac{C_x^M\,C_{n-x}^{N-M}}{C_n^N}\quad \text{untuk } max(0,n\text{-}N\text{+}M) \le x \le min(n,M)$$

Hipergeometrik adalah sebaran diskrit yang digunakan untuk menduga peluang bahwa suatu keluaran tertentu (sebut saja "berhasil") akan muncul sebanyak $x$ kali dalam suatu contoh acak terhingga berukuran ***n*** yang diambil dari suatu populasi terhingga berukuran ***N*** dimana diketahui jumlah kriteria "berhasil"-nya (***M***)

Fungsi kepekatan peluang apabila $N = 12$, $M = 5$ dan $n = 3$ dapat dilihat seperti dibawah ini




juga fungsi sebaran kumulatifnya




Dari grafik *pmf*nya kita peroleh informasi bahwa:

1. $P(X=1) = h(1,3,5,12) = 0.4773$
2. $P(X<1) = 0.1591$ dan
3. $P(X>1) = 0.3636$

Dari grafik *cdf*nya

1. $P(X \leq 1) = 0.6364$
2. $P(X>1) = 1\text{-}0.6364 = 0.3636$

**Sebaran Geometrik**

Kali ini akan dipelajari peubah acak yang menunjuk pada banyaknya tindakan yang harus dilakukan untuk mencapai 'Berhasil' yang pertama kali dari sederetan peristiwa yang harus dilakukan dari tindakan Bernoulli. Dengan demikian, bisa saja sekali tindakan langsung memperoleh 'Berhasil', dua kali tindakan baru memperoleh 'Berhasil' pertama, tiga kali, empat kali, dan seterusnya hingga bila digambarkan G sebagai 'Gagal' dan B sebagai 'Berhasil' adalah seperti berikut

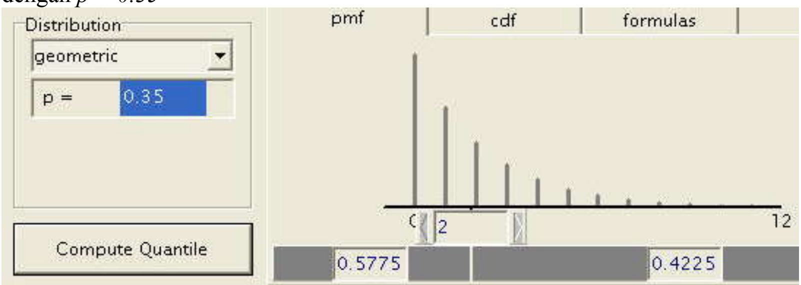
| | |
|---|---|
| $X$=1 | B |
| $X$=2 | GB |
| $X$=3 | GGB |
| … | |
| $X$=$x$ | $\underbrace{GG...G}_{x-1} B$ |

Fungsi Kepekatan Peluang Geometri ini dapat dituliskan seperti berikut

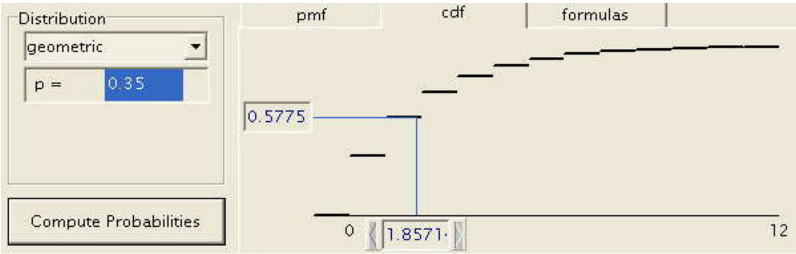
$$g(x;p) = q^{x-1}p \text{ untuk } x = 1, 2, 3, \ldots$$

Geometrik adalah sebaran diskrit yang digunakan untuk menduga peluang suatu keluaran tertentu akan terjadi *pertama kali* pada tindakan ke $\boldsymbol{x}$ dari suatu populasi tak terhingga dimana peluang munculnya kejadian tersebut konstan ($\boldsymbol{p}$).

Ilustrasi fungsi kepekatan peluang dan fungsi sebaran kumulatif sebaran Geometrik dengan $p = 0.35$




dan



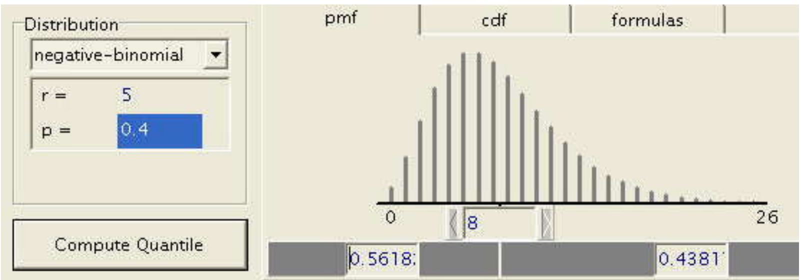

**Sebaran Negatif Binomial**

Dalam tindakan Bernoulli serupa seperti dalam sebaran Geometrik, misalkan $X$ melambangkan peubah acak banyaknya tindakan yang diperlukan hingga tercapai $r$ 'Berhasil'. Peubah acak ini dikatakan memiliki sebaran Negatif Binomial yang fungsi kepekatan peluangnya dapat dituliskan sebagai berikut.

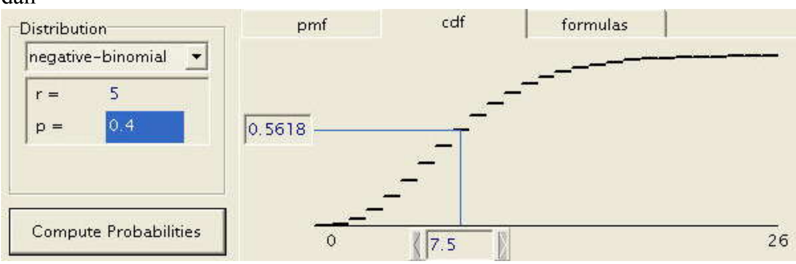
$$nb(x;r,p) = C_{r-1}^{x-1} p^r q^{x-r} \qquad \text{untuk } x=r,r+1,r+2,\ldots$$

Negatif Binomial adalah sebaran diskrit yang digunakan untuk menduga peluang suatu keluaran tertentu akan *terjadi ke-r kali* pada tindakan ke $\boldsymbol{x}$ dari suatu populasi tak terhingga dimana peluang munculnya kejadian tersebut konstan ($\boldsymbol{p}$).

Fungsi kepekatan peluang Negatif Binomial dan fungsi sebaran kumulatifnya untuk $r = 5$ dan $p = 0.4$ dapat disajikan seperti berikut




dan



Dari kedua grafik diatas dapat diperoleh informasi bahwa

1. $P(X<8) = P(X\leq 7.5) = 0.5618$
2. $P(X\geq 8) = P(X>7.5) = 1\text{-}0.5618 = 0.4382$ (pembulatan $0.4381...$)

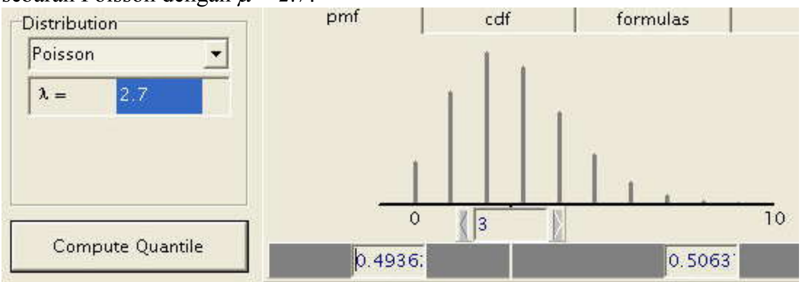
**Sebaran Poisson**

Suatu peubah acak diskret $X$ dikatakan memiliki sebaran Poisson dengan parameter $\mu > 0$ jika memiliki fungsi kepekatan peluang seperti berikut

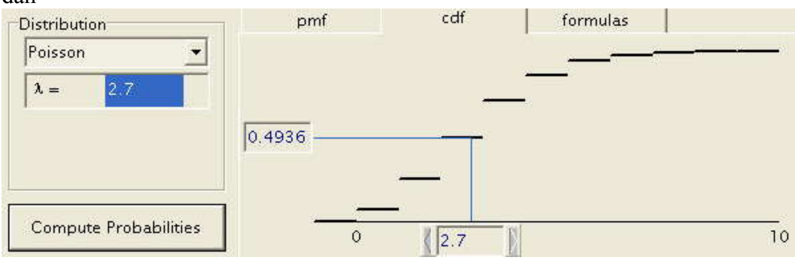
$$f(x;\mu) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!} \qquad x = 0,1,2,...$$

Poisson adalah sebaran diskrit yang digunakan untuk menduga peluang bahwa peluang keluaran tertentu akan muncul tepat $\boldsymbol{x}$ kali dalam satuan yang dibakukan dengan laju rata-rata munculnya kejadian per satuan adalah konstan ($\boldsymbol{\mu}$).

Untuk menggambarkan fungsi kepekatan peluang dan fungsi sebaran kumulatif dari sebaran Poisson dengan $\mu = 2.7$.




dan




Dari kedua grafik diatas dapat diperoleh informasi bahwa

1. $P(X<3) = P(X\leq 2.7) = 0.4936$
2. $P(X\geq 3) = P(X>2.7) = 1\text{-}0.4936 = 0.5064$ (pembulatan $0.5063...$)

**Sebaran Seragam Diskret**

Peubah acak $X$ memiliki sebaran seragam diskret pada bilangan bulat $1,2,3,...,N$ jika memiliki fungsi kepekatan peluang dalam bentuk

$$f(x) = \frac{1}{N} \qquad \text{untuk } x = 1,2,3,\ldots,N$$

## Sebaran Peubah Acak Kontinu

### Definisi 10.

Peubah acak $X$ dikatakan sebagai peubah acak kontinu jika memiliki fungsi $f(x)$, yang disebut sebagai fungsi kepekatan peluang dari $X$, sehingga fungsi sebaran kumulatifnya dapat dituliskan sebagai

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

### Definisi 11.

Misalkan $X$ terdefinisi pada $(\Omega,S,P)$ dengan fungsi sebaran $F$. Maka $X$ dikatakan kontinu jika $F$ kontinu mutlak, yaitu jika terdapat fungsi tak negatif $f(x)$ sedemikian rupa sehingga untuk setiap bilangan riil $x$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Fungsi $f$ disebut dengan fungsi kepekatan peluang atau fungsi densitas peluang peubah acak $X$.

$\Omega$ adalah ruang parameter yaitu himpunan semua parameter yang mungkin. $S$ adalah ruang contoh yaitu himpunan semua kemungkinan peristiwa dari suatu tindakan. $P$ fungsi peluang yang didefinisikan.

Mengikuti teorema dasar Kalkulus, fungsi kepekatan peluang peubah acak kontinu ini dapat diperoleh dari fungsi sebaran kumulatifnya dengan cara melakukan differensiasi atau turunannya.

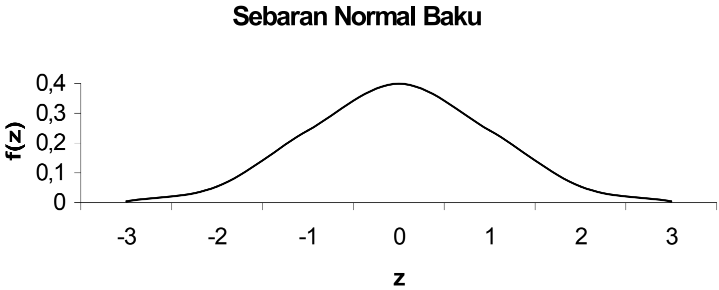
$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = F'(x)$$

asalkan turunannya ada.

Dalam peubah acak kontinu, peristiwa $[X = c]$ dimana $c$ adalah konstanta, memiliki peluang nol. Untuk peubah acak kontinu berlaku : Jika $a < b$

$$\begin{aligned} P[\, a < X \le b\,] &= P[\, a \le X < b\,] \\ &= P[\, a < X < b\,] \\ &= P[\, a \le X \le b\,] \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

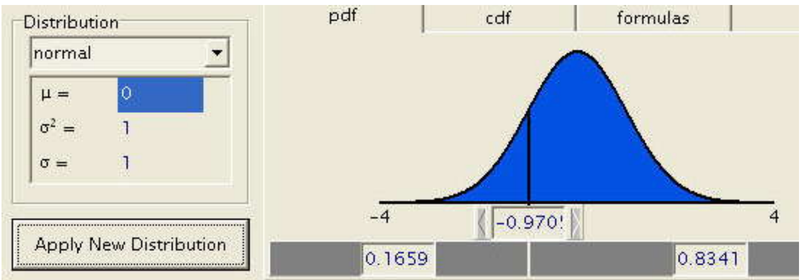
**Sebaran Normal**

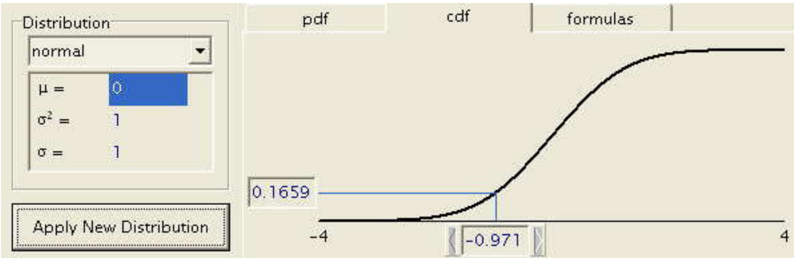



Fungsi kepekatan sebaran normal ditentukan oleh dua parameter: parameter lokasi yaitu $\mu$ yang merupakan nilai rataan populasi dan parameter skala yaitu $\sigma$ yang merupakan simpangan baku populasi. Rataan populasi dapat memiliki nilai pada interval $-\infty < \mu < +\infty$ dan simpangan baku populasinya pada interval $\sigma > 0$. Fungsi kepekatan peluang tersebut dapat dituliskan sebagai berikut

$$f_X(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Sebaran Normal adalah sebaran kontinu yang digunakan untuk menggambarkan kesalahan peubah terukur yang muncul secara acak yang diamati dalam sebuah contoh yang diambil dari populasi tak terhingga.






Dari kedua grafik diatas dapat diperoleh informasi bahwa

1. $P(Z<-0.971) = 0.1659$
2. $P(Z>-0.971) = 1-0.1659 = 0.8341$
3. $z_{0.1659} = -0.971$

**Sebaran Kai-kuadrat**

Derajat bebas adalah parameter yang digunakan dalam beberapa sebaran kontinu. Derajat bebas merupakan sebuah bilangan (biasanya bulat) yang menunjukkan banyaknya ukuran contoh (n) dikurangi dengan banyaknya parameter populasi (k) yang harus diestimasi dari contoh. Simbolnya adalah ν (baca: nu) dan secara matematis $\nu = n - k$.

Jika peubah acak Y memiliki sebaran Kai-kuadrat ($\chi 2$) dengan derajat bebas $\nu$ yang dinotasikan sebagai $Y \sim \chi 2_{(\nu)}$, maka fungsi kepekatan peluangnya adalah

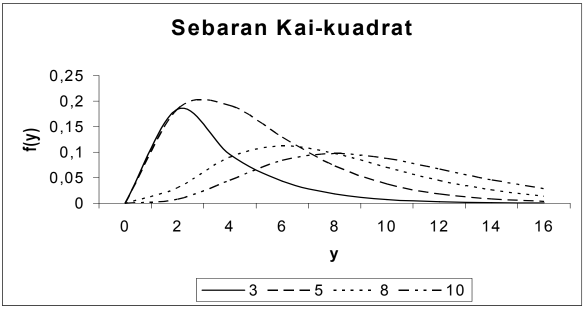
$$f_Y(y;\upsilon) = \frac{1}{2^{\upsilon/2}\Gamma(\upsilon/2)} y^{(\upsilon-2)/2} e^{-y/2}$$

dimana fungsi ini terdefinisi pada y ≥ 0. Γ(k) adalah fungsi gamma dengan argumen k. Bila k>1, maka secara umum Γ(k) = (k-1)Γ(k-1). Dan bila k adalah bilangan bulat, maka Γ(k) = (k-1)! Demikian juga Γ(1) = 1 dan Γ( ½ ) = $\pi^{½}$ .

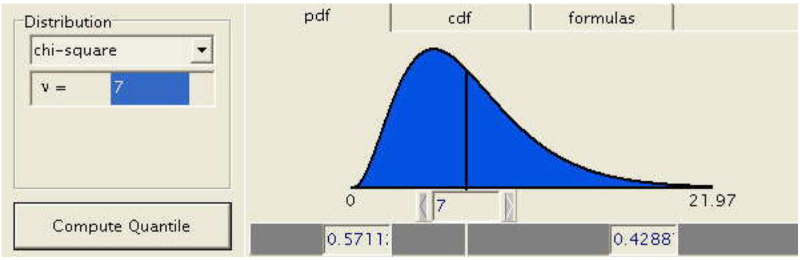
Juga tampak dari grafik, bahwa semakin besar derajat bebas sebagai parameter fungsi tersebut, bentuk grafiknya semakin mendekati sebaran normal. Dengan *Central Limit Theorem* (Dalil Limit Pusat) dapat ditunjukkan bahwa

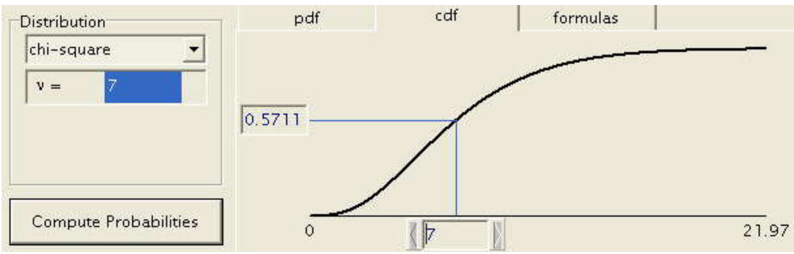
$$\sqrt{2\chi_\nu^2} \sim N(\sqrt{2\nu-1},1) \text{ untuk } \upsilon > 30$$

dengan kata lain bahwa untuk derajat bebas yang besarnya lebih dari 30, maka peubah acak baru yang nilainya sama dengan akar pangkat dua dari dua kali peubah acak lamanya, akan menyebar menurut sebaran normal dengan nilai rataan akar pangkat dua dari dua kali derajat bebas minus satu dan ragam sama dengan satu.




Sebaran Kai-kuadrat dengan derajat bebas *n-1* merupakan jumlah dari kuadrat n peubah acak normal baku.




Dari kedua grafik diatas dapat diperoleh informasi bahwa

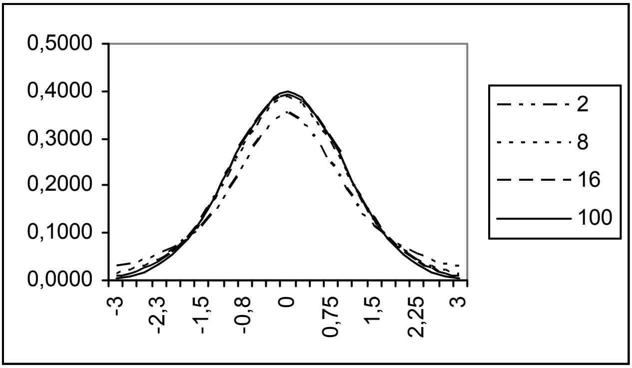
1. $P(\chi^2_7 < 7) = 0.5711$
2. $P(\chi^2_7 > 7) = 1\text{-}0.5711 = 0.4288$
3. $\chi^2_{7;0.5711} = 7$

## Sebaran *t*

Peubah acak T yang menyebar menurut sebaran t dengan derajat bebas n-1, secara notasi ditulis sebagai T ~t(n-1). Fungsi kepekatan peluang sebaran tersebut adalah

$$f_T(t;\nu)=\frac{1}{\sqrt{\pi\nu}}\frac{\Gamma\left[(\nu+1)/2\right]}{\Gamma(\nu/2)}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}$$

dimana Γ adalah fungsi gamma

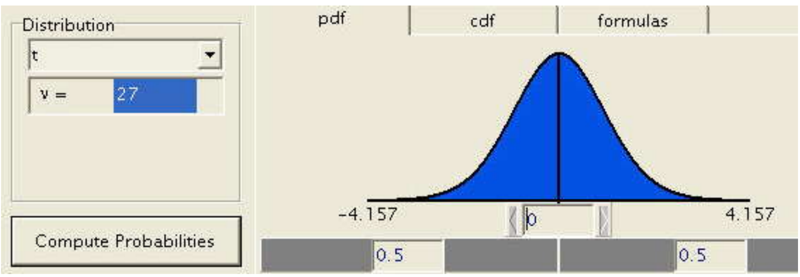


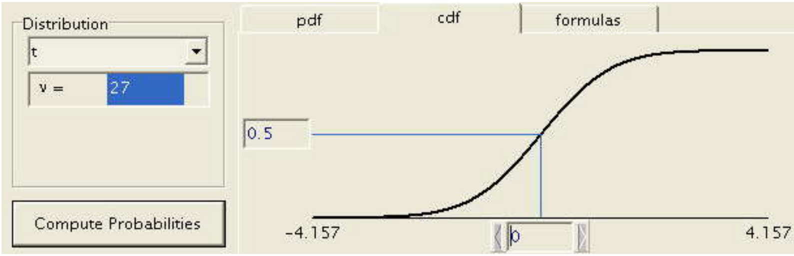

.

Seperti halnya sebaran Kai-kuadrat, sebaran t pun dengan derajat bebas yang semakin besar, sebaran ini akan menyamai sebaran Normal Baku. Sebaran t ini umumnya digunakan untuk derajat bebas yang "kecil" atau ukuran sampel yang kecil, katakanlah kurang dari 30.

Sebaran t atau lengkapnya sebaran Student-t adalah sebaran kontinu yang diturunkan dari rasio peubah acak yang menyebar menurut sebaran normal baku dengan akar pangkat dua dari peubah acak yang menyebar menurut sebaran Kai-kuadrat dengan derajat bebas ν yang dibagi dengan ν itu sendiri. $Z \sim N(0,1)$ dan $Y \sim \chi^2_\nu$ maka

$$T=\frac{Z}{\sqrt{Y/\nu}}\sim t_{(\nu)}$$






Dari kedua grafik diatas dapat diperoleh informasi bahwa

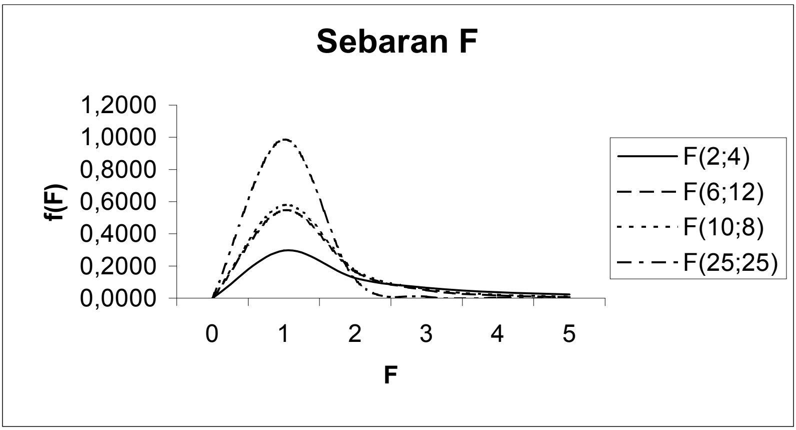
1. $P(t_{27} < 0) = 0.5000$
2. $P(t_{27} > 0) = 1\text{-}0.5000 = 0.5000$
3. $t_{27;0.5000} = 0$

## Sebaran F

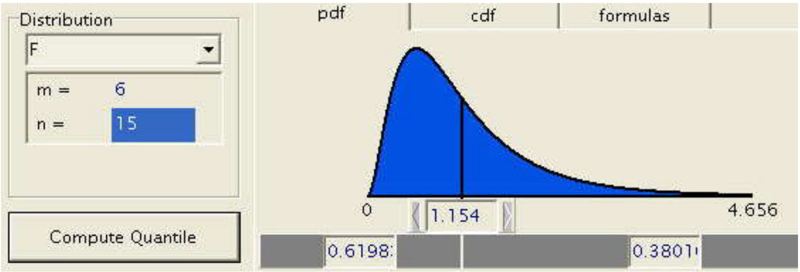
Jika $X$ menyebar menurut sebaran F dengan derajat bebas $\nu_1$ dan $\nu_2$, biasanya disingkat dengan $X \sim F(\nu_1, \nu_2)$, maka fungsi kepekatan peluangnya dapat dituliskan sebagai

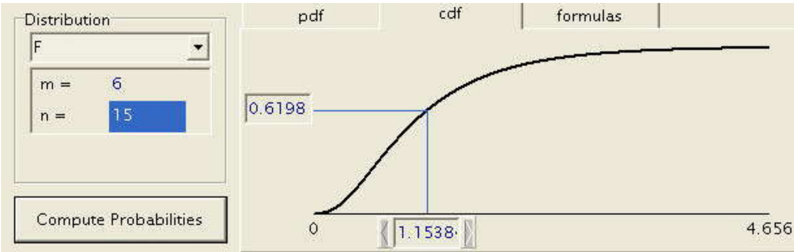
$$f(F;\nu_1,\nu_2) = \frac{\Gamma\left[(\nu_1+\nu_2)/2\right]}{\Gamma(\nu_1/2)\Gamma(\nu_2/2)}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\nu_1/2} \frac{F^{(\nu_1/2)-1}}{\left(1+\frac{\nu_1}{\nu_2}F\right)^{(\nu_1+\nu_2)/2}}$$

dimana $F \geq 0$.




Sebaran F adalah sebaran peubah acak yang diturunkan dari rasio dua sebaran kai-kuadrat yang masing-masing dibagi dengan derajat bebasnya. Bila $A \sim \chi^2_{\nu 1}$ dan $B \sim \chi^2_{\nu 2}$ maka $F = (A/\nu_1)/(B/\nu_2)$ akan menyebar menurut sebaran F dengan derajat bebas $\nu_1$ dan $\nu_2$.




Dari kedua grafik diatas dapat diperoleh informasi bahwa

1. $P(F_{6;15} < 1.154) = 0.6198$
2. $P(F_{6;15} > 1.154) = 1\text{-}0.6198 = 0.3802$ (pembulatan 0.3801...)
3. $F_{6;15;0.6198} = 1.1538$

# Sifat-sifat Peubah Acak

## Definisi 12.

Jika $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_k)$ memiliki fungsi kepekatan peluang bersama $f(x_1, ..., x_k)$, dan jika $\boldsymbol{Y} = u(X_1, ..., X_k)$ merupakan fungsi dari $\boldsymbol{X}$, maka $E(\boldsymbol{Y})=E_X[u(X_1,...,X_k)]$, dimana

$$E_X\left[u(X_1,...,X_k)\right] = \sum_{x_1}...\sum_{x_k} u(x_1,...,x_k)f(x_1,...,x_k)$$

jika $\boldsymbol{X}$ diskrit, dan

$$E_X\left[u(X_1,...,X_k)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}...\int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1,...,x_k)f(x_1,...,x_k)dx_1...dx_k$$

jika $\boldsymbol{X}$ kontinu.

**Teorema 1.**

Jika $X$ merupakan peubah acak dan $a$ serta $b$ merupakan konstanta, maka $E(aX+b)=aE(X)+b$

**Teorema 2.**

Jika $X_1$ dan $X_2$ merupakan peubah acak dengan fungsi kepekatan peluang bersama $f(x_1,x_2)$, maka

$$E_{X_1,X_2}(X_1+X_2)=E_{X_1}(X_1)+E_{X_2}(X_2)$$

**Teorema 3.**

Jika $X$ dan $Y$ merupakan peubah acak peubah acak yang saling bebas, dan $g(x)$ dan $h(y)$ merupakan fungsi, maka

$$E[g(X)h(Y)]=E[g(X)]E[h(Y)]$$

Generalisasi teorema diatas dimungkinan dapat dibuat untuk lebih dari dua peubah acak. Lebih khususnya, jika $X_1, \ldots, X_k$ merupakan peubah acak-peubah acak, dan $u_1(x_1), \ldots u_k(x_k)$ merupakan fungsi, maka

$$E\left(\prod_{i=1}^{k} u_i(X_i)\right)=\prod_{i=1}^{k} E\left[u_i(X_i)\right]$$

**Definisi 13.**

**Momen ke-*k* disekitar titik pusat** dari suatu peubah acak $X$ didefinisikan sebagai

$$\mu_k^{'}=E(X^k)$$

dan **momen ke-*k* disekitar nilai tengah** dari suatu peubah acak $X$ didefinisikan sebagai

$$\mu_k=E[X-E(X)]^k=E(X-\mu)^k$$

# Statistika Inferensia

## Populasi, Contoh, dan Statistik

Kebanyakan pengetahuan tentang dunia dimana kita hidup adalah sebagai hasil penyimpulan dari contoh atau sampel yang diamati atau diobservasi. Misalkan, kita makan di sebuah restoran atau cafe sekali dan kita bangun opini tentang kualitas makanan dan layanan pada restauran tersebut. Namun demikian, opini yang kita bentuk dari contoh tersebut belum tentu akurat.

### Definisi 14.

Sekumpulan atau koleksi semua elemen yang dipelajari atau dibahas disebut dengan ***populasi***.

### Definisi 15.

***Contoh*** adalah sebagian dari populasi atau koleksi dari beberapa elemen populasi.

Contoh dari populasi terhingga merupakan contoh acak jika setiap kemungkinan contoh yang terambil memiliki kesempatan yang sama untuk terpilih.

Suatu contoh acak berukuran $n$ merupakan sekuen $n$ peubah acak $X_1, X_2, ..., X_n$ yang menyebar saling bebas dan dari sebaran peluang yang sama. Hal ini sering digunakan istilah menyebar bebas stokastik dan identik (bsi).

Investigasi ilmiah sering berkenaan dengan bagaimana cara memperoleh informasi tentang populasi.

### Definisi 16.

**Statistik** merupakan fungsi dari beberapa peubah acak.

### Definisi 17.

**Statistik Tataan** ke-$k$ adalah statistik yang nilainya merupakan unsur pengamatan terkecil ke-$k$ diantara $(x_1, x_2, ..., x_n)$ yang diperoleh dari peubah acak $(X_1, X_2, ..., X_n)$

# Pendugaan

Setiap distribusi dari suatu peubah acak memiliki sedikitnya satu parameter yang mencirikan populasi. Dalam kebanyakan hal, nilai parameter itu tidak mudah diperoleh. Hal ini lebih dikarenakan karena ukuran populasi yang bisa dibilang sangat besar atau bahkan terlalu besar. Karena nilainya tidak dapat diperoleh, maka nilai tersebut hanya dapat di***estimasi*** atau diduga. Beberapa orang menggunakan istilah penaksiran. Pendugaan dapat dilakukan dengan cara mengambil contoh dari populasi yang akan diduga parameternya.

Fungsi sebaran peubah acak yang sesungguhnya hampir tidak pernah diketahui. Kadang kita menggunakan suatu tebakan terpelajar tentang bentuk fungi sebaran peluang, dan menggunakan tebakan tersebut sebagai pendekatan terhadap fungsi sebaran yang sebenarnya. Salah satu cara yang digunakan adalah mengamati beberapa nilai peubah acak, kemudian membuat grafik *S(x)* yaitu sebaran **empiris** dari amatan yang diperoleh.

### Definisi 18.

Misalkan $X_1, X_2, ..., X_n$ merupakan contoh acak. Fungsi sebaran empiris empiris *S(x)* adalah fungsi dari *x* yang sama dengan besarnya fraksi *X* yang lebih kecil atau sama dengan *x* untuk tiap nilai $x$, $-\infty < x < \infty$.

### Definisi 19.

Misalkan $X_1, X_2, ..., X_n$ merupakan contoh acak. Kuantil contoh ke-*p* adalah suatu nilai yang memenuhi dua kondisi :

a. Fraksi peubah acak *X* yang lebih kecil dari $Q_p$ adalah ≤ p.
b. Fraksi peubah acak *X* yang lebih besar dari $Q_p$ adalah ≤ 1-p.

### Definisi 20.

Misalkan $X_1, X_2, ..., X_n$ merupakan contoh acak. Rata-rata contoh dinotasikan dengan $\overline{X}$ dan didefinisikan dengan $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ . Ragam atau varian contoh dinotasikan dengan $S^2$ dan didefinisikan dengan $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$

# Pengujian Hipotesis

Salah satu bentuk statistika inferensia yang paling banyak mendapat perhatian baik oleh pengembang maupun pengguna metode nonparametrik adalah pengujian hipotesis.

**Pengujian hipotesis** merupakan suatu proses inferensi dari suatu contoh untuk menerima atau tidak menerima pernyataan tertentu yang berkenaan dengan populasinya.

Hipotesis diuji berdasarkan bukti yang terkandung dalam contoh yang diambil. Hipotesis dapat ditolak, berarti bukti dari contoh memberikan cukup keraguan kepada kita dengan keyakinan bahwa hipotesis adalah salah, atau jika tidak maka hipotesis akan diterima, atau tidak ditolak.

Langkah-langkah dalam tahapan pengujian hipotesis

1. Menyatakan hipotesis yang akan diuji (dalam terminologi populasi)
2. Memilih statistik uji yang tepat.
3. Membuat aturan , untuk menentukan apakah hipotesis akan diterima atau ditolak.
4. Berdasarkan nilai yang diperoleh dari contoh yang diambil dan diamati, statistik ujinya dievaluasi, dan kesimpulan dibuat untuk menolak atau menerima hipotesis tersebut.

**Hipotesis nol** merupakan pernyataan yang akan diuji dimana pada umumnya sebagai landasan atau dasar penentuan statistik pembanding dari statistik uji yang digunakan. Hipotesis nol pada umumnya berupa hipotesis sederhana. Istilah nol yang juga berarti nihil atau tidak ada, dalam artian tak ada perbedaan dari sesuatu yang dibandingkannya.

**Hipotesis alternatif** merupakan pernyataan tandingan atau alternatif, yang secara umum menyatakan bahwa pernyataan dalam hipotesis nol tidak benar.

**Daerah kritis** adalah kisaran nilai yang mengakibatkan ditolaknya hipotesis nol atau diterimanya hipotesis tandingan dimana luas derah kritis tersebut sama dengan taraf nyata pengujian atu biasanya hanya disingkat dengan taraf saja.

**Hipotesis sederhana** adalah hipotesis nol yang hanya memiliki satu kemungkinan nilai, sedangkan **Hipotesis majemuk** memiliki lebih dari satu nilai kemungkinan.

**Statistik uji** adalah statistik yang digunakan untuk menguji suatu hipotesis statistika. Dalam statistika parametrik kita kenal statistik uji *Z, t, F,* dan $\chi^2$.

**Kesalahan tipe I** merupakan kesalahan menerima hipotesis nol apabila hipotesis nol salah, sedangkan **Kesalahan tipe II** merupakan kesalahan yang disebabkan menerima hipotesis nol apabila hipotesis nol tersebut salah.

**Taraf nyata** atau taraf merupakan peluang yang menyatakan besarnya kesempatan paling banyak yang diperbolehkan dalam membuat kesalahan dalam pengambilan keputusan apabila hipotesis nol benar. **Kuasa uji** atau kuasa pengujian merupakan peluang menolak hipotesis nol apabila hipotesis nol tersebut salah. **Nilai peluang** (*nilai-p*) merupakan besarnya peluang statistik uji lebih besar (atau mungkin lebih kecil, tergantung arah pengujian) dari nilai statistik hitungnya. Apabila nilai peluang suatu pengujian lebih kecil dari taraf ujinya, maka hipotesis nol ditolak.

# Sifat-sifat Pengujian Hipotesis

Setelah hipotesis nol dan hipotesis alternatif diformulasikan, terdapat beberapa pengujian hipotesis untuk menguji hipotesis nol. Untuk memilihnya, perlu dipertimbangkan beberapa hal yang berkenaan dengan sifat pengujian. Pertanyaan yang paling penting adalah ”Apakah asumsi pengujian ini merupakan asumsi yang sahih dalam penelitian kita ?”. Jika ternyata jawabnya ”Tidak”, maka pengujian ini tentunya tidak dipakai. Namun demikian, sebelum membuang uji tersebut, tentunya kita perlu mengetahui asumsi dasar pengujian tersebut. Dalam kebanyakan uji parametrik, asumsi normalitas sangatlah penting. Jika seandainya hasil pengujian hanya menghasilkan hampir normal, maka pengujian tersebut masih juga dianggap mendekati sahih. Sehingga, pengujian tidak perlu dibuang, jika seandainya menghasilkan mendekati sahih.

Penggunaan suatu uji apabila asumsi pengujian tidak sahih akan membahayakan, karena : (1) data dapat menghasilkan suatu penolakan hipotesis nol bukan karena data mengindikasikan bahwa hipotesis nol salah, tetapi karena data mengindikasikan satu asumsi pengujian yang tidak sahih. Pengujian hipotesis secara umum merupakan pendeteksi yang sensitif bukan hanya hipotesis nol yang salah, tetapi juga asumsi yang salah dalam modelnya. (2) seringkali data mengindikasikan bahwa hipotesis nol salah, dan asumsi yang salah dalam model juga mempengaruhi data, tetapi dua pengaruh ini saling menetralkan di dalam pengujian, sehingga pengujian tidak menghasilkan sesuatu dan hipotesis nol diterima.

Berdasarkan penjelasan diatas, maka pengujian yang baik hendaknya memenuhi hal-hal berikut:

1. Pengujian harus tidak bias.
2. Pengujian harus konsisten.
3. Pengujian harus lebih efisien dalam pengertian tertentu dari pada pengujian serupa lainnya.

### Definisi 21

Suatu pengujian yang **tidak bias** merupakan pengujian yang memiliki peluang menolak hipotesis nol bilamana hipotesis nol salah selalu lebih besar daripada atau sama dengan peluang menolak hipotesis nol apabila hipotesis nol benar.

Hal ini berarti bahwa suatu pengujian dikatakan tidak bias apabila kuasa ujinya setidaknya tidak kurang dari nilai taraf nyata pengujiannya. Suatu pengujian yang tidak takbias disebut dengan pengujian yang bias.

## Definisi 22

Suatu barisan pengujian dikatakan **konsisten** terhadap semua hipotesis alternatifnya jika kuasa pengujiannya mendekati 1.0 bilamana ukuran contohnya menjadi sangat besar, untuk tiap hipotesis alternatif yang mungkin. Taraf pengujian tiap pengujian dalam barisan ini diasumsikan sedekat mungkin dengan tetapi tidak melebihi nilai $\alpha > 0$.

## Definisi 23

Misalkan $T_1$ dan $T_2$ merupakan dua uji yang digunakan untuk menguji hipotesis nol dan hipotesis alternatif yang sama, dengan daerah-daerah kritisnya dengan taraf nyata pengujian yang sama $\alpha$, dan dengan nilai $\beta$ yang sama. **Efisiensi relatif** $T_1$ terhadap $T_2$ merupakan rasio $n_2/n_1$ dimana $n_1$ dan $n_2$ masing-masing berturut-turut merupakan ukuran contoh uji $T_1$ dan $T_2$.

## Teladan 5

Dua uji untuk menguji hipotesis nol dan hipotesis alternatif yang sama memiliki nilai $\alpha = 0.05$ dan $\beta = 0.20$. Untuk memperoleh nilai $\alpha$ dan $\beta$ tersebut uji yang pertama memerlukan ukuran contoh 60 sedangkan uji yang kedua hanya memerlukan 40 ukuran contoh. Dengan demikian efisiensie relatif uji pertama terhadap uji kedua adalah 40/60 = 0.67 sedangkan sefisiensi rekatif uji kedua terhadap uji pertama adalah 60/40 = 1.50. Hal ini berarti bahwa uji yang pertama kurang efisien dibandingkan dengan uji yang kedua.

## Definisi 24

Misalkan $n_1$ dan $n_2$ merupakan ukuran contoh yang diperlukan oleh $T_1$ dan $T_2$ untuk mencapai kuasa uji yang sama pada taraf pengujian yang sama juga. Jika nilai $\alpha$ dan $\beta$ tetap konstan, maka nilai limit $n_2/n_1$ bilamana $n_1$ menjadi besar sekali (menuju takhingga) disebut dengan ***asymptotic relative efficiency*** (ARE) uji pertama terhadap uji kedua, jika nilai limit tersebut bebas dari $\alpha$ dan $\beta$.

ARE dua pengujian biasanya sulit dihitung. Studi komprehensif tentang ARE dari berbagai pasangan uji dapat menjadi subyek tersendiri. Efisiensi relatif untuk ukuran contoh yang kecil menunjukkan bahwa ARE memberikan pendekatan yang baik untuk mendapatkan efisiensi relatif dalam banyak situasi praktis.

**Definisi 25**

Suatu uji dikatakan **konservatif** jika taraf signifikan atau taraf nyata sesungguhnya lebih kecil dari taraf nyata pengujian yang dinyatakan.

Pada saat sulit menghitung taraf nyata pengujian yang eksak (pasti), maka beberapa metode pendekatan $\alpha$ digunakan. Nilai pendekatan ini kemudian dipakai sebagai taraf nyata pengujiannya. Jika nilai pendekatan ini lebih besar dari taraf nyata yang sebenarnya (tetapi tak diketahui), maka ujinya disebut konservatif, dan resiko membuat kesalahan tipe I tidak sebesar yang seharusnya tertera.

# Statistika Nonparametrik

Secara umum, suatu metode statistika dikatakan nonparametrik jika memenuhi salah satu kriteria berikut:

1. Metode ini dapat digunakan pada data dengan skala pengukuran nominal.
2. Metode ini dapat digunakan pada data dengan skala pengukuran ordinal.
3. Metode ini dapat digunakan pada data dengan skala pengukuran interval atau rasio, dimana fungsi sebaran peubah acak yang menghasilkan data tak diketahui atau diketahui kecuali untuk sebanyak takhingga parameter yang tak diketahui.

Terminologi lain dari statistika nonparametrik (***nonparametric statistics***) adalah statistika bebas-sebaran (***distribution-free statistics***) meskipun penamaan ini berawal dari sudut pandang yang sedikit berbeda.

# Statistik Sebaran Binomial

Dalam bab ini akan disajikan berbagai statistik yang sering digunakan dalam metode nonparametrik yang kebanyakan berdasarkan sebaran Binomial.

## Uji Binomial

Data berasal dari sebanyak $n$ tindakan Bernoulli yang saling bebas. Tindakan Bernoulli merupakan suatu tindakan yang hanya memiliki 2 macam luaran, yaitu "Berhasil" atau "Gagal". Banyaknya peristiwa "Berhasil" kita notasikan dengan $O_1$ dan banyaknya peristiwa dikategorikan "Gagal" dinotasikan dengan $O_2 = n - O_1$.

Asumsi yang dipakai dalam uji Binomial adalah bahwa $n$ tindakan Bernoulli tersebut saling bebas menyeluruh (***mutually independent***) dan setiap tindakan memiliki peluang "Berhasil" sebesar $p$ yang konstan untuk keseluruhan tindakan.

Jika $p^*$ merupakan sembarang konstanta $0 \leq p^* \leq 1$ maka pengujian hipotesis dapat merupakan salah satu dari yang berikut:

A. Pengujian dua arah. $H_0: p = p^*$ vs $H_1: p \neq p^*$
B. Pengujian satu arah. $H_0: p \leq p^*$ vs $H_1 : p > p^*$
C. Pengujian satu arah. $H_0: p \geq p^*$ vs $H_1 : p < p^*$

Statistik uji yang digunakan adalah $\boldsymbol{T = O_1}$, banyaknya keluaran yang dikategorikan "Berhasil". Jika taraf nyata pengujian ditetapkan sebesar $\alpha$. Kriteria penolakan hipotesis nol sangat tergantung dari nilai $\alpha$ dan tipe pengujian, apakah satu arah atau dua arah.

A. Tolak hipotesis nol jika $T < t_1$ atau $T > t_2$ sedemikian rupa sehingga $P(Y \leq t_1) = \alpha_1$ dan $P(Y > t_2) = \alpha_2$ dan $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$. Dimana Y memiliki sebaran Binomial dengan parameter $n$ dan $p^*$.
B. Tolak hipotesis nol jika $T > t$ sedemikian rupa sehingga $P(Y > t) = \alpha$. Y memiliki sebaran Binomial dengan parameter $n$ dan $p^*$.
C. Tolak hipotesis nol jika $T > t$ sedemikian rupa sehingga $P(Y \leq t) = \alpha$. Y memiliki sebaran Binomial dengan parameter $n$ dan $p^*$.

Untuk ukuran sampel yang cukup besar, penggunaan pendekatan sebaran normal, sering dilakukan, dengan nilai ekspektasi sebesar $np^*$ dan varian atau ragam sebesar $np^*(1-p^*)$.

### Teladan 6

Pengaruh didirikannya PLTN terhadap kesehatan pekerja dan penduduk yang tinggal di sekitarnya, akhir-akhir ini menjadi bahan perdebatan. Salah satu bahayanya adalah kemungkinan paparan radiasi akan meningkatkan kematian karena kanker. Problem yang biasa dijumpai ketika kita melakukan studi kasus seperti ini adalah sedikitnya jumlah kematian karena kanker (dari semua jenis) maupun suatu jenis kanker tertentu, sehingga kebermaknaan statistik akan sulit dicapai, kecuali jika studi dilakukan dalam jangka waktu lama. Salah satu alternatif adalah melakukan studi mortalitas proporsional, yang didalamnya proporsi kematian karena suatu penyebab pada kelompok yang terpapar dibandingkan dengan proporsi pada populasi umum. Andaikan hasil penelitian menemukan bahwa 4 dari 13 kematian pada para pekerja berusia 55-64 tahun di PLTN disebabkan karena kanker. Jika berdasarkan laporan statistik disebutkan bahwa 20% dari semua kematian disebabkan kanker, dapatkah kita simpulkan bahwa hasil penelitian tersebut berbeda secara bermakna terhadap statistik populasi umum ? Taraf nyata pengujian 5%.

Hipotesis yang akan diuji dinyatakan dalam bentuk

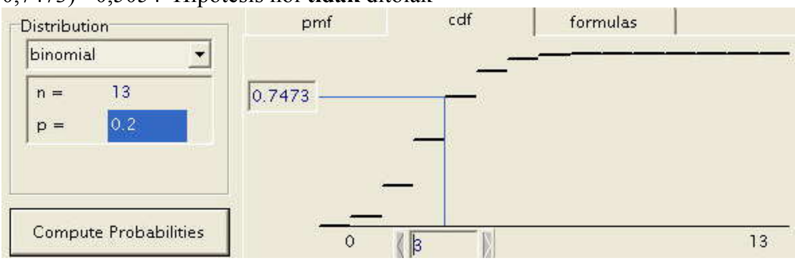
$$H_0: p = p_0 = 0{,}20 \quad \text{vs} \quad H_1: p \neq p_0 = 0{,}20$$

Dimana p adalah proporsi kematian karena kanker di antara para pekerja di PLTN dan $p_0$ adalah proporsi kematian karena kanker pada populasi umum

Dengan $\alpha$ = 0,05, dan karena $p$ = 4/13 = 0,31 > 0,20, maka $H_0$ kita tolak jika peluang untuk memperoleh sebanyak 4 kematian atau lebih diantara 13 kematian disebabkan kanker, adalah kurang dari 0,05. Sebaliknya kita terima apabila nilainya sama dengan atau lebih besar dari 0,05

$$p = 2\sum_{k=4}^{13} C_k^{13}(0,20)^k(0,80)^{13-k} = 2\left(1-\sum_{k=0}^{3} C_k^{13}(0,20)^k(0,80)^{13-k}\right)$$

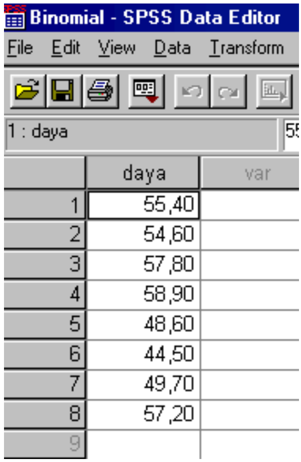
Dari Tabel Binomial pada halaman 132 dan $p_0 = 0.20$, maka nilai peluangnya = 2(1-0,7473) =0,5054 Hipotesis nol **tidak** ditolak



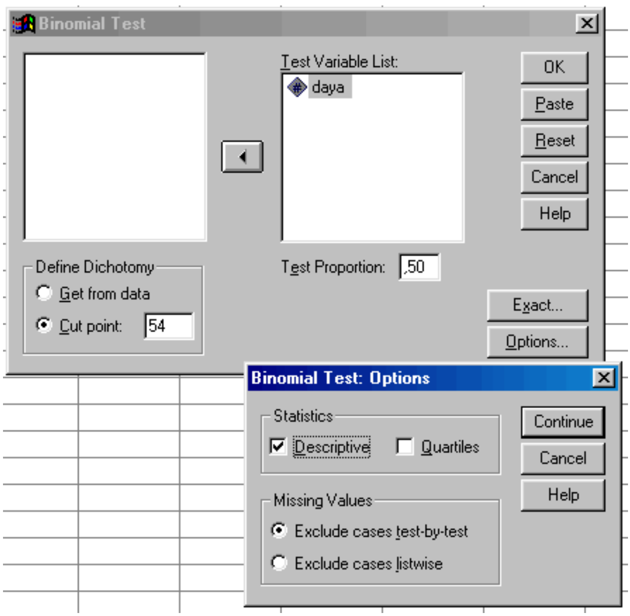

## Teladan 7.

Berikut diberikan data untuk melihat daya tahan kue (jam) suatu produk Ngabdul Bakery. Sebanyak 8 roti dipakai dalam uji coba dan hasilnya adalah sebagai berikut: 55.4 54.6 57.8 58.9 48.6 44.5 49.7 dan 57.2. Apakah kita masih bisa percaya bahwa umur rata-rata atau daya tahan roti tersebut 54 jam ? Kita dapat gunakan uji Binomial dalam hal ini.

Dengan menggunakan SPSS kita dapat masukkan datanya seperti berikut:




Selanjutnya pilih uji Binomial dan masukkan parameter-parameternya seperti berikut



## NPar Tests

**Descriptive Statistics**

| | N | Mean | Std. Deviation | Minimum | Maximum |
|---|---|---|---|---|---|
| DAYA | 8 | 53,3375 | 5,14641 | 44,50 | 58,90 |

**Binomial Test**

| | | Category | N | Observed Prop. | Test Prop. | Exact Sig. (2-tailed) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| DAYA | Group 1 | <= 54 | 3 | ,38 | ,50 | ,727 |
| | Group 2 | > 54 | 5 | ,63 | | |
| | Total | | 8 | 1,00 | | |

Nilai *exact-sig* 2 arahnya bernilai 0.727 yang lebih besar dari $\alpha = 0.05$ (misalnya), sehingga hipotesis nol tak bisa ditolak. Artinya, dengan taraf nyata 5% kita masih percaya bahwa daya tahan roti tersebut masih dapat dikatakan 54 jam.

## Teladan 8

Dibawah hukum Mendel tentang sifat-sifat menurun, suatu persilangan tanaman dengan genotipe khusus dapat diharapkan menghasilkan progeni dimana ¼ nya ”kerdil” dan ¾ nya ”tinggi”. Dalam suatu percobaan penentuan apakah asumsi Mendel masih berlaku atau tidak, suatu persilangan menghasilkan 243 tanaman kerdil dan 682 tanaman tinggi. Jika ”Berhasil” menyatakan progeni ”tinggi” maka $p^* = 3/4$ dan T merupakan banyaknya tanaman tinggi. Dengan menggunakan taraf nyata signifikan 5%, ujilah hipotesis bahwa $H_0: p = 3/4$ lawan $H_1: p \neq 3/4$ . [Conover]

Karena besarnya ukuran contoh $n = 925 = 243+682$, maka daerah kritis dengan taraf nyata pengujian 5% adalah $T \leq t_1$ atau $T \geq t_2$ dimana

$$t_1 = np^* + z_{0.025}\sqrt{np^*(1-p^*)}$$

$$= (925)(0.75) + (-1.960)\sqrt{(925)(0.75)(0.25)} = 667.95$$

dan

$$t_2 = np^* + z_{0.025}\sqrt{np^*(1-p^*)}$$

$$= (925)(0.75) + (1.960)\sqrt{(925)(0.75)(0.25)} = 719.55$$

Catatan: nilai $z_{0.025} = -1.960$ dapat diperoleh dari Tabel Sebaran Normal pada halaman 117.

# Uji Quantil

Misalkan $X_1, X_2, ..., X_n$ merupakan contoh acak. Untuk menguji kuantil dari suatu peubah acak, dapat digunakan uji Binomial. Sedikitnya skala pengukruran ordinal sebagai syarat uji kuantil, meskipun uji Binomial mempersyaratkan skala nominal sudah cukup. Jika peubah acak yang diuji bersifat kontinu, maka hipotesis yang diuji adalah

$H_0$: kuantil ke-$p^*$ peubah acak $X$ adalah $x^*$, yang setara dengan
$H_0$: $P(X \leq x^*) = p^*$ atau singkatnya
$H_0$: $p = p^*$ dimana $0 < p^* < 1$.

Statistik ujinya sama dengan banyaknya nilai contoh yang lebih kecil atau sama dengan $x^*$ dan uji Binomial dua arah dapat digunakan.

Tentunya, situasinya tidak semudah jika peubah acaknya tidak diasumsikan kontinu. Kemudian hipotesis yang diuji adalah

A. Uji dua arah. $H_0$: kuantil populasi ke-$p^*$ adalah $x^*$ vs $H_1$: $x^*$ bukan kuantil populasi ke-$p^*$
B. Uji satu arah. $H_0$: kuantil populasi ke-$p^*$ lebih besar atau sama dengan $x^*$ vs $H_1$: kuantil populasi ke-$p^*$ lebih kecil dari $x^*$.
C. Uji satu arah. $H_0$: kuantil populasi ke-$p^*$ lebih kecil atau sama dengan $x^*$ vs $H_1$: kuantil populasi ke-$p^*$ lebih besar dari $x^*$.

Pengujian tersebut diatas setara dengan menguji

A. Uji dua arah. $H_0$: $P(X \leq x^*) \geq p^*$ dan $P(X < x^*) \leq p^*$ vs $H_1$: $P(X^* \leq x^*) < p^*$ atau $P(X < x^*) > p^*$
B. Uji satu arah. $H_0$: $P(X < x^*) \leq p^*$ vs $H_1$: $P(X < x^*) > p^*$
C. Uji satu arah. $H_0$: $P(X \leq x^*) \geq p^*$ vs $H_1$: $P(X^* \leq x^*) < p^*$

## Teladan 9.

Kuartil atas nilai ujian akhir sekolah menengah atas untuk memasuki perguruan tinggi dari tahun ke tahun diketahui memiliki nilai 193. Suatu sekolah mengirimkan nilai semacam dari 15 lulusan barunya, dan nilainya adalah

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 189 | 233 | 195 | 160 | 212 |
| 176 | 231 | 185 | 199 | 213 |
| 202 | 193 | 174 | 166 | 248 |

Bila diasumsikan bahwa 15 lulusan tadi dapat mewakili mereka yang ingin masuk perguruan tinggi. Uji apakah dengan menggunakan contoh tersebut kuartil atasnya masih 193 ?

Dengan menggunakan uji kuantil dan taraf nyata signifikan $\alpha = 0.05$ misalnya perlu dicari $t_1$ dan $t_2$ sedemikian rupa sehingga $P(Y \leq t_1) + P(Y > t_2) \leq \alpha$ dimana $Y$ memiliki sebaran Binomial dengan $n = 15$ dan $p = 0.75$.

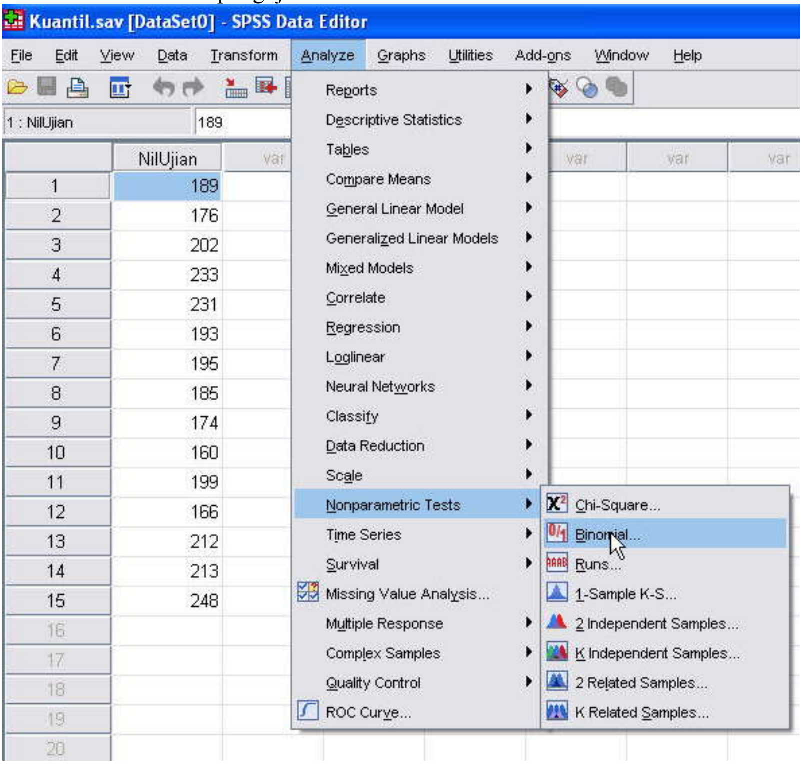
Dengan menggunakan sebaran Binomial kita peroleh

| x | P(X=x) | P(X<=x) | P(X>=x) |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.0000 | 0.0000 | 1.0000 |
| 1 | 0.0000 | 0.0000 | 1.0000 |
| 2 | 0.0000 | 0.0000 | 1.0000 |
| 3 | 0.0000 | 0.0000 | 1.0000 |
| 4 | 0.0001 | 0.0001 | 1.0000 |
| 5 | 0.0007 | 0.0008 | 0.9999 |
| 6 | 0.0034 | 0.0042 | 0.9992 |
| 7 | 0.0131 | **0.0173** | 0.9958 |
| 8 | 0.0393 | 0.0566 | 0.9827 |
| 9 | 0.0917 | 0.1484 | 0.9434 |
| 10 | 0.1651 | 0.3135 | 0.8516 |
| 11 | 0.2252 | 0.5387 | 0.6865 |
| 12 | 0.2252 | 0.7639 | 0.4613 |
| 13 | 0.1559 | 0.9198 | 0.2361 |
| 14 | 0.0668 | 0.9866 | 0.0802 |
| 15 | 0.0134 | 1.0000 | **0.0134** |

Dengan demikian kita peroleh $t_1 = 7$ dan $t_2 = 14$ atau tolak hipotesis nol jika $T \leq 7$ atau $T > 14$. Dari data diperoleh bahwa $T_1 = 7$ yaitu banyaknya data yang lebih kecil atau sama dengan 193. Dengan demikian hipotesis nol ditolak. Sepertinya kuartil atasnya tidak sama dengan 193 lagi.

Tidak dipilihnya $t_1 = 8$ karena memberikan peluang kumulatif dari bawah atau dari kiri sebesar 0.0566 yang tentunya sudah melebihi $\alpha = 0.05$ jika taraf nyata ini yang dipakai, demikian juga tidak dipilihnya $t_2 = 13$ karena peluang lebih besar dari nilai ini sebesar 0.0802. Jadi bila pengujian dua arah dilakukan, pilihlah $t_1$ dan $t_2$ sedemikian rupa sehingga total peluang lebih kecil atau sama dengan $t_1$ ditambah dengan peluang lebih besar dari $t_2$ sebesar-besarnya lebih kecil atau sama dengan $\alpha$ yang dipakai.

SPSS 16 memberikan pengujian satu arah




**Binomial Test**

| | | Category | N | Observed Prop. | Test Prop. | Exact Sig. (1-tailed) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nilai Ujian SLA | Group 1 | <= 193 | 7 | .47 | .75 | .017[a] |
| | Group 2 | > 193 | 8 | .53 | | |
| | Total | | 15 | 1.00 | | |

a. Alternative hypothesis states that the proportion of cases in the first group < .75.

Nilai peluang satu arah dari output SPSS diatas adalah 0.017 yang berarti bahwa proporsi nilai yang lebih kecil dari atau sama dengan 193 kurang dari 0.75.

# Uji Tanda dan Variasinya

Perlu diketahui bahwa uji nonparametrik paling tua adalah uji tanda (*sign test*). Sebenarnya uji tanda hanyalah uji binomial dengan $p^* = ½$. Uji tanda bermanfaat untuk menguji apakah dua populasi memiliki median yang sama atau tidak pada pengamatan berpasangan, juga digunakan untuk melihat kecenderungan dari suatu barisan pengukuran ordinal, atau menguji korelasi.

## Uji Tanda

Data pengamatan bivariat $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ..., (X_{n'}, Y_{n'})$ dimana $n'$ adalah banyaknya pasangan amatan. Terdapat basis alamiah untuk pasangan amatan, bila tidak peubah acak $X$ dan $Y$ saling bebas, dan uji Mann-Whitney yang lebih kuasa dalam pengujian ini.

Dalam setiap pasangan $(X_i, Y_i)$ dilakukan pembandingan, dan pasangan diklasifikasikan "+" atau "positif" jika $X_i < Y_i$, diklasifikasikan "-" atau "negatif" jika $X_i > Y_i$, atau "0" atau "kembar" jika $X_i = Y_i$.

Asumsi dalam uji tanda:

1. Data dari peubah acak Bivariat $(X_i, Y_i)$, $i = 1,2, ..., n'$ saling bebas mutual (*mutually independent*)
2. Skala pengukuran sedikitnya ordinal dalam tiap pasangan. Tiap pasangan dikategorikan sebagai "positif", "negatif" atau "kembar"
3. Pasangan $(X_i, Y_i)$ konsisten internal, dalam arti jika $P(+) > P(-)$ untuk satu pasang $(X_i, Y_i)$, maka $P(+) > P(-)$ untuk pasangan $(X_i, Y_i)$ lainnya. Hal yang sama juga benar untuk $P(+) < P(-)$ dan $P(+) = P(-)$.

Hipotesis statistik dapat memiliki bentuk.

A. Pengujian dua arah. $H_0$: $P(X_i < Y_i) = P(X_i > Y_i)$ untuk semua $i$ lawan $H_1$: $P(X_i < Y_i) < P(X_i > Y_i)$ untuk semua $i$ atau $P(X_i < Y_i) > P(X_i > Y_i)$ untuk semua $i$.
B. Pengujian satu arah. $H_0$: $P(X_i < Y_i) \leq P(X_i > Y_i)$ untuk semua $i$ lawan $H_1$: $P(X_i < Y_i) > P(X_i > Y_i)$ untuk semua $i$.
C. Pengujian satu arah. $H_0$: $P(X_i < Y_i) \geq P(X_i > Y_i)$ untuk semua $i$ lawan $H_1$: $P(X_i < Y_i) < P(X_i > Y_i)$ untuk semua $i$.

Uji tanda juga sering digunakan untuk menguji apakah $X_i$ dan $Y_i$ memiliki parameter lokasi yang sama atau berbeda. Oleh karenanya, dalam notasi pengujian hipotesis dapat berupa salah satu dari

A. $H_0$: $E(X_i) = E(Y_i)$ untuk semua $i$ lawan $H_1$: $E(X_i) \neq E(Y_i)$ untuk semua $i$.
B. $H_0$: $E(X_i) \geq E(Y_i)$ untuk semua $i$ lawan $H_1$: $E(X_i) < E(Y_i)$ untuk semua $i$.
C. $H_0$: $E(X_i) \leq E(Y_i)$ untuk semua $i$ lawan $H_1$: $E(X_i) > E(Y_i)$ untuk semua $i$.

Pernyataan $E(\ )$ sebagai suatu ukuran pemusatan atau parameter lokasi dapat digantikan dengan median.

Statistik uji

Misalkan statistik T menunjukkan banyaknya pasangan positif, maka T sama dengan banyaknya pasangan $(X_i, Y_i)$ dimana $X_i$ lebih kecil dari $Y_i$.

T = total banyaknya "positif"

Aturan Keputusan

Pertama kali, lupakan nilai kembar. Ini penting, dan misalkan $n$ adalah banyaknya pasangan yang tidak kembar. Dengan demikian $n$ = #"*positif*" + #"*negatif*". Misalkan $\alpha$ adalah taraf nyata pengujian. $Y$ adalah peubah acak Binomial dengan parameter $n$ dan $p = ½$.

A. Tolak hipotesis nol, jika $T \le t$ atau jika $T \ge n-t$ dimana $t$ dipilih sedemikian rupa sehingga $P(Y \le t)+P(Y \ge n-t)$ sedapat mungkin sama dengan atau kurang dari taraf nyata signifikannya.

B. Tolak hipotesis nol, jika $T \ge n-t$ dimana $t$ dipilih sedemikian rupa sehingga $P(Y \ge n-t)$ sedapat mungkin sama dengan atau kurang dari taraf nyata signifikannya.

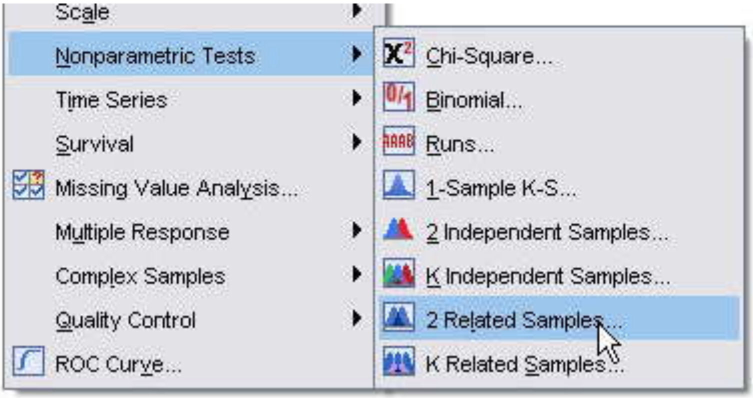
C. Tolak hipotesis nol, jika $T \le t$ dimana $t$ dipilih sedemikian rupa sehingga $P(Y \le t)$ sedapat mungkin sama dengan atau kurang dari taraf nyata signifikannya.

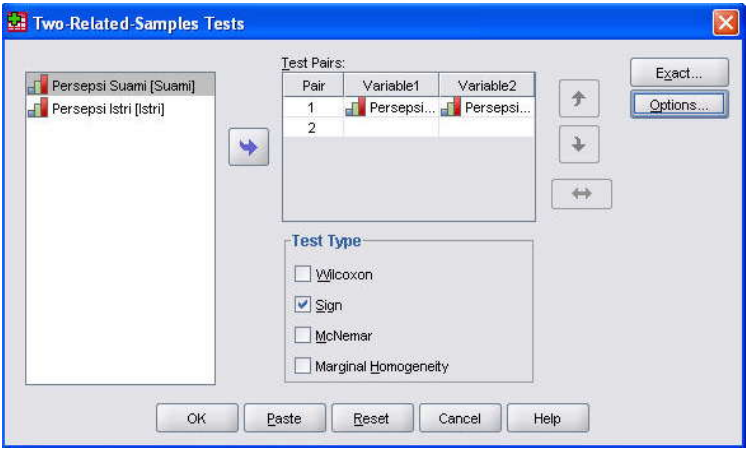
## Teladan 10.

Suatu perusahaan ingin mengetahui pengaruh adanya kenaikan uang insentif terhadap kesejahteraan karyawan. Dalam penelitian itu, dipilih 20 pegawai beserta istrinya secara acak, sehingga terdapat 20 pasangan data suami-istri. Perubahan peringkat kesejahteraan keluarga menurut suami-istri disajikan pada tabel berikut. Apakah terdapat perbedaan pengaruh insentif yang signifikan terhadap kesejahteraan keluarga menurut suami-isteri ? Gunakan taraf nyata pengujian sebesar 5%.

| Isteri | Suami |
|---|---|
| 4 | 1 |
| 5 | 4 |
| 4 | 5 |
| 4 | 5 |
| 5 | 4 |
| 4 | 3 |
| 4 | 3 |

Dengan menggunakan SPSS kita dapat mengolahnya seperti berikut. Setelah mmasukkan data, kemudian pilih Analyze, Nonparametric Test, 2 Related Samples dan pilih Sign, kemudian OK.




Output dari analisis diatas adalah

**Frequencies**

| | | N |
|---|---|---|
| Persepsi Istri - Persepsi Suami | Negative ... | 5 |
| | Positive Differences[b] | 2 |
| | Ties[c] | 0 |
| | Total | 7 |

a. Persepsi Istri < Persepsi Suami

b. Persepsi Istri > Persepsi Suami

c. Persepsi Istri = Persepsi Suami

dan

**Test Statistics**[b]

| | Persepsi Istri - Persepsi Suami |
|---|---|
| Exact Sig. (2-tailed) | .453[a] |

a. Binomial distribution used.

b. Sign Test

Kesimpulan : karena nilai peluang yang dinotasikan dengan exact-sig 2 arah sebesar 0.453 > taraf nyata pengujian yang digunakan, maka hipotsis nol diterima, artinya nilai persepsi suami dan istri masih dapat dikatakan sama.

## Uji Perubahan Signifikan McNemar

Data pengamatan terdiri dari n' peubah acak bivariat yang saling bebas ($X_i$, $Y_i$), i = 1, 2, ..., n'. Skala pengukuran baik $X_i$ dan $Y_i$ adalah nominal dengan 2 kategori, yaitu "0" dan "1". Sehingga ($X_i$, $Y_i$) hanya dapat memiliki nilai (0,0), (0,1), (1,0), atau (1,1). Dalam uji McNemar, data biasanya ditabelkan dalam bentuk seperti berikut

| | $Y_i = 0$ | $Y_i = 1$ |
|---|---|---|
| $X_i = 0$ | ***a*** | ***b*** |
| $X_i = 1$ | ***c*** | ***d*** |

Asumsi dalam pengujian ini

1. Pasangan data $(X_i, Y_i)$ saling bebas mutual.
2. Skala pengukuran nominal dengan dua kategori untuk kedua peubah acak.
3. Perbedaan peluang $P(X_i=0,Y_1=1)-P(X_i=1,Y_i=0)$ negatif untuk semua $i$, nol untuk semua $i$, atau positif untuk semua $i$.

Hipotesis yang diuji dapat berupa salah satu dari yang berikut

A. $H_0$: $P(X_i=0,Y_i=1) = P(X_i=1, Y_i=0)$ untuk semua $i$ lawan $H_1$: $P(X_i=0,Y_i=1) \neq P(X_i=1, Y_i=0)$ untuk semua $i$.

B. $H_0$: $P(X_i=0) = P(Y_i=0)$ untuk semua $i$ lawan $H_1$: $P(X_i=0) \neq P(Y_i=0)$ untuk semua $i$.

C. $H_0$: $P(X_i =1) = P(Y_i=1)$ untuk semua $i$ lawan $H_1$: $P(X_i =1) \neq P(X_i =1)$ untuk semua $i$.

Untuk menguji hipotesis diatas digunakan statistik uji

$$T_1 = \frac{(b-c)^2}{b+c}$$

Namun demikian, untuk $b+c \leq 20$, statistik berikut lebih baik

$$T_2 = b$$

Kedua statistik, tidak tergantung *a* atau *d*, yang tidak lain menyatakan banyaknya nilai kembar, yaitu nilai yang kita kesampingkan dalam analisis.

Aturan Pengambilan Keputusan. Misalkan $n = b + c$. Jika $n \leq 20$, maka tabel Binomial dapat digunakan. Selanjutnya, dengan $n = b+c$ dan $p = ½$, kemudian tentukan daerah kritisnya seperti dalam prosedur uji Binomial. Jika $n > 20$, maka gunakan statistik *T1* dan gunakan tabel kai-kuadrat. Tolak hipotesis nol, jika $T_1 > \chi^2_{1;1-\alpha}$ .

Uji diatas merupakan variasi dari uji tanda, dimana peristiwa *(0,1)* dikatakan ”+”, peristiwa *(1,0)* dikatakan ”-”, sedangkan peristiwa *(0,0)* dan *(1,1)* dikatakan ”kembar”. Hipotesis uji McNemar dengan demikian memiliki bentuk $H_0$: $P(+) = P(-)$ yang sama seperti hipotesis nol dalam uji tanda. Daerah kritis $T_2$ sama seperti pada uji tanda untuk $n \leq 20$.

Untuk $n > 20$, dapat didekati dengan sebaran Normal melalui

$$Z = \frac{T_2 - n(1/2)}{\sqrt{n(1/2)(1/2)}} = \frac{b-(1/2)n}{(1/2)\sqrt{n}}$$

Memiliki sebaran mendekati Normal apabila hipotesis nol benar. Karena $n = b+c$ maka

$$Z = \frac{b - \frac{b+c}{c}}{\frac{1}{2}\sqrt{b+c}} = \frac{b-c}{\sqrt{b+c}}$$

Dengan demikian $T_1 = Z^2 \sim \chi^2_1$

## Teladan 11.

Untuk mengetahui pengaruh promosi terhadap perilaku konsumen, perlu dipelajari kondisi sebelum dan sesudah promosi dilakukan. Konsumen dikategorikan membeli produk atau tidak membeli produk. Hal yang ingin dipelajari adalah apakah terjadi perubahan perilaku konsumen dengan adanya promosi dari tidak membeli menjadi membeli atau dari membeli menjadi tidak membeli. Misalkan diperoleh data seperti berikut

| | | *Sesudah promosi* | |
|---|---|---|---|
| | | *Membeli* | *Tidak Membeli* |
| *Sebelum promosi* | *Membeli* | ***63*** | ***4*** |
| | *Tidak Membeli* | ***21*** | ***12*** |

Hipotesis nol : promosi tidak mempengaruhi perilaku konsumen lawan hipotesis alternatifnya: promosi mempengaruhi perilaku konsumen. Kemudian dihitung

$$T_1 = \frac{(b-c)^2}{b+c} = \frac{(4-21)^2}{4+21} = \frac{289}{25} = 11.56$$

Dari tabel kai-kuadrat dengan derajat bebas 1 dan taraf nyata pengujian 5% diperoleh nilai 3.841 (lihat Tabel Kai-kuadrat pada halaman 119). Karena nilai $T_1 >$ 3.841 maka hipotesis nol ditolak, artinya promosi memberikan dampak perilaku konsumennya

## Uji Tren Cox dan Stuart

Data pengamatan dari barisan peubah acak $X_1, X_2, ..., X_{n'}$ disusun menurut waktu pengamatan atau urutan magnitud. Jika diinginkan untuk mengetahui apakah ada kecenderungan dalam barisan peubah acak tersebut, maka perlu disusun dalam bentuk pasangan data $(X_1, X_{1+c}), (X_2, X_{2+c}), ..., (X_{n'-c}, X_{n'})$ dimana $c$ sama dengan $n'/2$ jika $n'$ genap dan $c$ sama dengan $(n'+1)/2$ jika $n'$ ganjil. Jika $n'$ ganjil maka data yang ada ditengah peubah acak dihilangkan. Kemudian gantikan tiap pasangan $(X_i, X_{i+c})$ dengan tanda "+" atau "positif" jika $X_i < X_{i+c}$, dengan tanda "-" atau "negatif" jika $X_i > X_{i+c}$ dan hilangkan nilai kembar. Banyaknya pasangan nilai tak kembar sebut saja sama dengan $n$.

Asumsi-asumsi yang diperlukan
1. Peubah acak $X_1, X_2, ..., X_{n'}$ saling bebas mutual.
2. Skala pengukuran tiap peubah acak diatas sdikitnya ordinal.
3. Tiap peubah acak menyebar saling bebas atau memiliki suatu kecenderungan.

Hipotesis yang diuji dapat merupakan salah satu dari yang berikut:
A. Pengujian dua arah. $H_0$: $P(X_i < X_{i+c}) = P(X_i > X_{i+c})$ untuk semua $i$ lawan $H_0$: $P(X_i < X_{i+c}) \neq P(X_i > X_{i+c})$ untuk semua $i$.
B. Pengujian satu arah. . $H_0$: $P(X_i < X_{i+c}) \leq P(X_i > X_{i+c})$ untuk semua $i$ lawan $H_0$: $P(X_i < X_{i+c}) > P(X_i > X_{i+c})$ untuk semua $i$.
C. Pengujian satu arah. . $H_0$: $P(X_i < X_{i+c}) \geq P(X_i > X_{i+c})$ untuk semua $i$ lawan $H_0$: $P(X_i < X_{i+c}) < P(X_i > X_{i+c})$ untuk semua $i$.

Interpretasi lain dari pengujian hipotesis diatas atau hipotesis diatas setara dengan
A. Pengujian dua arah. $H_0$: tidak ada kecenderungan lawan $H_1$: ada kecenderungan naik atau kecenderungan turun.
B. Pengujian satu arah. $H_0$: tidak ada kecenderungan naik lawan $H_1$: ada kecenderungan naik.
C. Pengujian satu arah. $H_0$: tidak ada kecenderungan turun lawan $H_1$: ada kecenderungan turun.

Statistik uji dan aturan keputusan yang digunakan sama dengan statistik yang digunakan dalam uji tanda yaitu banyaknya pasangan "+".

## Teladan 12.

Total pendapatan tahunan Bakso Den Bagus dalam 19 tahun terakhir dicatat dan dipelajari apakah adanya kecenderungan pendapatan yang semakin menaik atau semakin menurun. Bila pendapatan tahunan tersebut adalah 46.35, 46.93, 42.67, 37.36, 46.37, 53.25, 36.47, 58.26, 36.47, 58.12, 42.14, 34.82, 45.83, 38.98, 42.72, 37.17, 49.76, 37.25, 40.01. Karena *n' = 19* ganjil, maka data yang ditengah 58.12 dihilangkan atau tidak dipakai dalam perhitungan. Kemudian bilangan lainnya dipasangkan seperti berikut

| | | |
|---|---|---|
| 46.35 | 42.14 | - |
| 46.93 | 34.82 | - |
| 42.67 | 45.83 | + |
| 37.36 | 38.98 | + |
| 46.37 | 42.72 | - |
| 53.25 | 37.17 | - |
| 36.47 | 49.76 | + |
| 58.26 | 37.25 | - |
| 36.47 | 40.01 | + |

Karena tak ada nilai kembar, maka $n = 9$ dan $p = 0.50$ dan dengan menggunakan sebaran Binomial kita peroleh

Binomial (*n=9, p=0.50)*

| y | P(Y=y) | P(Y<=y) | P(Y>=y) |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.0020 | 0.0020 | 1.0000 |
| **1** | 0.0176 | **0.0195** | 0.9980 |
| 2 | 0.0703 | 0.0898 | 0.9805 |
| 3 | 0.1641 | 0.2539 | 0.9102 |
| 4 | 0.2461 | 0.5000 | 0.7461 |
| 5 | 0.2461 | 0.7461 | 0.5000 |
| 6 | 0.1641 | 0.9102 | 0.2539 |
| 7 | 0.0703 | 0.9805 | 0.0898 |
| **8** | 0.0176 | 0.9980 | **0.0195** |
| 9 | 0.0020 | 1.0000 | 0.0020 |

Terlihat jelas bahwa hipotesis nol ditolak apabila $T \leq 1$ atau $T \geq 8$ dengan daerah kritis seluas 0.0195+0.0195 = 0.0390 yang masih lebih kecil dari 0.0500.

Dari data diperoleh bahwa $T$ = banyaknya data kedua (kolom kedua) yang lebih besar dari pada data pertamanya (kolom pertama) ada sebanyak 4. Dengan demikian nilai ini **tidak** berada dalam daerah penolakan hipotesis nol. Artinya, dengan taraf nyata 3.9% kita yakin berdasarkan data yang ada bahwa tidak ada kecenderungan menaik atau menurun dari pendapatan tahunan Bakso Den Bagus.

# Tabel Kontingensi

## Tabel Kontingensi 2 x 2

Suatu contoh acak berukuran $n_1$ diamati dari suatu populasi dan tiap individu dapat diklasifikasikan menjadi salah satu dari kelas 1 atau kelas 2, dan $O_{11}$ dan $O_{12}$ adalah banyaknya amatan dari populasi 1 yang tergolong pada kategori 1 dan 2. Demikian juga contoh acak berukuran $n_2$ diamati dari suatu populasi dan tiap individu dapat diklasifikasikan menjadi salah satu dari kelas 1 atau kelas 2, dan $O_{21}$ dan $O_{22}$ adalah banyaknya amatan dari populasi 1 yang tergolong pada kategori 1 dan 2. Lebih jauh $O_{11}+O_{12} = n_1$ dan $O_{21}+O_{22} = n_2$ serta $N = n_1+n_2$.

Asumsi yang diperlukan:
1. Tiap contoh merupakan contoh acak.
2. Kedua contoh saling bebas mutual.
3. Tiap amatan hanya dapat dikategorikan kedalam kelas 1 atau kelas 2 tetapi tidak keduanya.

Hipotesis yang akan diuji
- A. Pengujian dua arah. $H_0$: $p_1 = p_2$ vs $H_1$: $p_1 \neq p_2$
- B. Pengujian satu arak. $H_0$: $p_1 \leq p_2$ vs $H_1$: $p_1 > p_2$

Statistik Uji dan Kriteria Penolakan Hipotesis Nol.
Untuk menguji hipotesis diatas, diperlukan

$$T = \frac{N(O_{11}O_{22} - O_{12}O_{21})^2}{n_1 n_2 (O_{11} + O_{21})(O_{12} + O_{22})}$$

Sebaran pasti dari statistik $T$ sulit ditabulasikan karena kombinasi yang berbeda dari alokasi $O_{11}$, $O_{12}$, $O_{21}$, dan $O_{22}$ yang sangat banyak apalagi nilainya tergantung dari sampel yang diambil. Oleh karenanya, pendekatan contoh berukuran besar diperlukan, dan sebaran kai-kuadrat dengan derajat bebas 1 digunakan sebagai sebaran pendekatan dari $T$. Lihat tabel kai-kuadrat pada halaman 119.
Tolak hipotesis nol jika nilai $T$ besar.

Selanjutnya, Yates menyarankan adanya koreksi kekontinuan pada statistik $T$ yaitu menjadi

$$T = \frac{N(\left|O_{11}O_{22} - O_{12}O_{21}\right| - \frac{N}{2})^2}{n_1 n_2 (O_{11} + O_{21})(O_{12} + O_{22})}$$

**Teladan 13.**

Sebanyak 40 siswa kelas unggul dibagi menjadi 2 masing-masing beranggotakan 20 orang. Kelompok 1 diajarkan pemrograman Delphi dengan menggunakan teknik pembelajaran konvensional dan kelompok 2 diajarkan pemrograman Delphi dengan teknik pembelajaran eksperimental. Setelah selesai seluruh siswa diuji untuk membuat program Delphi. Evaluasi dilakukan dengan hanya melihat 2 kategori yaitu program benar atau program salah. Hasilnya adalah seperti berikut:

| | Program Benar | Program Salah |
|---|---|---|
| Konvensional | 13 | 7 |
| Eksperimental | 17 | 3 |

Bila taraf nyata pengujian 5%, maka tolak hipotesis nol apabila $T > 3.841$.
Berdasarkan data diatas kita peroleh

$$T = \frac{N(O_{11}O_{22} - O_{12}O_{21})^2}{n_1 n_2 (O_{11} + O_{21})(O_{12} + O_{22})} = \frac{40((13)(3) - (7)(17))^2}{(20)(20)(30)(10)} = \frac{6400}{3000} = 2.12$$

Oleh karenanya, belum cukup bukti pada taraf 5% kita katakan bahwa proporsi benar / salah dalam pembuatan program untuk kedua kelompok siswa sama.

# Tabel Kontingensi r x k

Secara keseluruhan terdapat $r$ populasi dan contoh acak diambil dari tiap populasi ini. Misalkan $n_j$ merupakan banyaknya amatan contoh yang diperoleh dari populasi $j$ untuk $1 \le j \le r$. Tiap amatan dari tiap contoh dapat diklasifikasikan kedalam satu dari $k$ kategori / kelas yang ada. Misalkan $O_{jl}$ merupakan banyaknya amatan contoh ke-$i$ yang termasuk dalam kategori / kelas ke-$j$, maka

$$n_i = O_{i1} + O_{i2} + \ldots + O_{ik} \quad \text{untuk semua } i$$

Data disusun dalam tabel kontingensi $r$x$k$ seperti di bawah ini

| | Kelas 1 | Kelas 2 | ... | Kelas $k$ | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| Populasi 1 | $O_{11}$ | $O_{12}$ | ... | $O_{1k}$ | $n_1$ |
| Populasi 2 | $O_{21}$ | $O_{22}$ | ... | $O_{2k}$ | $n_2$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| Populasi $r$ | $O_{r1}$ | $O_{r2}$ | ... | $O_{rk}$ | $n_r$ |
| | $C_1$ | $C_2$ | ... | $C_k$ | |

Total seluruh observasi dari semua contoh adalah $N$

$$N = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$$

Banyaknya amatan dalam kelas ke-$l$ disebut dengan $C_l$

$$C_l = O_{1l} + O_{2l} + \ldots + O_{rl} \qquad l = 1, 2, \ldots, k$$

Asumsi yang diperlukan dalam analisis tabel kontingensi:

1. Tiap contoh merupakan contoh acak.

2. Keluaran berbagai contoh semuanya saling bebas mutual.
3. Tiap observasi dikategorikan kedalam satu dari *k* kategori yang ada.

Misalkan peluang suatu nilai yang diambil secara acak yang diambil dari populasi ke-*j* termasuk dalam kategori ke-*l* dinotasikan dengan $p_{jl}$ untuk $j = 1, 2, ..., r$ dan $l = 1, 2, ..., k$.

$H_0$: $p_{1l} = p_{2l} = ... = p_{rl}$ untuk semua $l$ vs
$H_1$: $p_{il} \neq p_{kl}$ untuk beberapa nilai $l$, dan beberapa pasang $i$ dan $k$.

Statistik uji yang digunakan adalah

$$T = \sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{k}\frac{(O_{jl}-E_{jl})^2}{E_{jl}}$$

dimana $E_{jl} = \dfrac{n_j C_l}{N}$

Pendekatan untuk sampel berukuran besar dilakukan untuk memperoleh daerah kritis. Tolak hipotesis nol jika $T \geq \chi^2_{1-\alpha;(r-1)(k-1)}$.

## Teladan 14.

Suatu contoh acak siswa dipilih dari sekolah menegah umum negeri dan contoh acak yang lain dipilih dari sekolah menengah umum swasta. 46 siswa diambil dari sekolah swasta dan 82 siswa dari sekolah negeri. Mereka diberikan uji potensi akademik dan hasilnya adalah seperti pada tabel di bawah ini

| | **0-300** | **301-450** | **451-600** | **601-750** |
|---|---|---|---|---|
| **Swasta** | 6 | 14 | 17 | 9 |
| **Negeri** | 30 | 32 | 17 | 3 |

Apakah distribusi nilai ujian di kedua kelompok sekolah (negeri dan swasta) sama ? Gunakan taraf nyata pengujian 5%.

Kita harus cari dahulu nilai ekspektasi atau nilai harapan tiap sel yang sesuai dengan menggunakan formula $E_{jl} = \dfrac{n_j C_l}{N}$. Dengan demikian kita peroleh

| | **0-300** | **301-450** | **451-600** | **601-750** |
|---|---|---|---|---|
| **Swasta** | 12.9 | 16.5 | 12.2 | 4.3 |
| **Negeri** | 23.1 | 29.5 | 21.8 | 7.7 |

Dengan demikian

$$T=\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{k}\frac{(O_{jl}-E_{jl})^2}{E_{jl}}=\frac{(6-12.9)^2}{12.9}+\frac{(14-16.5)^2}{16.5}...+\frac{(3-7.7)^2}{7.7}=17.3$$

Karena $T = 17.3 > \chi^2_{0.95;3} = 7.815$ maka hipotesis nol ditolak, artinya sebaran nilai ujian dari kedua kelompok sekolah dapat dikatakan sama.

Jika seandainya yang diketahui adalah total keseluruhan amatan saja, yaitu N, dan tiap amatan dapat dikategorikan ke dalam baris ke-*i* dan kolom ke-*j*, maka hipotesis yang diujinya menjadi

$H_0$: kategori baris dan kategori kolom saling bebas.
$H_1$: kategori baris dan kategoari kolom tidak saling bebas.

# Uji Median

Dari setiap *c* populasi diambil sebanyak $n_i$ contoh, $i=1,2,...,c$. Kemudian tentukan median contoh gabungan. Misalkan $O_{1i}$ adalah banyaknya amatan contoh ke-*i* yang nilainya melebihi median keseluruhan, dan $O_{2i}$ adalah banyaknya amatan contoh ke-*i* yang nilainya lebih kecil atau sama dengan median keseluruhan. Keseluruhan amatan kemudian disajikan dalam tabel kontingensi 2x*c*.

| Contoh | *1* | *2* | ... | *c* | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| > *median* | $O_{11}$ | $O_{12}$ | ... | $O_{1c}$ | *a* |
| ≤ *median* | $O_{21}$ | $O_{22}$ | ... | $O_{2c}$ | *b* |
| Total | $n_1$ | $n_2$ | ... | $n_c$ | *N* |

Nilai *a* merupakan total banyaknya amatan yang lebih besar dari median contoh keseluruhan, dan *b* merupakan total banyaknya amatan yang lebih kecil atau sama dengan median contoh keseluruhan, dan $a + b = N$.

Asumsi yang diperlukan dalam uji Median ini adalah

1. Tiap contoh merupakan contoh acak.
2. Contoh-contoh tersebut saling bebas.
3. Skala pengukuran sedikitnya ordinal.
4. Jika semua populasi memiliki median yang sama, maka semua populasi memiliki peluang suatu amatan lebih besar dari median keseluruhan yang sma pula.

Dengan demikian hipotesisnya adalah

$H_0$: semua *c* populasi memiliki median yang sama.
$H_1$: sedikitnya ada dua populasi yang memiliki median yang berbeda.

Statistik uji yang digunakan

$$T = \frac{N^2}{ab} \sum_{i=1}^{c} \frac{\left( O_{1i} - \frac{n_i a}{N} \right)^2}{n_i}$$

Atau untuk kemudahan perhitungan, dapat digunakan

$$T = \frac{N^2}{ab} \sum_{i=1}^{c} \frac{O_{1i}^2}{n_i} - \frac{Na}{b}$$

Jika *a* kira-kira sama dengan atau sangat dekat dengan *b*, maka penyederhanaan formula diatas dapat dilakukan sehingga menjadi

$$T = \sum_{i=1}^{c} \frac{(O_{1i} - O_{2i})^2}{n_i}$$

Bentuk terakhir ini menghasilkan sebaran pasti jika $a = b$, jika tidak sebaran pendekatan yang digunakan.

Kriteria penolakan hipotesis nol : Tolak hipotesis nol jika $T > \chi^2_{1-\alpha;c-1}$.

## Ukuran Dependensi

Tabel kontingensi merupakan bentuk yang mudah untuk menguji data apakah memiliki dependensi dengan data lainnya. Jika baris yang berbeda mewakili data dari populasi yang berbeda, sedangkan kolom-kolom merepresentasikan kategori lainnya, maka dependensi baris-kolom dapat diperoleh dengan tabel kontingensi. Seperti telah disebutkan bahwa statistik uji yang digunakan dalam tabel kontingensi rxc diperoleh

$$T = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

Statistik ini dapat dipakai sebagai ukuran dependensi dengan filosofi bahwa ”Jika baik digunakan untuk menguji dependensi, tentu baik untuk mengukur dependensi”. Ini mengingat kemudahan dalam menghitung *T*.

Berbagai modifikasi ukuran dependensi adalah:

1. Koeffisien Kontingensi Cramer $R_1 = \dfrac{T}{N(\min(r,c) - 1)}$

2. Koeffisien Kontingensi Pearson $R_2 = \sqrt{\dfrac{T}{N + T}}$

3. Koeffisien Kontingensi Kuadrat Tengah $R_3 = \frac{T}{N}$

4. Koeffisien Kontingensi Tschuprow $R_4 = \sqrt{\frac{T}{N\sqrt{(r-1)(c-1)}}}$

5. Koeffisien Phi (2x2) $R_5 = \frac{ad - bc}{\sqrt{r_1 r_2 c_1 c_2}}$

6. Koeffisien Yule-Kendall (2x2) $R_6 = \frac{ad - bc}{ad + bc}$

7. Koeffisien Ives-Gibbons (2x2) $R_7 = \frac{(a+d)-(b+c)}{a+b+c+d}$

## Uji Kebaikan-suai (*Goodness-of-fit Test*)

Data diperoleh dari $N$ amatan acak dari peubah acak $X$. Seluruh $N$ amatan tadi kemudian diklasifikasikan menjadi $k$ kelas dan banyaknya observasi tiap kelas disebut dengan $O_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$.

Data amatan diatas disajikan dalam tabel satu arah atau tabel *1* x *c* seperti dibawah ini

| Kelas | *1* | *2* | ... | *k* | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| Frekuensi amatan | $O_1$ | $O_2$ | ... | $O_k$ | $N$ |

Asumsi-asumsi yang diperlukan

1. Contoh merupkan contoh acak
2. Skala pengukuran sedikitnya nominal

Hipotesis yang akan diuji.
Misalkan $F(x)$ merupakan fungsi sebaran kumulatif dari peubah acak $X$ yang sebenarnya namun tidak diketahui, dan $F^*(x)$ merupakan fungsi sebaran kumulatif hipotetis. Maka dengan sedikit modifikasi hipotesis yang akan diuji memiliki bentuk
$H_0$: $F(x) = F^*(x)$ untuk semua $x$ vs $H_1$: $F(x) \neq F^*(x)$ untuk sedikitnya satu nilai $x$.
Atau secara umum, hipotesis nol menyatakan bahwa fungsi sebaran kumulatif peubah acak yang diamati adalah $F^*(x)$, sedangkan hipotesis alternatifnya menyatakan fungsi sebaran kumulatif peubah acak yang diamati bukan $F^*(x)$.

Misalkan $p_j^*$ merupakan peluang amatan peubah acak $X$ tergolong ke dalam kelas $j$ bilamana $F^*(x)$ merupakan fungsi sebaran $X$. Dengan demikian dapat dihitung berdasarkan definisi bahwa $E_j = p_j^* N,\ \ j = 1, 2, ..., k$ . Dengan informasi ini dapat dihitung statistik uji

$$T = \sum_{j=1}^{k} \frac{(O_j - E_j)^2}{E_j}$$

Atau dengan bentuk yang lebih mudah guna perhitungan dengan kalkulator

$$T = \sum_{j=1}^{k} \frac{O_j^2}{E_j} - N$$

Jika bebeapa nilai $E_j$ kecil, sebaran kaikuadrat asimtotik mungkin tidak tepat. Sel-sel dengan nilai $E_j$ yang kecil hendaknya digabung dengan kelas yang lain sedemikian rupa sehingga bermakna, sehingga tak lebih dari 20% dari $E_j$ kurang dari 5 dan tak satupun kurang dari 1, kecuali jika $E_j$ semuanya sama.

Dengan menggunakan ukuran contoh yang cukup besar, kita dapat menggunakan pendekatan normal yang akhirnya kita dapat menggunakan pendekatan sebaran kai-kuadrat dengan derajat bebas *k-1*. Sehingga, kirteria penolakan hipotesis nol nya adalah : Tolak hipotesis nol apabila $T > \chi^2_{1-\alpha;k-1}$ .

# Uji Cochran

Tiap *c* perlakuan diaplikasikan pada tiap *r* blok atau subyek percobaan, dan hasil tiap perlakuan merupakan respon biner (0 dan 1). Hasilnya kemudian disajikan dalam tabel *r*x*c* dimana tiap sel hanya dapat bernilai 0 atau 1. Misalkan $R_i$ adalah total baris $i = 1,2, ...,r$ dan $C_j$ merepresentasikan total kolom $j = 1,2, ..., c$.

| | Perlakuan 1 | Perlakuan 2 | ... | Perlakuan *k* | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| Blok 1 | $X_{11}$ | $X_{12}$ | ... | $X_{1k}$ | $R_1$ |
| Blok 2 | $X_{21}$ | $X_{22}$ | ... | $X_{2k}$ | $R_2$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| Blok *r* | $X_{r1}$ | $X_{r2}$ | ... | $X_{rk}$ | $R_r$ |
| | $\boldsymbol{C_1}$ | $\boldsymbol{C_2}$ | **...** | $\boldsymbol{C_k}$ | $N$ |

Asumsi-asumsi yang diperlukan

1. Blok-blok dipilih secara acak dari seluruh kemungkinan populasi blok
2. Keluaran dari perlakuan dapat dikategorikan sebagai 0 atau 1 pada tiap blok.

Hipotesis dalam uji ini memiliki bentuk

$H_0$: perlakuan memiliki efektivitas yang sama.
$H_1$: terdapat perbedaan dalam hal efektivitas perlakuan.

Dalam terminologi matematis, misalkan $p_{ij} = P(X_{ij} = 1)$; $i=1,2,...,r$ $j=1,2,...,c$. Keefektifan yang sama antar perlakuan memiliki arti bahwa

$p_{i1} = p_{i2} = ... = p_{ic}$ untuk tiap $i$ dari 1 sampai $r$.

Sehingga hipotesis diatas setara dengan

$H_0$: $p_{i1} = p_{i2} = ... = p_{ic}$ untuk tiap $i$ dari 1 sampai $r$.
$H_1$: $p_{ij} \neq p_{ik}$ untuk beberapa $j$ dan $k$, dan beberapa $i$.

Statistik Uji yang digunakan adalah

$$T = \sum_{j=1}^{c} \frac{c(c-1)\left(C_j - \frac{N}{c}\right)^2}{\sum_{i=1}^{r} R_i(c-R_i)}$$

atau dapat dituliskan menjadi

$$T = c(c-1)\frac{\sum_{j=1}^{c}\left(C_j - \frac{N}{c}\right)^2}{\sum_{i=1}^{r} R_i(c-R_i)}$$

Dalam pembuatan algoritma komputasi, mungkin lebih mudah apabila

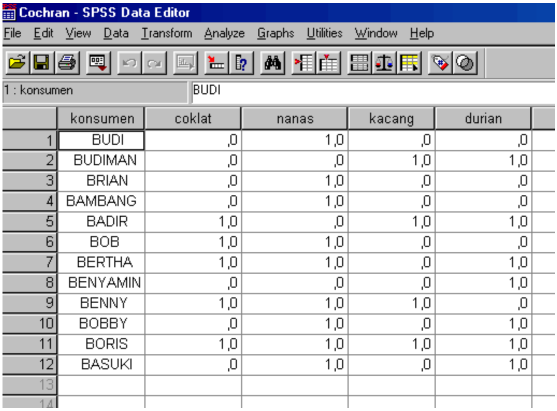
$$T = \frac{c(c-1)\sum_{j=1}^{c} C_j^2 - (c-1)N^2}{cN - \sum_{i=1}^{r} R_i^2}$$

Kriteria penolakan hipotesis nol: Tolak hipotesis nol jika $T > \chi^2_{1-\alpha;c-1}$.

## Teladan 15.

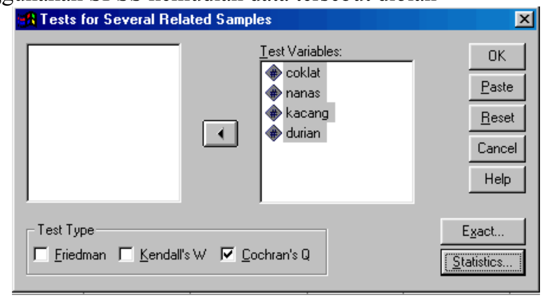
Perusahaan Roti Ampuh Bakery ingin menguji produk roti santapan ringan dengan 4 macam rasa : Coklat, Nanas, Kacang, dan Durian. Dua belas konsumen secara acak dipilih dan diminta merasakan keempat produk baru tersebut, kemudian menyatakan apakah suka (diberi angka 1) atau tidak suka (diberi angka 0) setelah merasakan produk-produk tersebut. Hasilnya disajikan dalam input SPSS berikut

Tabel Kontingensi



| | konsumen | coklat | nanas | kacang | durian |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | BUDI | ,0 | 1,0 | ,0 | ,0 |
| 2 | BUDIMAN | ,0 | ,0 | 1,0 | 1,0 |
| 3 | BRIAN | ,0 | 1,0 | ,0 | ,0 |
| 4 | BAMBANG | ,0 | 1,0 | ,0 | ,0 |
| 5 | BADIR | 1,0 | ,0 | 1,0 | 1,0 |
| 6 | BOB | 1,0 | 1,0 | ,0 | ,0 |
| 7 | BERTHA | 1,0 | 1,0 | ,0 | 1,0 |
| 8 | BENYAMIN | ,0 | ,0 | ,0 | 1,0 |
| 9 | BENNY | 1,0 | 1,0 | 1,0 | ,0 |
| 10 | BOBBY | ,0 | 1,0 | ,0 | 1,0 |
| 11 | BORIS | 1,0 | 1,0 | 1,0 | 1,0 |
| 12 | BASUKI | ,0 | 1,0 | ,0 | 1,0 |

Dengan menggunakan SPSS kemudian data tersebut diolah




**Descriptive Statistics**

| | N | Mean | Std. Deviation | Minimum | Maximum |
|---|---|---|---|---|---|
| COKLAT | 12 | ,417 | ,5149 | ,0 | 1,0 |
| NANAS | 12 | ,750 | ,4523 | ,0 | 1,0 |
| KACANG | 12 | ,333 | ,4924 | ,0 | 1,0 |
| DURIAN | 12 | ,583 | ,5149 | ,0 | 1,0 |

## Cochran Test

**Frequencies**

| | Value 0 | Value 1 |
|---|---|---|
| COKLAT | 7 | 5 |
| NANAS | 3 | 9 |
| KACANG | 8 | 4 |
| DURIAN | 5 | 7 |

**Test Statistics**

| | |
|---|---|
| N | 12 |
| Cochran's Q | 4,784[a] |
| df | 3 |
| Asymp. Sig. | ,188 |

a. 0 is treated as a success.

Nilai *asymp-sig* sebesar 0.188 mengindikasikan bahwa hipotesis nol diterima. Peluang berbagai jenis rasa roti disukai konsumen masih dapat dikatakan sama secara statistik.

# Statistik Skala Ordinal

Berbagai prosedur statistika yang telah dibahas pada beberapa bab terdahulu dapat digunakan untuk skala pengukuran nominal. Data dapat saja berbentuk nonnumerik (baik, lebih baik, terbaik) atau numerik (berupa angka). Seandainya data nonnumerik dapat diperingkatkan, maka cara menganalisisnya dilakukan seperti pada analisis data pada skala ordinal. Namun jika data bersifat numerik, dan lebih jauh lagi data pengamatan menyebar normal sehingga asumsi penggunaan statistik parametrik dipenuhi, maka kehilangan efisiensi karena penggunaan metode ini tidaklah besar. Dalam situasi seperti itu, efisiensi pengujian dengan menggunakan peringkat (rank). Dalam bab ini akan disajikan statistik-statistik untuk pengujian secara nonparametrik dengan menggunakan konsep peringkat.

**Definisi 26.**

Sebaran peubah acak $X$ dikatakan **simetris** terhadap garis $x = c$, untuk beberapa nilai $c$, jika $P(X \leq c-x) = P(X \geq c+x)$ untuk setiap kemungkinan nilai $x$.

Simetri atau kesetangkupan mudah didefinisikan jika sebaran peubah acak bersifat diskrit. Sebaran diskrit dikatakan simetri jika separo grafik fungsi peluang sebelah kiri merupakan cerminan dari grafik fungsi peluang sebelah kanan.

## Uji Peringkat Bertanda Wilcoxon

Suatu uji yang dirancang untuk menguji apakah sebuah contoh tertentu berasal dari populasi dengan median tertentu. Uji ini juga dapat digunakan pada kondisi pengamatan berpasangan (kondisi 'sebelum' dan 'sesudah') untuk melihat kesamaan median 'sebelum' dengan 'sesudah' pengamatan akibat suatu perlakuan.

Data terdiri dari $n'$ pengamatan berpasangan $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ dari peubah acak $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$. Beda absolut untuk tiap pengamatan $j = 1, 2, \ldots, n'$ dihitung dengan menggunakan rumus

$$\left|D_j\right| = \left|Y_j - X_j\right| \qquad j = 1, 2, \ldots, n'$$

Selanjutnya hilangkan semua pasangan yang memiliki perbedaan absolut nol. Misalkan $n$ adalah banyaknya pasangan yang perbedaannya tidak nol. Berikan peringkat dari yang terkecil dengan angka 1 dan seterusnya hingga yang terbesar dengan angka $n$ dari semua data perbedaan absolut yang tidak nol ini.

Jika beberapa pasangan data memiliki perbedaan absolut yang sama, maka nilai ranking (peringkat) untuk pasangan-pasangan ini adalah rata-rata peringkat yang seharusnya mereka gunakan.

Asumsi-asumsi yang diperlukan dalan hal ini adalah

1. Setiap $D_j$ adalah peubah acak kontinu.
2. Sebaran tiap $D_j$ adalah sebaran simetris.
3. Peubah acak $D_j$ saling bebas.
4. Semua peubah acak $D_j$ memiliki median yang sama.
5. Skala pengukuran sedikitnya interval.

Misalkan median umum dari $D_j$ dinyatakan dengan $m_{0,50}$. Maka hipotesis pengujian dapat dinyatakan dalam beberapa bentuk, tergantung apakah pengujian akan dilakukan satu atau dua arah.

A. **Pengujian satu arah** : nilai-nilai peubah acak *X* cenderung lebih besar dari nilai-nilai peubah acak *Y* vs nilai-nilai peubah acak *X* cenderung lebih kecil dari nilai-nilai peubah acak *Y* yang secara notasi dapat dituliskan sebagai $H_0$: $m_{0,50} \leq 0$ vs $H_1$: $m_{0,50} > 0$.
B. **Pengujian satu arah** : nilai-nilai peubah acak *X* cenderung lebih kecil dari nilai-nilai peubah acak *Y* vs nilai-nilai peubah acak *X* cenderung lebih besar dari nilai-nilai peubah acak *Y* yang secara notasi dapat dituliskan sebagai $H_0$: $m_{0,50} \geq 0$ vs $H_1$: $m_{0,50} < 0$.
C. **Pengujian dua arah** : nilai-nilai peubah acak *X* cenderung sama dengan nilai-nilai peubah acak *Y* vs nilai-nilai peubah acak *X* cenderung berbeda dari nilai-nilai peubah acak *Y* yang secara notasi dapat dituliskan sebagai $H_0$: $m_{0,50} = 0$ vs $H_1$: $m_{0,50} \neq 0$.

Jika model dilakukan sedikit penyesuaian, maka hipotesis diatas dapat diperluas dengan menambahkan asumsi bahwa $(X_j, Y_j)$ untuk $j = 1, 2, ..., n$ adalah contoh acak bivariat. Karenanya, hipotesis diatas dapat dinyatakan dengan

A. $H_0$: $E(X) \geq E(Y)$ vs $H_1$: $E(X) < E(Y)$
B. $H_0$: $E(X) \leq E(Y)$ vs $H_1$: $E(X) > E(Y)$
C. $H_0$: $E(X) = E(Y)$ vs $H_1$: $E(X) \neq E(Y)$

Tentunya hal tersebut diatas berlaku bilamana nilai harapan (nilai ekspektasi) untuk kedua peubah ada.

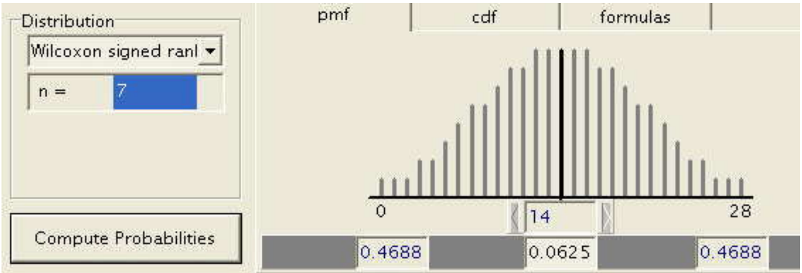
Statistik uji yang digunakan adalah $T = \sum_{i=1}^{n} R_i$ adalah jumlah peringkat untuk semua pasangan $(X_i, Y_i)$ bilamana $Y_i > X_i$. $R_i = 0$ jika $X_i > Y_i$ dan $R_i$ =peringkat nya bilamana $D_i > 0$.

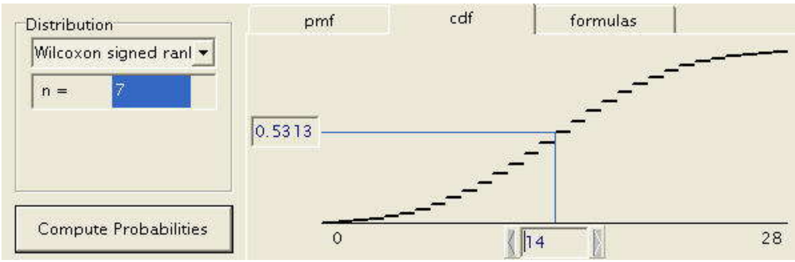
Sesuai dengan banyaknya tipe pengujian, maka aturan keputusan yang digunakan untuk pengujian hipotesis–hipotesis tersebut diatas adalah: Gunakan tabel pembanding statistik uji peringkat bertanda Wilcoxon pada halaman 140.

A. Nilai *T* yang besar mengindikasikan bahwa hipotesis nol salah, sehingga tolak hipotesis nol pada taraf nyata pengujian $\alpha$ jika $T > w_{1-\alpha}$, dan sebaliknya terima hipotesis nol jika $T \leq w_{1-\alpha}$.

B. Nilai $T$ yang kecil mengindikasikan bahwa hipotesis nol salah, sehingga tolak hipotesis nol pada taraf nyata pengujian $\alpha$ jika $T < w_\alpha$, dan sebaliknya terima hipotesis nol jika $T \geq w_\alpha$.

C. Tolak hipotesis nol jika nilai $T < w_{\alpha/2}$ atau $T > w_{1-\alpha/2}$, atau terima hipotesis nol jika $w_{\alpha/2} \leq T \leq w_{1-\alpha/2}$.




Dari kedua grafik diatas dapat diperoleh informasi:

1. $P(w_7 = 14) = 0.0625$
2. $P(w_7 < 14) = 0.4688$
3. $P(w_7 \leq 14) = 0.0625 + 0.4688 = 0.5313$
4. $P(w_7 > 14) = 1-0.5313 = 0.4688$ (pembulatan)
5. $w_{7;0.5313} = 14$

**Teladan 16.**

Dua belas pasang anak kembar diberikan tes psikologi untuk menentukan apakah anak yang lahir pertama lebih agresif daripada anak yang lahir kedua. Hipotesis yang akan diuji adalah

$H_0$: anak yang lahir pertama cenderung kurang agresif dari anak yang kedua. ($\approx H_0$: $m_{0,50} \geq 0$)
$H_1$: anak yang lahir pertama cenderung lebih agresif dari anak yang kedua. ($\approx H_0$: $m_{0,50} < 0$)

Hipotesis pada teladan ini mengikuti tipe B. Diasumsikan bahwa skor uji psikologi dapat merupakan ukuran keagresifan individu. Dari perhitungan diperoleh nilai statistik uji $T = 28{,}5$.

Nilai kritis untuk tipe B ini jika $\alpha = 0{,}05$, dengan demikian kriteiria penolakan hipotesisnya adalah: tolak hipotesis nol jika $T < 14$ (dari tabel kuantil Uji Peringkat Bertanda Wilcoxon pada halaman 140).

| Pertama | Kedua | Beda | Abs | Peringkat | + | - |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 86 | 88 | 2 | 2 | 4 | 4 | |
| 71 | 77 | 6 | 6 | 8 | 8 | |
| 87 | 86 | -1 | 1 | 2.5 | | 2.5 |
| 68 | 64 | -4 | 4 | 5 | | 5 |
| 91 | 96 | 5 | 5 | 6.5 | 6.5 | |
| 72 | 72 | 0 | 0 | 1 | | |
| 77 | 65 | -12 | 12 | 11 | | 11 |
| 91 | 90 | -1 | 1 | 2.5 | | 2.5 |
| 70 | 65 | -5 | 5 | 6.5 | | 6.5 |
| 71 | 80 | 9 | 9 | 10 | 10 | |
| 88 | 81 | -7 | 7 | 9 | | 9 |
| 87 | 72 | -15 | 15 | 12 | | 12 |
| | | | | | 28.5 | 48.5 |

Karena nilai $T = 28{,}5 > 14$, maka hipotesis nol diterima.

Catatan : uji yang sepadan dalam statistika parametrik dengan Wilcoxon-Signed-Rank test ini adalah uji-t untuk data berpasangan.

Untuk contoh berukuran lebih dari 20, kuantil ke-$p$ dari $wp$ statistik uji peringkat bertanda Wilcoxon ini dapat didekati dengan formula

$$w_p = \frac{n(n+1)}{4} + x_p \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}$$

dimana xp adalah kuantil ke-p dari sebaran normal baku.

Terdapat hubungan bahwa

$$w_p = \frac{n(n+1)}{2} - w_{1-p}$$

Bila terjadi peringkat kembar pada contoh berukuran besar sebanyak $g$ grup, dimana banyaknya peringkat kembar pada grup ke-$j$ adalah $t_j$., maka koreksi perlu dilakukan pada variannya menjadi

$$\sigma^2_{w*} = \frac{N(N+1)(2N+1)}{24} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{g} t_j(t_j-1)(t_j+1)$$

Untuk pengujian median dari dua contoh yang saling bebas, akan dibahas pada sub bab berikut.

# Uji Mann-Whitney

Adanya kondisi bahwa dapat saja seseorang mengambil consoh (sampel) dari dua populasi yang saling bebas, dua populasi yang memang beda, dan berkeinginan untuk menguji secara statistik berdasarkan data tersebut apakah kedua populasi identik ? Jika data contoh tersebut memiliki skala pengukuran ordinal, perbedaan yang menarik yang akan dilihat adalah perbedaan ukuran pemusatan (lokasi) dari dua populasinya. Apakah salah satu populasi cenderung memiliki nilai yang lebih besar dari pada populasi lainnya ? Apakah kedua populasi memiliki median yang sama ? Apakah kedua populasi memiliki nilai tengah (rata-rata) yang sama ?

Data dari dua contoh acak, misalkan saja $X_1, X_2, ..., X_n$ merupakan contoh acak berukuran $n$ dari populasi 1 dan $Y_1, Y_2, ..., Y_m$ adalah contoh acak berukuran $m$ dari populasi 2. Pendekatan yang mungkin dapat dilakukan secara intuitif adalah menggabungkan kedua contoh tersebut menjadi satu, merankingnya dari yang terkecil hingga yang terbesar. Bila contoh 1 berukuran $n$ dan contoh 2 berukuran $m$, dan $n+m$, maka peringkat terbesar bernilai $n+m$, bila tak ada nilai yang kembar. Statistik ujinya merupakan *jumlah peringkat dari salah satu contoh*. Apabila jumlah ini terlalu kecil atau terlalu besar, maka ada indikasi bahwa nilai populasinya cenderung lebih kecil atau lebih besar dari nilai populasi lainnya. Dengan demikian, hipotesis nol tak ada perbedaan diantara kedua populasi dapat ditolak jika peringkat-peringkat yang diberikan pada salah satu contoh cenderung lebih besar dari pada yang diperoleh contoh lainnya.

Jika beberapa contoh benar-benar sama nilainya, maka diberikan besaran peringkat yang sama besarnya yaitu rata-rata peringkat yang seharusnya diberikan.

Asumsi-asumsi yang diperlukan dalam uji Mann-Whitney
1. Kedua contoh merupakan contoh acak dari masing-masing populasinya.
2. Selain dalam tiap contoh saling bebas, maka antar contoh juga saling bebas mutual.
3. Kedua contoh dari peubah acak kontinu (sejumlah kecil nilai kembar diperbolehkan)
4. Skala pengukuran sedikitnya ordinal.

Hipotesis
Misalkan $F(x)$ dan $G(x)$ masing-masing berturut-turut adalah fungsi sebaran peubah acak $X$ dan $Y$. Maka hipotesis yang diuji adalah

$H_0$: $F(x) = G(x)$ untuk semua $x$

$H_1$: $F(x) \neq G(x)$ untuk beberapa nilai $x$

Dalam banyak situasi, pebedaan dua sebaran tidak selalu berimplikasi bahwa $P(X<Y) = ½$. Dengan demikian hipotesis berikut lebih sering dipakai daripada yang baru saja disebutkan.

A. Pengujian dua arah. $H_0$: $P(X<Y) = ½$ vs $H_1$: $P(X<Y) \neq ½$
B. Pengujian satu arah. $H_0$: $P(X<Y) \leq ½$ vs $H_1$: $P(X<Y) > ½$
C. Pengujian satu arah. $H_0$: $P(X<Y) \geq ½$ vs $H_1$: $P(X<Y) < ½$

Uji Mann-Whitney merupakan uji yang tak bias dan konsisten untuk menguji hipotesis diatas yang mencakup $P(X<Y)$, bila asumsi tambahan berikut dipenuhi: Jika terdapat perbedaan diantara dua fungsi sebaran populasi, maka perbedaan tersebut berupa perbedaan parameter lokasi sebaran. Dengan demikian, jika $F(x)$ tidak identik dengan $G(x)$, maka $F(x)$ identik dengan $G(x+c)$, dimana $c$ merupakan konstanta.

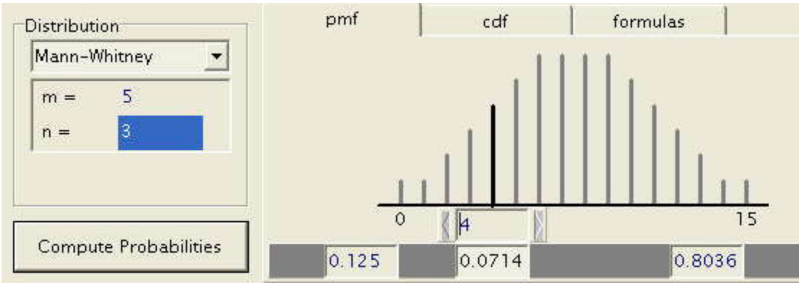
Bilamana $E(X)$ dan $E(Y)$ ada, maka hipotesis berikut juga dapat diuji
A. Pengujian dua arah $H_0$: $E(X) = E(Y)$ lawan $H_1$: $E(X) \neq E(Y)$
B. Pengujian satu arah $H_0$: $E(X) \geq E(Y)$ lawan $H_1$: $E(X) < E(Y)$
C. Pengujian satu arah $H_0$: $E(X) \leq E(Y)$ lawan $H_1$: $E(X) > E(Y)$

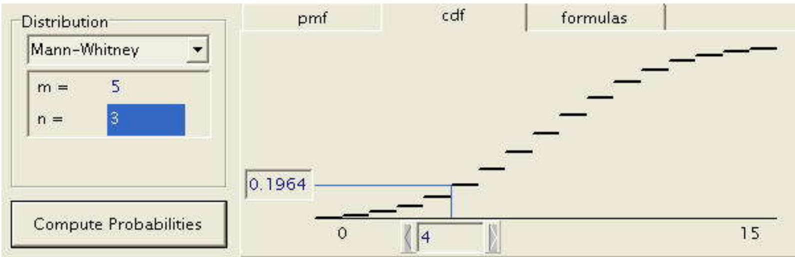
Misalkan $S = \sum_{i=1}^{n} R(X_i)$ yaitu jumlah peringkat peubah acak $X$, hitung $T = S - \frac{n(n+1)}{2}$. Nilai kuantil $w_p$ dari statistik $T$ ditabelkan untuk beberapa nilai $p$.
Biasanya nilai kuantil atas tidak ditabelkan, karena dapat dicari dengan menggunakan formula $w_{1-p} = nm - w_p$. Sebagai alternatif juga dapat digunakan statistik kuartil atas yaitu $T' = nm - T$.

Kriteria Penolakan Hipotesis Nol dan gunakan tabel pembanding statistik uji Mann-Whitney pada halaman 141.

A. Pengujian dua arah. Tolak hipotesis nol pada taraf nyata $\alpha$ jika $T$ lebih kecil dari $w_{\alpha/2}$ atau lebih besar dari $w_{1-\alpha/2}$. Bila tidak, terima hipotesis nol.
B. Pengujian satu arah. Tolak hipotesis nol pada taraf nyata $\alpha$ jika $T$ lebih kecil dari $w_{\alpha}$. Bila tidak, terima hipotesis nol.
C. Pengujian satu arah. Tolak hipotesis nol pada taraf nyata $\alpha$ jika $T$ lebih besar dari $w_{1-\alpha}$. Bila tidak, terima hipotesis nol.

Berikut adalah teladan gambar fungsi kepekatan peluang Mann-Whitney jika $m = 5$ dan $n = 3$ yang diikuti gambar fungsi sebaran kumulatifnya.




## Teladan 17.

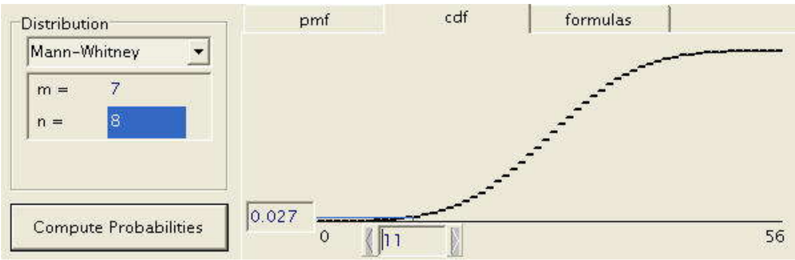
Sebuah penelitian dilakukan untuk mengetahui perbedaan besarnya kompensasi pekerja layanan di bidang kesehatan dan pendidikan per jam. Gunakan uji Mann-Whitney untuk melihat apakah kedua populasi pekerja memperoleh besar kompensasi yang sama ? Gunakan taraf nyata pengujian 5%.

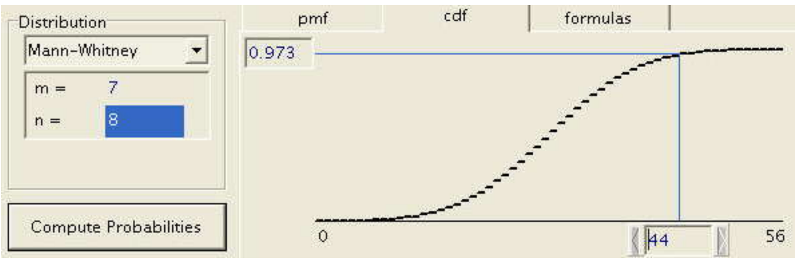
| Kesehatan (X) | Pendidikan (Y) |
|---|---|
| 20,10 | 26,19 |
| 19,80 | 23,88 |
| 22,36 | 25,50 |
| 18,75 | 21,64 |
| 21,90 | 24,85 |
| 22,96 | 25,30 |
| 20,75 | 24,12 |
| | 23,45 |

Melalui proses pemeringkatan, data tersebut diubah menjadi dalam bentuk peringkat

| Kesehatan (X) | Pendidikan (Y) |
|---|---|
| 3 | 15 |
| 2 | 10 |
| 7 | 14 |
| 1 | 5 |
| 6 | 12 |
| 8 | 13 |
| 4 | 11 |
| | 9 |

Sehingga diperoleh nilai $S = 3+2+...+4 = 31$ dan $T = 31-(15)(16)/2 = -89$
Dengan menggunakan tabel Mann-Whitney, kita peroleh Tolak hipotesis nol jika $T < 11$ atau $T > 44$. Karena nilai $T = -89 < 11$, maka hipotesis nol ditolak, artinya terdapat perbedaan adanya kompensasi diantara 2 kelompok pekeja tersebut.




Dengan menggunakan gambar fungsi sebaran kumulatif Mann-Whitney tampak jelas bahwa daerah penolakan pengujian dua arah adalah $T < 11$ atau $T > 44$.

Kadangkala, lebih mudah kita menghitung $T$ secara langsung tanpa harus menghitung $S$ terlebih dahulu. Hal ini dapat dilakukan dengan memisalkan bahwa $T$ sama dengan banyaknya nilai $Y$ yang lebih kecil dari $X_i$. Secara matematik hal ini dapat dituliskan sebagai $T = \sum_{i=1}^{n} U_i$, dimana $U_i$ adalah banyaknya nilai $Y$ yang lebih kecil dari nilai $X$ terkecil ke-$i$ dalam contoh gabungan.

# Uji Siegel-Tukey

Melalui sedikit modifikasi, Uji Mann-Whitney juga dapat digunakan untuk pengujian $H_0$: $var(X) \le var(Y)$ vs $H_1$:$var(X) > var(Y)$. Modifikasi utamanya adalah pada pemberian peringkat dalam contoh gabungan: 1 diberikan untuk nilai terendah, 2 untuk contoh tertinggi, 3 untuk tertinggi berikutnya, 4 terendah berikutnya, dan seterusnya, sehingga contoh gabungan tertata memiliki peringkat seperti berikut:

1, 4, 5, 8, 9, ..., (n+m), ..., 7, 6, 3, 2

Proses selanjutnya sama dengan uji Mann-Whitney. Tolak hipotesis nol apabila $T$ terlalu kecil dan dapat digunakan tabel Mann-Whitney pada halaman 141.

Secara umum statistik-statistik diatas merupakan fungsi dari peringkat. Jika $R(X_i)$ dapat dituliskan sebagai $R_i$, maka statistik peringkat linier memiliki bentuk umum $\sum_i a(R_i)$

Kuantitas $a(R_i)$ disebut skor. Sebagai bentuk khusus, selain skor Siegel-Tukey, kita kenal beberapa jenis skor:

1. skor Wilcoxon. $a(R_i) = R_i$
2. skor Median $a(R_i) = \begin{cases} 1 & , \quad R_i > \dfrac{n+1}{2} \\ 0 & , \quad R_i \le \dfrac{n+1}{2} \end{cases}$
3. skor van der Waerden $a(R_i) = \Phi^{-1}\left(\dfrac{R_i}{n+1}\right)$
4. skor Savage $a(R_i) = \sum_{j=1}^{R_i} \dfrac{1}{n-j+1} - 1$
5. skor Klotz $a(R_i) = \left(\Phi^{-1}\left(\dfrac{R_i}{n+1}\right)\right)^2$

6. skor Mood $a(R_i) = \left( R_i - \frac{n+1}{2} \right)^2$

7. skor Ansari-Bradley $a(R_i) = \frac{n+1}{2} - \left| R_i - \frac{n+1}{2} \right|$

# Korelasi Spearman-ρ

Bentuk data dapat berupa contoh acak berukuran *n* dari peubah acak bivariat, $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ..., (X_n, Y_n)$. Misalkan $R(X_j)$ merupakan peringkat $X_j$ atau nilai tbila dibandingkan nilai *X* lainnya dalam contoh tersebut.rkecil ke-*j*.

Bisa saja data dapat berbentuk nonnumerik (bukan angka) sebanyak *n* pasang, dan observasi tersebut sedemikian rupa dapat diperingkatkan dengan cara seperti yang telah disebutkan diatas. Perankingan dapat berdasarkan kualitas nilai amatan dari yang ”terbaik” ke yang ”terjelek” atau sebaliknya.

Bila seandainya ada nilai kembar, maka nilai peringkat atau rank yang dipakai adalah rata-rata peringkat dari nilai pengamatan kembar tersebut, sebagaimana juga dipakai dalam pengujian Wilcoxon dan Mann-Whitney.

Jika seandainya tak ada data kembar, maka data terkecil akan mendapatkan peringkat 1, terkecil berikutnya 2, hingga yang terbesar adalah *n*. Oleh karena itu, jika seandainya data tersebut digantikan dengan peringkatnya, maka akan diperoleh, baik untuk peubah *X* maupun *Y*, rata-rata peringkat seperti berikut:

$$\overline{R(X)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} R(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Dengan demikian, selanjutnya dapat ditunjukkan bahwa

$$\sum_{i=1}^{n} \left[ R(X_i) - \overline{R(X)} \right]^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[ i - \frac{n+1}{2} \right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[ i^2 - i(n+1) + \left( \frac{n+1}{2} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)^2}{2} + \frac{n(n+1)^2}{4} = \frac{n(n^2-1)}{12}$$

Dengan mengadopsi korelasi Pearson, besarnya ukuran korelasi Spearman (1904) bilamana tak ada data kembar, dapat dituliskan sebagai

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[R(X_i) - \frac{n+1}{2}\right]\left[R(Y_i) - \frac{n+1}{2}\right]}{n(n^2 - 1)/12}$$

Sebagai alternatif dari rumus diatas, khususnya untuk memudahkan komputasi adalah

$$\rho = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n}\left[R(X_i) - R(Y_i)\right]^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6T}{n(n^2 - 1)}$$

dimana T adalah keseluruhan jumlah pada bagian pembilang, yang tidak lain adalah jumlah dari kuadrat perbedaan peringkat data berpasangan.

**Teladan 18**

Dua belas pasang anak kembar diberikan tes psikologi untuk menentukan apakah anak yang lahir pertama lebih agresif daripada anak yang lahir kedua. Data dan perhitungan rank atau peringkat serta koeffisien korelasi Spearmannya dapat disajikan seperti di bawah ini.

| X | Y | R(X) | R(Y) | $(R(X)-R(Y))^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 86 | 88 | 7 | 10 | 9.00 |
| 71 | 77 | 3.5 | 6 | 6.25 |
| 87 | 86 | 8.5 | 9 | 0.25 |
| 68 | 64 | 1 | 1 | 0.00 |
| 91 | 96 | 11.5 | 12 | 0.25 |
| 72 | 72 | 5 | 4.5 | 0.25 |
| 77 | 65 | 6 | 2.5 | 12.25 |
| 91 | 90 | 11.5 | 11 | 0.25 |
| 70 | 65 | 2 | 2.5 | 0.25 |
| 71 | 80 | 3.5 | 7 | 12.25 |
| 88 | 81 | 10 | 8 | 4.00 |
| 87 | 72 | 8.5 | 4.5 | 16.00 |
| | | | Total | **61.00** |

Korelasi Spearman $\rho$ = $1 - 6(61)/(12(12^2-1)) = 0.7867$

Koeffisien korelasi Spearman diatas juga sering digunakan sebagai statistik uji untuk menguji kebebasan (independensi) antara dua peubah acak. Sebenarnya, korelasi Spearman $\rho$ tidak sensitif terhadap beberapa tipe dependensi, sehingga lebih baik dikhususkan untuk beberapa tipe dependensi apa yang mungkin dideteksi. Sehingga bentuk pengujiannya memiliki bentuk seperti di bawah ini.

**A. Pengujian dua-arah**
$H_0$: Peubah $X_j$ dan $Y_j$ saling bebas.
$H_1$: Ada kecenderungan nilai *X* yang besar berpasangan dengan nilai *Y* yang besar, atau ada kecenderungan nilai *X* yang kecil berpasangan dengan nilai *Y* yang besar.

**B. Pengujian satu arah untuk korelasi positif**
$H_0$: Peubah $X_j$ dan $Y_j$ saling bebas.
$H_1$: Ada kecenderungan nilai *X* dan Y yang besar berpasangan

**C. Pengujian satu arah untuk korelasi negatif**
$H_0$: Peubah $X_j$ dan $Y_j$ saling bebas.
$H_1$: Ada kecenderungan nilai *X* yang kecil berpasangan dengan nilai *Y* yang besar.

Hipotesis alternatif pada ketiga bentuk pengujian diatas mengindikasikan adanya korelasi antara peubah *X* dan *Y*. Sehingga pernyataan pada hipotesis nol tersebut lebih tepat bila diganti dengan pernyataan bahwa tak ada korelasi antara kedua peubah *X* dan *Y*.

Selain menggunakan Spearman-ρ, biasanya lebih nyaman apabila digunakan statistik $T = \sum_{i=1}^{n} \left[ R(X_i) - R(Y_i) \right]^2$ yang juga dapat menghindari beberapa aritmatik dalam perhitungan korelasi Spearman. Uji dengan statistik T ini dikenal dengan nama uji Hotelling-Pabst (1936). Nilai kuantil dari statistik T disajikan pada halaman 145.

**Teladan 19**

Dengan menggunakan data sebelumnya pada kasus anak kembar, misalkan ingin dilakukan pengujian dengan taraf nyata pengujian 0,05

$H_0$: Ukuran keagresivan anak kembar saling bebas.
$H_1$: Ada korelasi positif atau negatif pada ukuran keagresivan pasangan anak kembar.

Dengan menggunakan tabel Hotelling-Pabst $\alpha/2 = 0{,}025$ dan n = 12 diperoleh $w_{0,025} = 120$. Karena nilai $T = 61$ lebih kecil dari 120, maka hipotesis nol ditolak. Hipotesis nol juga ditolak apabila nilai *T* melebihi $w_{0,975}$. Nilai $w_{0,975}$ = n(n2-1)/3-$w_{0,025}$ = 12(143)/3 – 120 = 452.

Namun apabila ρ sudah dihitung, maka dapat juga dignakan tabel statistik Spearman. Pada teladan 1 diperoleh nilai $\alpha = 0{,}7867$ yang melebihi $w_{0,975} = 0{,}5804$. Hal ini berarti hipotesis nol ditolak.

# Korelasi Kendall-τ

Bentuk data dapat berupa contoh acak berukuran $n$ dari peubah acak bivariat, $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$. Dua nilai berpasangan disebut **korkodan** jika nilai kedua anggota dari satu pengamatan lebih besar daripada nilai anggota pasangan pengamatan lawannya. Misalkan $(X_i, Y_i)$ dengan $(X_j, Y_j)$ disebut konkordan jika $X_i>X_j$ dan $Y_i>Y_j$ atau sebaliknya $X_i<X_j$ dan $Yi<Yj$. Dua nilai berpasangan disebut **diskordan** jika salah satu anggota dari satu pengamatan lebih besar dari pengamatan lawannya dan satu anggota lainnya lebih kecil dari anggota pasangan lawannya. Secara notasi $X_i<X_j$ dan $Y_i>Y_j$ atau sebaliknya $X_i>X_j$ dan $Y_i<Y_j$.

Bila digunakan notasi $N_k$ adalah banyaknya pasangan yang konkordan dari seluruh $C_2^n$ pasang pengamatan bivariat, dan $N_d$ adalah banyaknya pasangan yang diskordan dari $C_2^n$ pasanga pengamatan berpasangan. Pasangan dengan nilai kembar tidak dikatakan korkodan ataupun diskordan, dan dinotasikan dengan $N_0$. Dengan demikian $C_2^n = N_k + N_d + N_0$.

Data penamatan nonnumerik sebanyak $n$ pasang juga dapat dihitung dengan cara serupa.
Ukuran korelasi Kendall-τ (1938) dituliskan sebagai berikut:

$$\tau = \frac{N_k - N_d}{n(n - 1)/2}$$

Berdasarkan formula diatas, jika semua pasangan saling konkordan, nilai τ adalah 1, sedangkan apabila semua pasangan saling diskordan, maka nilai τ adalah -1.

Perhitungan koeffisien korelasi Kendall-τ ini akan lebih mudah apabila data bivariat disusun berurut dari terkecil hingga terbesar berdasarkan salah satu peubahnya, sehingga penghitungan banyaknya konkordan dan diskordan hanya dengan membandingkan peubah lainnya terhadap pasangan lainnya.

## Teladan 20.

Sebagai ilustrasi untuk menghitung koeffisien korelasi Kendall-τ kita masih gunakan data tes psikologi anak kembar. Hasil olahan dapat dilihat seperti berikut:

| X | Y | Konkordan | Diskordan | Sama |
|---|---|---|---|---|
| 68 | 64 | 11 | 0 | 0 |
| 70 | 65 | 9 | 0 | 1 |
| 71 | 77 | 5 | 3 | 1 |
| 71 | 80 | 5 | 3 | 0 |
| 72 | 72 | 5 | 1 | 1 |
| 77 | 65 | 6 | 0 | 0 |
| 86 | 88 | 2 | 3 | 0 |
| 87 | 86 | 2 | 1 | 1 |
| 87 | 72 | 3 | 0 | 0 |
| 88 | 81 | 2 | 0 | 0 |
| 91 | 96 | 0 | 0 | 1 |
| 91 | 90 | 0 | 0 | 0 |
| | | **50** | **11** | **5** |

Kendal Tau **0.5909**

Jadi, ada korelasi positif pada skor psikologi mengenai keagresifan anak kembar, sebagaimana ditunjukkan oleh nilai $\tau$ = 0,5909.

Kendall-$\tau$ dapat juga digunakan sebagai statistik uji terhadap hipotesis nol bahwa $X$ dan $Y$ saling bebas, baik satu ataupun dua arah sebagaimana dideskripsikan oleh Spearman $\rho$. Sebagai gantinya, nilai $T$ yang digunakan hanyalah selisih jumlah konkordan dan jumlah diskordannya.

**Teladan 21.**

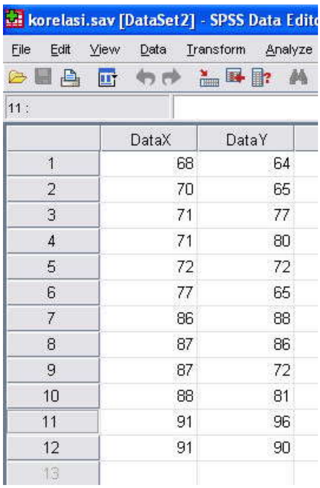
Nilai T dapat diperoleh dengan mudah, yaitu 50 – 11 = 39. Dari tabel kuantil Kendall pada halaman 168, untuk pengujian dua arah dengan taraf nyata pengujian 0,05 diperoleh $w_{0,975}$ = 28 dan $w_{0,025} = -w_{0,975}$ = -28. Ini berarti tolak hipotesis nol apabila T < -28 atau T > 28. Dengan demikian, karena T = 39 > 28, maka hipotesis nol yang menyatakan bahwa kedua anak kembar saling bebas ditolak. Atau dengan lain perkataan bahwa terdapat dependensi atau ketergantungan diantara mereka. Tingkat keagresifan mereka sejalan.

Sebaran pasti dari statistik Spearman-$\rho$ dan Kendall-$\tau$ secara prinsip mudah diperoleh, meskipun prakteknya prosedur ini amat rumit bahkan untuk ukuran $n$ yang moderat. Sebaran pasti diperoleh bilamana hipotesis nol benar atau $X_i$ dan $Y_i$ menyebar saling bebas identik. Karenanya setiap susunan dari $n!$ kemungkinan susunan berdasarkan peringkat memiliki kesempatan sama untuk terjadi. Fungsi sebaran diperoleh dengan menghitung banyaknya susunan yang menghasilkan nilai ρ atau τ tertentu dan membaginya dengan *n!* untuk memperoleh peluang nilai ρ atau τ.

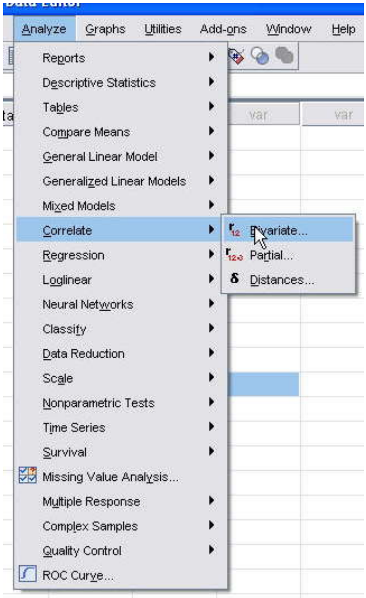
Bentuk Dalil Limit Pusat dipakai untuk memperoleh pendekatan sebaran bilamana ukuran contoh besar, karena kedua statistik Spearman-ρ dan Kendall-τ berdasarkan jumlah peubah acak. Kedua statistik tersebut merupakan sebaran yang siimetris disekitar nol, sehingga nilai tengahnya nol.

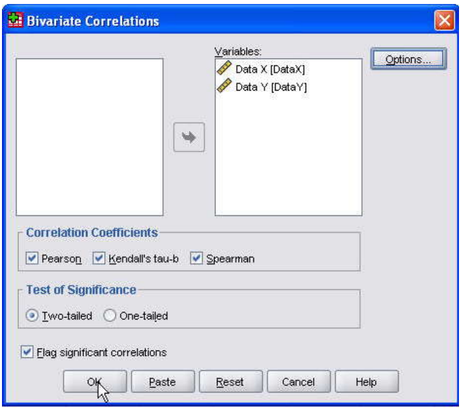
Berikut diberikan bagaimana menganalisis korelasi dari data yang digunakan dalam teladan secara manual perhitungan koeffisien korelasi peringkat Spearman dan korelasi Kendall. Juga sebagai ilustrasi diberikan koeffisien korelasi Pearson yang lebih dikenal dengan ***Pearson Product Moment Correlation*** yang formulanya adalah

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar{X})^2\right]\left[\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \bar{Y})^2\right]}}$$




| | DataX | DataY |
|---|---|---|
| 1 | 68 | 64 |
| 2 | 70 | 65 |
| 3 | 71 | 77 |
| 4 | 71 | 80 |
| 5 | 72 | 72 |
| 6 | 77 | 65 |
| 7 | 86 | 88 |
| 8 | 87 | 86 |
| 9 | 87 | 72 |
| 10 | 88 | 81 |
| 11 | 91 | 96 |
| 12 | 91 | 90 |
| 13 | | |


Analyze
Graphs
Utilities
Add-ons
Window
Help
Reports
Descriptive Statistics
Tables
Compare Means
General Linear Model
Generalized Linear Models
Mixed Models
Correlate
Regression
Loglinear
Neural Networks
Classify
Data Reduction
Scale
Nonparametric Tests
Time Series
Survival
Missing Value Analysis...
Multiple Response
Complex Samples
Quality Control
ROC Curve...
Bivariate...
Partial...
Distances...
var
var


Bivariate Correlations
Variables:
Data X [DataX]
Data Y [DataY]
Options...
Correlation Coefficients
Pearson
Kendall's tau-b
Spearman
Test of Significance
Two-tailed
One-tailed
Flag significant correlations
OK
Paste
Reset
Cancel
Help

**Correlations**

| | | Data X | Data Y |
|---|---|---|---|
| Data X | Pearson Correlation | 1 | .750** |
| | Sig. (2-tailed) | | .005 |
| | N | 12 | 12 |
| Data Y | Pearson Correlation | .750** | 1 |
| | Sig. (2-tailed) | .005 | |
| | N | 12 | 12 |

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

**Correlations**

| | | | Data X | Data Y |
|---|---|---|---|---|
| Kendall's tau_b | Data X | Correlation Coefficient | 1.000 | .614** |
| | | Sig. (2-tailed) | . | .007 |
| | | N | 12 | 12 |
| | Data Y | Correlation Coefficient | .614** | 1.000 |
| | | Sig. (2-tailed) | .007 | . |
| | | N | 12 | 12 |
| Spearman's rho | Data X | Correlation Coefficient | 1.000 | .785** |
| | | Sig. (2-tailed) | . | .002 |
| | | N | 12 | 12 |
| | Data Y | Correlation Coefficient | .785** | 1.000 |
| | | Sig. (2-tailed) | .002 | . |
| | | N | 12 | 12 |

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Terdapat sedikit perbedaan nilai perhitungan dalam koeffisien korelasi Kendall-$\tau$. SPSS menggunakan koeffisien korelasi Kendall-$\tau$-$b$. Namun ketiga koeffisien korelasi, termasuk Pearson signifikan pada taraf 1%, artinya koeffisien-koeffisien tersebut tidak dapat dikatakan sama dengan nol. Jadi kedua variabel atau peubah ($X$ dan $Y$) berhubungan sangat erat.

# Korelasi Bell-Doksum

Dari data bivariat $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ..., (X_n, Y_n)$, misalkan $R(X_i)$ dan $R(Y_i)$ masing-masing berturut-turut adalah peringkat seperti yang dideskripsikan dalam korelasi peringkat Spearman $\rho$. Setelah peringkat diberikan, ambil dua grup secara acak dari peubah acak normal baku, masing-masing berukuran $n$ boleh dari tabel atau dibangkitkan. Susun tiap grup dari nilai terkecil hingga nilai terbesar, dan misalkan $Z_1(i)$ merepresentasikan nilai terkecil ke-$i$ dari grup pertama, dan dengan cara yang sama $Z_2(i)$ merepresentasikan nilai terkecil ke-$i$ dari grup kedua.

Berikan $Z_1(i)$ pada paubah acak $X$ yang memiliki peringkat $i$, untuk tiap $i$ dari 1 hingga $n$. Dengan cara yang sama $Z_2(i)$ pada paubah acak $Y$ yang memiliki peringkat $i$, untuk tiap $i$ dari 1 hingga $n$.

Ukuran Korelasi Bell-Doksum

$$T_{BD} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_1[R(X_i)] \cdot Z_2[R(Y_i)]$$

Secara umum, nilai ini tidak dibatasi oleh -1 dan +1 tidak seperti ukuran korelasi lainnya. Namun demikian, jika *X* dan *Y* tidak berkorelasi, dan kasus dimana mereka saling bebas, maka nilai ini akan mendekati *0*. Apabila mereka secara sempurna berkorelasi, maka nilainya akan mendekati +1 atau -1 tergantung apakah korelasinya positif atau negatif.

**Teladan 22.**

Diberikan data hipotetis dimana dua kolom pertama merupakan data berpasangan atau data bivariat (kolom 1 dan kolom 2). Kolom 3 dan 4 merupakan peringkat data pada kolom 1 dan 2 berturut-turut. Kolom 5 dan 6 merupakan deviasi normal baku yang dibangkitkan dengan Microsoft Excel, dan kolom 7 dan 8 merupakan pemasangan nilai pada kolom 5 dan 6 sesuai dengan urutan pada kolom 3 dan 4.

| DataX | DataY | RankX | RankY | Xzscore | Yzscore | ZRX | ZRY |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.5 | 17 | 6 | 7 | -0.3202 | -0.3605 | 0.2407 | 1.1109 |
| 1.7 | 11 | 2 | 2 | 0.3626 | -0.7437 | -0.6696 | -0.7619 |
| 2.2 | 13 | 5 | 4 | -0.6696 | -2.3348 | 0.2305 | -0.7301 |
| 1.6 | 10 | 1 | 1 | -1.5035 | -0.7301 | -1.5035 | -2.3348 |
| 3.4 | 20 | 9 | 8 | 0.2407 | -0.4024 | 2.2231 | 1.3306 |
| 2.8 | 21 | 7 | 9 | 0.2305 | -0.7619 | 0.2928 | 2.6029 |
| 2.9 | 16 | 8 | 6 | -0.3271 | 1.3306 | 0.3626 | -0.3605 |
| 1.9 | 14 | 3 | 5 | 2.2231 | 1.1109 | -0.3271 | -0.4024 |
| 2.0 | 12 | 4 | 3 | 0.2928 | 2.6029 | -0.3202 | -0.7437 |

Koeffisien korelasi Bell-Doksumnya dengan demikian dapat dihitung = 0.8977.

# Uji Kruskal-Wallis

Sebagai pengembangan uji Mann-Whtitney untuk dua contoh yang saling bebas, Kruskal-Wallis (1952) memperkenalkan statistik untuk menguji k-contoh yang saling bebas. Data terdiri dari k contoh acak yang ukurannya tidak harus sama. Dengan memberikan notasi bahwa contoh dari populasi ke-*i* yang berukuran $n_i$ dengan $X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{in_i}$ . Bila data tersebut dapat disusun menurut kolom, maka dapat disajikan seperti berikut

| Contoh 1 | Contoh 2 | ... | Contoh k |
|---|---|---|---|
| $X_{1,1}$ | $X_{2,1}$ | ... | $X_{k,1}$ |
| $X_{1,2}$ | $X_{2,2}$ | ... | $X_{k,2}$ |
| ... | ... | ... | ... |
| $X_{1,n_1}$ | $X_{2,n_2}$ | ... | $X_{k,n_k}$ |

Misalkan *N* adalah total seluruh pengamatan. Dengan demikian $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$. Berikan peringkat 1 untuk observasi terkecil diantara *N* observasi yang ada, 2 untuk observasi terkecil kedua dari seluruh observasi yang ada, dan seterusnya hingga peingkat terbesar dengan nilai *N*. Misalkan $R(X_{ij})$ merupakan peringkat dari $X_{ij}$. Misalkan juga $R_i = \sum_{j=1}^{n_i} R(X_{ij}) \quad i = 1, 2, ..., k$. Untuk tiap contoh dihitung nilai $R_i$. Bila terdapat nilai kembar, berikan rata-rata peringkat nilai kembar tersebut.

Asumsi-asumsi dalam Uji Kruskal-Wallis

1. Semua contoh merupakan contoh acak dari populasinya.
2. Sebagai tambahan dari independensi dalam tiap contioh, juga ada independensi antar contoh.
3. Semua peubah acak $X_{ij}$ kontinu. (Sejumlah nilai kembar masih diperbolehkan)
4. Skala pengukuran minimal adalah skala ordinal.
5. Fungsi sebaran *k*-populasi identik atau beberapa populasi cenderung memiliki nilai yang lebih besar dari populasi lainnya.

Hipotesis yang akan diuji terdiri dari

- $H_0$ : semua fungsi sebaran populasi identik.
- $H_1$ : sedikitnya satu populasi cenderung memiliki nilai yang lebih besar dari populasi lainnya.

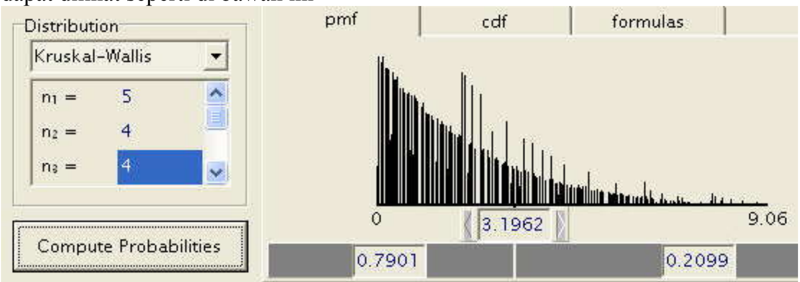
Uji Kruskal-Wallis ini juga dirancang sensitif terhadap perbedaan diantara rata-rata *k* populasinya, sehingga hipotsis alternatifnya sering ditulis dengan *k* populasi tidak memiliki rata-rata yang sama.
Statistik uji Kruskal-Wallis ini didefinisikan dengan

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{[R_i - (1/2)n_i(N+1)]^2}{n_i}$$

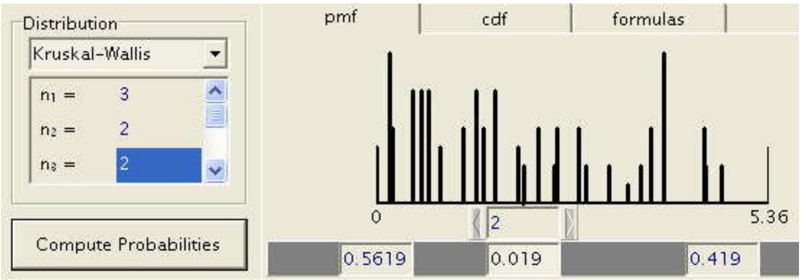
dimana $N$ dan $R_i$ seperti yang telah didefinisikan. Formula lain dari $H$ biasanya lebih mudah dalam perhitungan adalah

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1)$$

Fungsi kepekatan peluang Kruskal-Wallis untuk $n_1 = 5$, $n_2 = 4$, dan $n_3 = 4$ misalnya dapat dilihat seperti di bawah ini




Sedangkan untuk $n_1 = 3$, $n_2 = 2$, dan $n_3 = 2$ misalnya dapat dilihat seperti di bawah ini




Semakin kecil ukuran sampel atau contoh yang diambil semakin sederhana bentuknya, sebaliknya semakin rumit seperti diperlihatkan dari 2 fungsi kepekatan peluang diatas.

Aturan Pengambilan Keputusan

- Jika $k$ sama dengan 3 dan ketiga contoh memiliki ukuran 5 atau kurang, maka daerah kritis pasti berukuran $\alpha$ dapat diperoleh dari Tabel Kruskal-Wallis pada halaman 146. Tolak hipotesis nol jika nilai H lebih besar dari nilai yang sesuai dari tabel tersebut pada taraf nyata pengujian tertentu.
- Selain itu harus digunakan sebaran kai-kuadrat dengan derajat bebas *k-1*. Tolak hipotesis nol pada taraf nyata $\alpha$ jika nilai H lebih besar atau sama dengan $\chi^2_{k-1;\alpha}$.

Bila terdapat nilai kembar sebanyak *g* grup, sebanyak *tj* nilai kembar pada grup ke *j*, maka besarnya koreksi adalah

$$c = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{g}(t_i^3 - t_i)}{N^3 - N}$$

Kemudian baru dihitung ulang dengan adanya koreksi

$$H^* = \frac{\frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1)}{c}$$

## Teladan 23

Berikut adalah data umur lampu dari 3 merek dalam suatu percobaan. Uji apakah rata-rata umur 3 merek lampu sama ? Gunakan taraf nyata pengujian 5%.

| A | B | C |
|---|---|---|
| 73 | 84 | 82 |
| 64 | 80 | 79 |
| 67 | 81 | 71 |
| 62 | 77 | 75 |
| 70 | | |

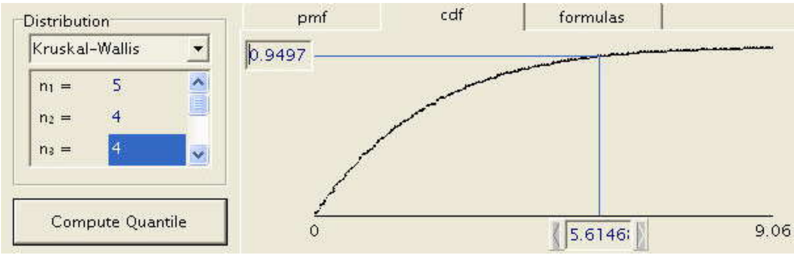
Untuk menyelesaikan analisis ini perlu data diatas dirubah menjadi peringkatnya terlebih dahulu menjadi

| A | B | C |
|---|---|---|
| 6 | 13 | 12 |
| 2 | 10 | 9 |
| 3 | 11 | 5 |
| 1 | 8 | 7 |
| 4 | | |

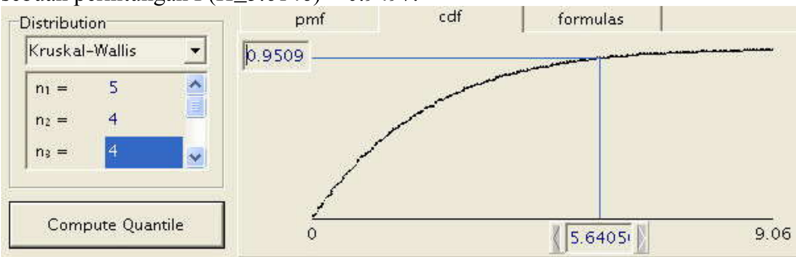
Sehingga nilai

$$H = \frac{12}{13(13+1)}\left[\frac{16^2}{5} + \frac{42^2}{4} + \frac{33^2}{4}\right] - 3(13+1) = 8.403$$

Titik kritis dari tabel Kruskal-Wallis $H_{5;4;4;0.050} = 5.6176$ Karena $H_{hitung} > H_{tabel}$ maka hipotesis nol ditolak. Artinya ketiga merek lampu memiliki rata-rata peringkat yang tak sama.




Kita ketahui bahwa statistik H karena berdasarkan peringkat, maka peubah acaknya tergolong diskrit, sehingga fungsi sebarannya yang tidak mulus, tetapi merupakan fungsi tak turun tersebut dapat digambarkan seperti diatas. Terlihat bahwa melalui sebuah perhitungan $P(H \leq 5.6146) = 0.9497$.




Dengan argumentasi yang sama kita peroleh $P(H \leq 5.6405) = 0.9509$.

## Teladan 24

Suatu penelitian dilakukan untuk mengetahui adanya perbedaan prestasi kerja pekerja yang rumahnya jauh atau dekat dengan kantor. Misalkan jarak rumah dikategorikan menjadi 3 yaitu: **I** (*untuk jarak s.d 5 km*), **II** (*>5 s.d 10 km*) dan **III** (*>10 km*). Penelitian dilakukan pada tiga kelompok pekerja berdasarkan jarak rumah dari kantornya dan sampel diambil secara acak. Data pengamatan ada pada tabel di bawah ini. Gunakan taraf nyata pengujian 5%.

Prestasi Kerja

| I | II | III |
|---|---|---|
| 78 | 82 | 69 |
| 92 | 89 | 79 |
| 68 | 71 | 65 |
| 56 | 57 | 60 |
| 77 | 62 | 72 |
| 82 | 75 | 74 |
| 81 | 64 | 83 |
| 62 | 77 | 56 |
| 91 | 84 | 59 |
| 53 | 56 | 90 |
| 85 | 88 | |
| | 69 | |

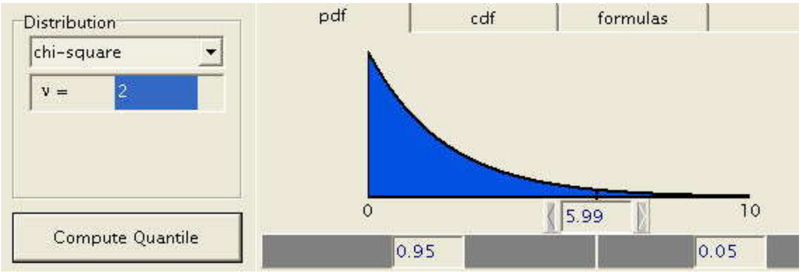
Dengan menggunakan peringkat, data diatas harus diubah terlebih dahulu menjadi 1 untuk data terkecil yaitu 53, dan seterusnya hingga data terbesarnya 91 menjadi 33, yang secara keseluruhan dapat ditabelkan seperti berikut. Data yang sama dirubah menjadi rata-rata peringkatnya.

| I | II | III |
|---|---|---|
| 21.0 | 24.5 | 13.5 |
| 33.0 | 30.0 | 22.0 |
| 12.0 | 15.0 | 11.0 |
| 3.0 | 5.0 | 7.0 |
| 19.5 | 8.5 | 16.0 |
| 24.5 | 18.0 | 17.0 |
| 23.0 | 10.0 | 26.0 |
| 8.5 | 19.5 | 3.0 |
| 32.0 | 27.0 | 6.0 |
| 1.0 | 3.0 | 31.0 |
| 28.0 | 29.0 | |
| | 13.5 | |

Selanjutnya dihitung

$$H = \frac{12}{33(33+1)}\left[\frac{205.5^2}{11} + \frac{203^2}{12} + \frac{152.5^2}{10}\right] - 3(33+1) = 0.66$$

yang harus dibandingkan dengan titik kritisnya yaitu $\chi^2_{0.05;2} = 5.99$. Karena nilai $H_{hitung}$ = $0.66 < \chi^2_{0.05;2} = 5.99$ maka hipotesis nol tidak ditolak artinya tidak ada perbedaan prestasi kerja berdasarkan kategori atau pengelompokkan jarak rumah dari kantor.




Untuk verifikasi dapat dilihat bahwa $P(\chi^2_2 > 5.99) = 0.05$.

## Uji Jonckheere

Uji ini mirip seperti uji Kruskal-Wallis, yang membedakan adalah hipotesis alternatifnya yang berbentuk urutan atau tataan tentang parameter dari yang terkecil hingga yang terbesar yang telah dirancang sebelumnya. Dengan demikian penomoran atau pengkodean perlakuan hendaknya sudah dimulai sebelum percobaan dilakukan sesuai dengan hipotesis satunya (hipotesis tandingannya).

$$H_0 : \theta_1 = \theta_2 = ... = \theta_k$$

$$H_1 : \theta_1 \leq \theta_2 \leq ... \leq \theta_k$$

Uji Jonckheere ini memerlukan perhitungan berapa kali suatu amatan dalam grup atau contoh atau perlakuan ke $i$ didahului oleh amatan dalam grup atau contoh atau perlakuan ke $j$.

Terlebih dahulu perlu dihitung $U_{ij} = \sum_{k=1}^{n_i} \#\left(X_{ki}, j\right)$ dimana $\#(X_{ki},j)$ adalah berapa kali data $X_{ki}$ mendahului atau lebih kecil dari suatu data dalam grup atau contoh atau perlakuan ke $j$, untuk $i<j$. Statistik uji Jonckheere untuk menguji hipotesis diatas adalah

$$J = \sum_{i<j}^{k} U_{ij} = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} U_{ij}$$

Sebaran penarikan contoh dapat dilihat pada tabel statistik Jonckheere yang dapat dilihat pada lampiran halaman . Tolak hipotesis jika nilai *J* hitung lebih besar dari kuantil atas tabel statistik uji Jonckheere yang sesuai.

Jika ukuran contoh cukup besar, sebaran penarikan contoh statistik ini mendekati sebaran Normal dengan rata-rata dan varian (ragam) berturut-turut dapat dituliskan seperti berikut

$$\mu_J = \frac{N^2 - \sum_{j=1}^{k} n_j^2}{4}$$

$$\sigma_J^2 = \frac{1}{72}\left[N^2(2N+3) - \sum_{j=1}^{k} n_j^2(2n_j + 3)\right]$$

Sehingga $J^* = \dfrac{J - \mu_J}{\sigma_J}$ kira-kira mendekati sebaran normal baku atau normal dengan rata-rata nol dan varian satu. Catatan $n_j$ adalah banyaknya contoh pada grup atau contoh atau perlakuan ke *j*, dan *N* adalah total seluruh contoh yang dipakai dalam perhitungan.

## Teladan 25.

| var A | var B | var C | var D |
|---|---|---|---|
| 27.88 | 21.32 | 45.74 | 46.28 |
| 40.25 | 40.61 | 41.41 | 54.43 |
| 32.47 | 34.25 | 22.00 | 36.49 |
| 18.38 | 34.44 | 29.60 | 49.35 |
| 14.35 | 32.71 | 39.47 | 69.81 |
| 24.81 | 42.56 | 39.12 | 54.06 |
| 30.17 | 41.22 | 33.92 | |
| 21.41 | 22.24 | 43.72 | |
| 16.77 | 25.33 | | |
| 28.77 | | | |
| 22.57 | | | |
| 9.32 | | | |

Percobaan pada 4 varietas terhadap pertumbuhan tinggi tanaman setelah diberikan pupuk *X* selama periode waktu tertentu dapat disajikan seperti pada tabel di atas. Ujilah dengan taraf nyata 5% apakah rata-rata pertumbuhan yang dinotasikan dengan $\mu$ memiliki urutan $\mu_A \le \mu_B \le \mu_C \le \mu_D$.

Untuk itu perlu dilakukan tahapan-tahapan dalam mencari statistik J dengan membandingkan masing-masing anggota tiap varietas dengan anggota varietas lainnya. Karena ada 4 varietas, berarti ada 6 pembandingan yang hasilnya ditampilkan seperti berikut ini. Angka 1 berarti nilai yang ada pada varietas ke *j* lebih kecil daripada anggota varietas ke *k*, $j < k$. Sedangkan totalnya merupakan banyaknya atau berapa kali anggota pada varietas ke *j* tersebut lebih kecil dari seluruh anggota pada varietas ke *k*.

Pembandingan nilai varietas A dengan varietas B

| | 21.32 | 40.61 | 34.25 | 34.44 | 32.71 | 42.56 | 41.22 | 22.24 | 25.33 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 27.88 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | **6** |
| 40.25 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | **3** |
| 32.47 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | **6** |
| 18.38 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **9** |
| 14.35 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **9** |
| 24.81 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | **7** |
| 30.17 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | **6** |
| 21.41 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **8** |
| 16.77 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **9** |
| 28.77 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | **6** |
| 22.57 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | **7** |
| 9.32 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **9** |

Pembandingan nilai varietas A dengan varietas C

| | 45.74 | 41.41 | 22.00 | 29.60 | 39.47 | 39.12 | 33.92 | 43.72 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 27.88 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **7** |
| 40.25 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | **3** |
| 32.47 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | **6** |
| 18.38 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **8** |
| 14.35 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **8** |
| 24.81 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **7** |
| 30.17 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | **6** |
| 21.41 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **8** |
| 16.77 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **8** |
| 28.77 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **7** |
| 22.57 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **7** |
| 9.32 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **8** |

Pembandingan nilai varietas A dengan varietas D

| | 46.28 | 54.43 | 36.49 | 49.35 | 69.81 | 54.06 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 27.88 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **6** |
| 40.25 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | **5** |
| 32.47 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **6** |
| 18.38 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **6** |
| 14.35 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **6** |
| 24.81 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **6** |
| 30.17 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **6** |
| 21.41 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **6** |
| 16.77 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **6** |
| 28.77 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **6** |
| 22.57 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **6** |
| 9.32 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **6** |

Pembandingan nilai varietas B dengan varietas C

| | 45.74 | 41.41 | 22.00 | 29.60 | 39.47 | 39.12 | 33.92 | 43.72 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 21.32 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **8** |
| 40.61 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | **3** |
| 34.25 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | **5** |
| 34.44 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | **5** |
| 32.71 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | **6** |
| 42.56 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | **2** |
| 41.22 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | **3** |
| 22.24 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **7** |
| 25.33 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **7** |

Pembandingan nilai varietas B dengan varietas D

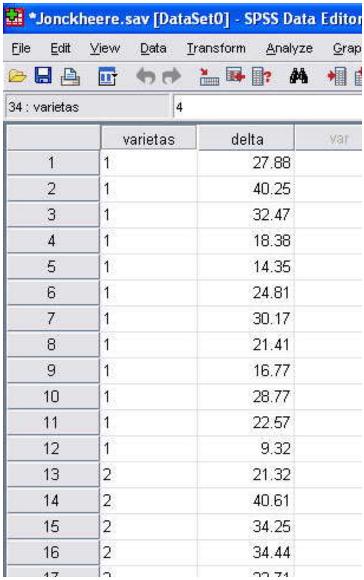
| | 46.28 | 54.43 | 36.49 | 49.35 | 69.81 | 54.06 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 21.32 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **6** |
| 40.61 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | **5** |
| 34.25 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **6** |
| 34.44 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **6** |
| 32.71 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **6** |
| 42.56 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | **5** |
| 41.22 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | **5** |
| 22.24 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **6** |
| 25.33 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **6** |

Pembandingan nilai varietas B dengan varietas D

| | 46.28 | 54.43 | 36.49 | 49.35 | 69.81 | 54.06 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 45.74 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | **5** |
| 41.41 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | **5** |
| 22.00 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **6** |
| 29.60 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **6** |
| 39.47 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | **5** |
| 39.12 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | **5** |
| 33.92 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **6** |
| 43.72 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | **5** |

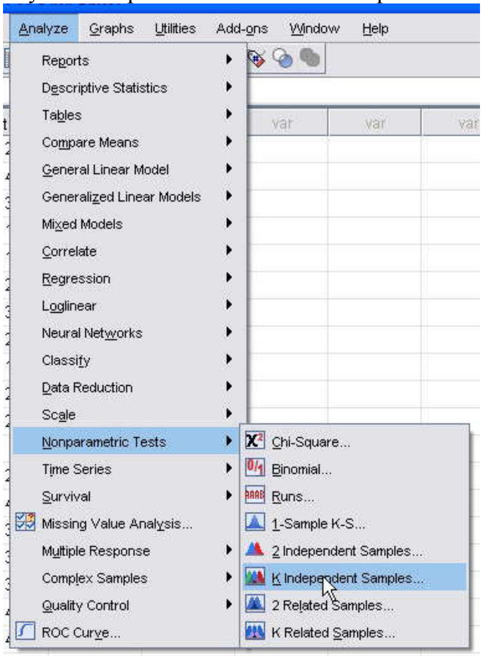
Nilai statistik J diperoleh dengan menjumlah semua total dari kolom paling kanan tiap tabel pembandingan. Nilai statistik J dalam hal ini diperoleh sebesar 379. Nilai rata-rata dan varian (ragam) statistik J juga dapat dihitung, semata-mata berdasarkan ukuran contoh tiap perlakuan atau varietas, yaitu berturut-turut sebesar 225 dan 1140. Melalui transformasi diperoleh nilai J* sebesar 4.561 yang tentunya akan menghasilkan nilai peluang << 0.001. Sehingga hipotesis nol ditolak, atau $\mu_A \leq \mu_B \leq \mu_C \leq \mu_D$.

Jika digunakan program SPSS maka tampilan masukan datanya dapat dilihat seperti berikut

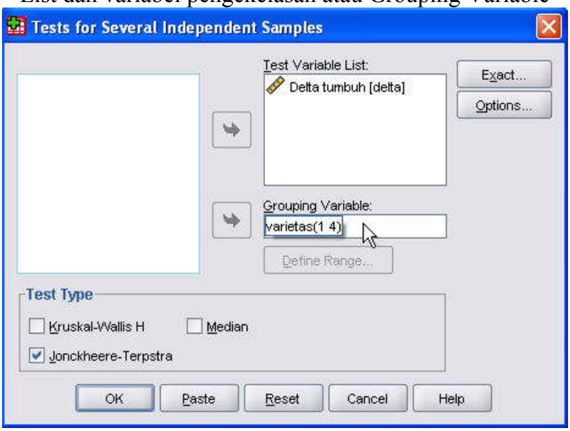



| | varietas | delta | var |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 27.88 | |
| 2 | 1 | 40.25 | |
| 3 | 1 | 32.47 | |
| 4 | 1 | 18.38 | |
| 5 | 1 | 14.35 | |
| 6 | 1 | 24.81 | |
| 7 | 1 | 30.17 | |
| 8 | 1 | 21.41 | |
| 9 | 1 | 16.77 | |
| 10 | 1 | 28.77 | |
| 11 | 1 | 22.57 | |
| 12 | 1 | 9.32 | |
| 13 | 2 | 21.32 | |
| 14 | 2 | 40.61 | |
| 15 | 2 | 34.25 | |
| 16 | 2 | 34.44 | |

Kemudian klik Analyze – Nonparametric Tests – K Independent Samples




Kemudian pilih Delta tumbuh [delta] ke daftar variabel yang diuji atau Test Variable List dan variabel pengekelasan atau Grouping Variable



Dan outputnya dapat disajikan seperti berikut:

**Jonckheere-Terpstra Test[a]**

| | Delta tumbuh |
|---|---|
| Number of Levels in Varietas | 4 |
| N | 35 |
| Observed J-T Statistic | 379.000 |
| Mean J-T Statistic | 225.000 |
| Std. Deviation of J-T Statistic | 33.764 |
| Std. J-T Statistic | 4.561 |
| Asymp. Sig. (2-tailed) | .000 |

a. Grouping Variable: Varietas

# Uji Friedman

Merupakan metode statistika yang sepadan dengan rancangan acak kelompok lengkap pada statistika parametrik, yaitu menguji kesamaan pengaruh perlakuan tetap dari beberapa (≥2) populasi. Data mencakup $b$ peubah acak $k$-variat saling bebas $(X_{i1}, X_{i2}, ..., X_{ik})$, yang juga disebut dengan $b$ blok, $i = 1, 2, ..., b$. Peubah acak $X_{ij}$ berada dalam blok ke-$i$ dan berkenaan dengan perlakuan ke-$j$. Lay-out data dapat disusun seperti dibawah ini.

| | | **Perlakuan** | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | ***1*** | ***2*** | **...** | ***k*** |
| | ***1*** | $X_{11}$ | $X_{12}$ | ... | $X_{1k}$ |
| | ***2*** | $X_{21}$ | $X_{22}$ | ... | $X_{2k}$ |
| **Blok** | ***3*** | $X_{31}$ | $X_{32}$ | ... | $X_{3k}$ |
| | **...** | ... | ... | ... | ... |
| | ***b*** | $X_{b1}$ | $X_{b2}$ | ... | $X_{bk}$ |

Misalkan $R(X_{ij})$ adalah peringkat atau rank, dari $1$ hingga $k$, diberikan untuk peubah $X_{ij}$ dalam blok atau baris ke-$i$. Hal ini berarti bahwa untuk blok ke-$i$ peubah acak $X_{i1}, X_{i2}, ..., X_{ik}$ dibandingkan satu sama lain. Nilai terkecil diberi tanda $1$, terkecil berikutnya $2$, dan seterusnya hingga terbesar adalah $k$. Perankingan tersebut dilakukan untuk keseluruhan $b$ blok atau baris.

Msalkan $R_i$ menotasikan jumlah peringkat (rank) pada perlakuan (kolom) ke-$j$. Secara notasi, dapat dituliskan $R_j = \sum_{i=1}^{b} R(X_{ij})$ untuk $j = 1, 2, ..., k$. Bila terjadi data kembar, gunakan rata-rata peringkat dari peringkat yang seharusnya untuk sekelompok data kembar tersebut.

Dalam statistik Friedman ini, ada beberapa asumsi yang perlu diperhatikan :

1. *b* peubah acak *k* variat ini saling bebas, artinya apapun hasil dalam suatu blok tidak akan mempengaruhi hasil dari blok lainnya.
2. Pengamatan dalam tiap blok disusun dalam urutan menaik (dilakukan perankingan menaik) sesuai dengan kriteria yang dipakai. Beberapa nilai kembar masih dapat diberikan toleransi.

Adapun hipotesis yang akan diuji adalah

$H_0$: tiap ranking peubah acak dalam suatu blok adalah sama (dengan perkataan lain, perlakuan memiliki pengaruh yang sama)

$H_1$: sedikitnya ada satu perlakuan yang cenderung meng-hasilkan nilai pengamatan yang lebih besar daripada sedikitnya satu perlakuan lainnya.

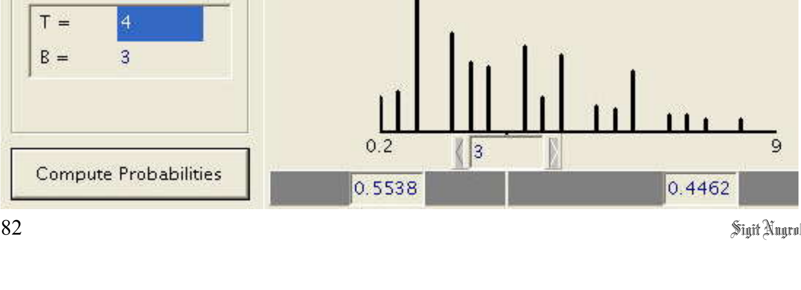
Untuk menguji hipotesis tersebut, digunakan statistik uji Friedman yang didefinisikan seperti berikut

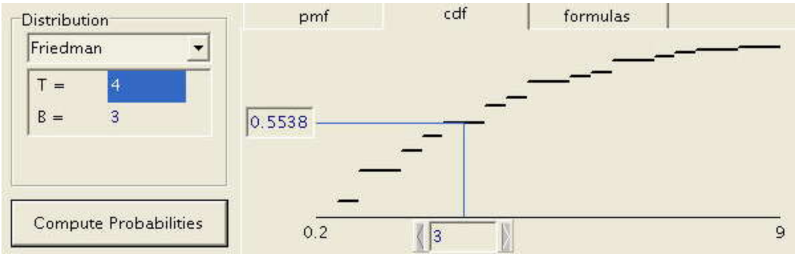
$$F_R = \frac{12}{bk(k+1)} \sum_{j=1}^{k} \left[ R_j - \frac{b(k+1)}{2} \right]^2$$

Alternatif rumus, untuk memudahkan perhitungan adalah

$$F_R = \frac{12}{bk(k+1)} \sum_{j=1}^{b} R_j^2 - 3b(k+1)$$

Kriteria penolakan hipotesis nol yang digunakan adalah : Tolak hipotesis nol pada taraf $\alpha$ jika statistik Friedman $F_R > \chi^2_{1-\alpha;\,k-1}$. Namun sebenarnya statistik Friedman ini hanya menggunakan pendekatan Kai-kuadrat, tetapi pendekatan tersebut cukup beralasan apabila ukuran sampel yang digunakan cukup besar. Sebaran pasti dari statistik Friedman ini dapat dilihat pada tabel Friedman. Lihat tabel lampiran pada halaman . Jadi dengan demikian, gunakan tabel pembanding statistik Friedman untuk jumlah perlakuan 3 dan 4 dan jumlah blok tertentu guna penentuan penolakan atau penerimaan hipotesis nol.






Bila terdapat nilai kembar, maka formula Friedman menjadi lebih rumit

$$F_R = \frac{12\sum_{j=1}^{k} R_j^2 - 3b^2k(k+1)^2}{bk(k+1) + \dfrac{\left(bk - \sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{g_i} t_{ij}^3\right)}{(k-1)}}$$

## Teladan 26.

Empat subyek penelitian mengikuti sebuah eksperimen untuk meneliti perbedan efektifitas tiga metode terapi stres, sebut saja A, B, dan C. Masing-masing subyek mengalami beban stres yang sama pada tiga kesempatan. Pada tiap kali kesempatan, subyek diberi sebuah metode terapi stres. Variabel respon yang diukur ialah jumlah penurunan tingkat stres sebelum dan sesudah diberi terapi. Hasilnya terlihat pada tabel dibawah ini. Gunakan taraf nyata pengujian 5%.

| Subyek | **A** | **B** | **C** |
|---|---|---|---|
| Abdul | 16 | 26 | 22 |
| Badu | 16 | 20 | 23 |
| Candra | 17 | 21 | 22 |
| Dude | 28 | 19 | 36 |

Pertama kali kita harus gantikan nilai amatan diatas dengan peringkatnya. Pemeringkatan dilakukan pada tiap subyek, karena tiap subyek dikenai ketiga metode terapi ini. Hasilnya adalah sebagai berikut

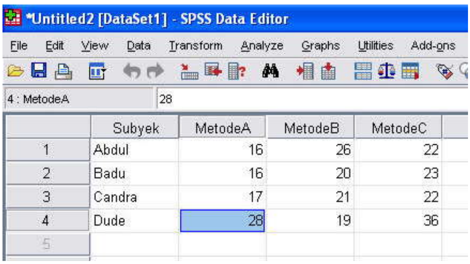
| Subyek | A | B | C |
|---|---|---|---|
| Abdul | 1 | 3 | 2 |
| Badu | 1 | 2 | 3 |
| Candra | 1 | 2 | 3 |
| Dude | 2 | 1 | 3 |
| $R_j$ | 5 | 8 | 11 |

Kemudian dihitung

$$F_R = \frac{12}{bk(k+1)} \sum_{j=1}^{k} \left[ R_j - \frac{b(k+1)}{2} \right]^2 = \frac{12}{(4)(3)(3+1)} (9+0+9) = 4.5$$

Tolak hipotesis nol jika nilai ini lebih besar dari $\chi^2_{0.95;2} = 5.99$. Karena nilai statistik ujinya lebih kecil dari 5.99 maka hipotesis nol diterima. Artinya, ketiga metode sama-sama efektif, sama-sama memiliki rata-rata peringkat yang sama secara statistik pada taraf nyata pengujian 5%.

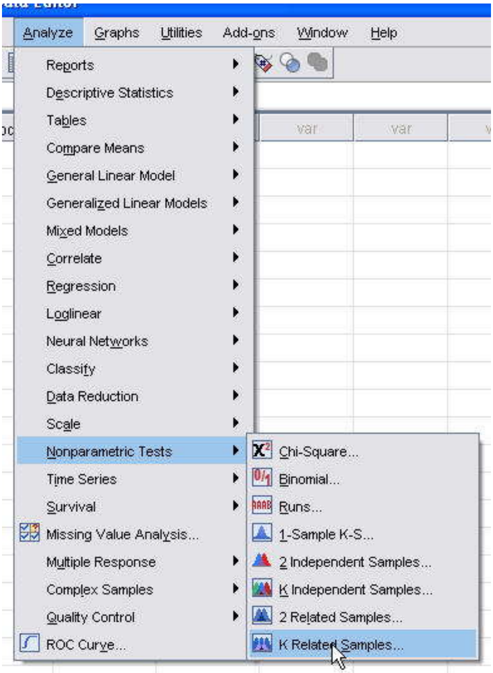
Perhatikan langkah-langkah apabila kita olah dengan SPSS

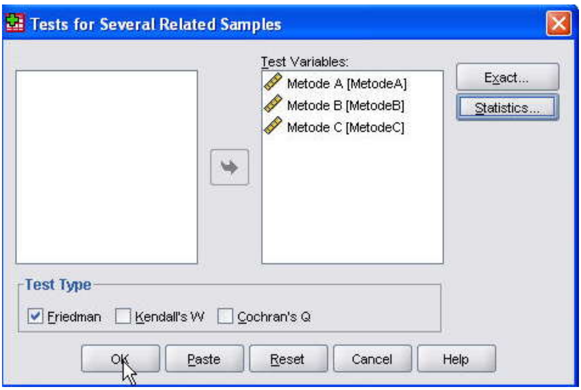

*Untitled2 [DataSet1] - SPSS Data Editor

File Edit View Data Transform Analyze Graphs Utilities Add-ons

4 : MetodeA 28

| | Subyek | MetodeA | MetodeB | MetodeC |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Abdul | 16 | 26 | 22 |
| 2 | Badu | 16 | 20 | 23 |
| 3 | Candra | 17 | 21 | 22 |
| 4 | Dude | 28 | 19 | 36 |
| 5 | | | | |


Analyze
Graphs
Utilities
Add-ons
Window
Help
Reports
Descriptive Statistics
Tables
Compare Means
General Linear Model
Generalized Linear Models
Mixed Models
Correlate
Regression
Loglinear
Neural Networks
Classify
Data Reduction
Scale
Nonparametric Tests
Time Series
Survival
Missing Value Analysis...
Multiple Response
Complex Samples
Quality Control
ROC Curve...
Chi-Square...
Binomial...
Runs...
1-Sample K-S...
2 Independent Samples...
K Independent Samples...
2 Related Samples...
K Related Samples...
var
var


Tests for Several Related Samples
Test Variables:
Metode A [MetodeA]
Metode B [MetodeB]
Metode C [MetodeC]
Exact...
Statistics...
Test Type
Friedman
Kendall's W
Cochran's Q
OK
Paste
Reset
Cancel
Help

**Friedman**

**Ranks**

| | Mean Rank |
|---|---|
| Metode A | 1.25 |
| Metode B | 2.00 |
| Metode C | 2.75 |

**Test Statistics[a]**

| | |
|---|---|
| N | 4 |
| Chi-Square | 4.500 |
| df | 2 |
| Asymp. Sig. | .105 |

a. Friedman Test

SPSS menggunakan pendekatan sebaran kai-kuadrat. Oleh karenanya nilai peluang diperoleh secara asimtotik. Disini *asymp.sig* nya 0.105 yang lebih besar daripada taraf nyata pengujian 0.05. Ini berarti bahwa hipotesis nol diterima. Perhatikan bahwa nilai statistik ujinya 4.5.

# Uji Durbin

Data disusun dalam rancangan acak kelompok tak lengkap seimbang, dengan notasi $t$ adalah banyaknya perlakuan yang akan diuji, $k$ banyaknya satuan percobaan dalam setiap blok, $b$ banyaknya blok yang diperlukan, $r$ banyaknya tiap perlakuan muncul, dan $\lambda$ banyaknya blok dimana perlakuan ke-$j$ dan perlakuan ke-$k$ muncul bersama. Misalkan $X_{ij}$ merepresentasikan hasil perlakuan ke-$j$ dalam blok ke-$i$.

Peringkat $X_{ij}$ dalam tiap blok dimulai dari 1 untuk nilai terendah dalam blok ke-$i$, peringkat 2 untuk terendah kedua dan seterusnya hingga $k$. Dan misalkan $R(X_{ij})$ merupakan peringkat $X_{ij}$ jika $X_{ij}$ ada.

Menghitung jumlah peringkat yang diperoleh $r$ nilai amatan perlakuan ke-$j$ dan kita notasikan dengan $R_j$

$$R_j = \sum_{i=1}^{b} R(X_{ij})$$

Dimana hanya $r$ nilai $R(X_{ij})$ ada untuk perlakuan ke-$j$, dan dengan demikian hanya sebanyak $r$ peringkat dijumlah untuk mendapatkan $R_j$.

Asumsi-asumsi dalam Uji Durbin:

1. Pengaruh blok saling bebas terhadap sesamanya.
2. Dalam tiap blok observasi dapat disusun dalam urutan menaik menurut kriteria keinginan (sejumlah nilai kembar dapat ditoleransi).

Hipotesis yang akan diuji

- **Hipotesis nol** : tiap peringkat peubah acak dalam tiap blok memiliki kesempatan yang sama terjadi.
- **Hipotesis alternatif**: sedikitnya satu perlakuan cenderung menghasilkan nilai amatan yang lebih besar daripada sedikitnya satu perlakuan lainnya.

**Statistik uji**

Statistik uji Durbin didefinisikan sebagai berikut:

$$T = \frac{12(t-1)}{rt(k-1)(k+1)} \sum_{j=1}^{t} \left[ R_j - \frac{r(k+1)}{2} \right]^2$$

atau dapat dituliskan sebagai

$$T = \frac{12(t-1)}{rt(k-1)(k+1)} \sum_{j=1}^{t} R_j^2 - 3\frac{r(t-1)(k+1)}{k-1}$$

**Kriteria Penolakan Hipotsis Nol**

Tolak hipotesis nol pada taraf nyata pendekatan $\alpha$ jika statistik uji Durbin $T$ melebihi $\chi^2_{t-1;1-\alpha}$ .

## Teladan 27.

Sebuah perusahaan roti ingin menguji sebuah produk roti barunya kepada konsumennya. Ada tujuh jenis rasa baru yang ingin diuji cobakan. Karena sesuatu dan lain hal, alasan waktu dan kejenuhan akan rasa, maka setiap responden hanya akan diminta melakukan penilaian dengan cara perankingan 3 jenis roti yang berbeda dan berbeda dengan responden lainnya. Cara penyusunan jenis roti dan responden disusun sedemikian rupa sehingga mengikuti aturan rancangan acak kelompok tak lengkap seimbang dengan $t = 7, k = 3, b = 7, r = 3,$ dan $\lambda = 1$. Hasil percobaan diperoleh seperti di bawah ini

| | | Jenis Roti | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Tester | 1 | | 1 | 2 | | 3 | | |
| | 2 | | | | 1 | 3 | | 2 |
| | 3 | | 2 | | | | 3 | 1 |
| | 4 | 2 | 1 | | 3 | | | |
| | 5 | | | 3 | 1 | | 2 | |
| | 6 | 2 | | | | 3 | 1 | |
| | 7 | 3 | | 2 | | | | 1 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **7** | **4** | **7** | **5** | **9** | **6** | **4** |

Hipotesis nol dari percobaan tersebut tentunya adalah semua jenis roti memiliki rata-rata peringkat yang sama; atau dengan perkataan lain bahwa semua jenis roti sama-sama disukai. Hipotesis tandingannya, secara umum mengatakan bahwa hipotesis nol tidak benar, atau ada roti yang cenderung lebih disukai atau cenderung kurang disukai.

Dengan demikian kita peroleh

$$T = \frac{(12)(6)}{(3)(7)(2)(4)}\left[(7-6)^2 + (4-6)^2 + \ldots + (4-6)^2\right] = 8.571 .$$

Sedangkan nilai kritis dari pengujian ini adalah $\chi^2_{6;0.05} = 12.59$. Karena nilai statistik T tidak lebih besar dari 12.59 maka hipotesis nol diterima, artinya dengan taraf nyata pengujian 5%, data tersebut masih menunjukkan bahwa semua roti memiliki rata-rata peringkat yang sama atau semua roti sama-sama disukai.

# Uji Bell-Doksum

## Uji Bell-Doksum untuk Beberapa Contoh Saling Bebas

Data terdiri dari $k$ contoh acak yang dapat berukuran tidak sama. Misalkan contoh acak peubah ke-$i$ yang berukuran $ni$ dinotasikan dengan $X_{i1}$, $X_{i2}$, ..., $X_{ini}$. Bila $N$ adalah total seluruh ukuran contoh. Berikan peringkat dari $1$ hingga $N$ seperti pada pemeringkatan prosedur Kruskal-Wallis. Misalkan $R(X_{ij})$ adalah peringkat $X_{ij}$. Ambil $N$ bilangan dari deviasi Normal Baku (dapat dengan cara membangkitkan). Berikan nilai terkecil ke-$r$ dari deviasi Normal Baku ini pada data $X_{ij}$ yang memiliki peringkat $r$ dalam data aslinya. Dengan demikian, $Z(r)$ merupakan deviasi Normal Baku acak terkecil ke-$r$, kemudian $Z[R(X_{ij})]$ digunakan untuk menggantikan $X_{ij}$.

Langkah berikutnya adalah menghitung nilai $Z$ untuk setiap $k$ contoh

$$Z_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} Z[R(X_{ij})] \qquad i = 1, 2, ..., k$$

dan kemudian

$$\overline{Z} = \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N} Z(r)$$

Asumsi yang diperlukan disini sama dengan asumsi pada uji Kruskal-Wallis dengan satu tambahan. Kita juga asumsikan bahwa grup $N$ deviasi Normal Baku merupakan contoh acak berukuran $N$ dari sebaran Normal Baku.

Hipotesis yang diuji adalah:

$H_0$: Semua $k$ fungsi sebaran populasinya identik.

$H_1$: Sedikitnya satu populasi cenderung menghasilkan nilai yang lebih besar dari sedikitnya satu populasi lainnya.

Seperti halnya pada uji Kruskal-Wallis, hipotesis alternatifnya kadang-kadang dapat dinyatakan sebagai

$H_1$: $k$ populasi tersebut tidak memiliki rata-rata yang sama.

Statistik uji:

$$T_2 = \sum_{i=1}^{k} n_i (Z_i - \overline{Z})^2$$

Aturan pengambilan keputusan:

Tolak hipotesis nol pada taraf $\alpha$ jika $T_2 > \chi^2_{1-\alpha;k-1}$ .

## Teladan 28.

Terdapat 4 metode untuk mengembangkan tanaman Jagung. Hasil pengamatan disajikan seperti tabel di bawah ini (Conover).

| Metode | | | |
|---|---|---|---|
| **1** | **2** | **3** | **4** |
| 83 | 91 | 101 | 78 |
| 91 | 90 | 100 | 82 |
| 94 | 81 | 91 | 81 |
| 89 | 83 | 93 | 77 |
| 89 | 84 | 96 | 79 |
| 96 | 83 | 95 | 81 |
| 91 | 88 | 94 | 80 |
| 92 | 91 | | 81 |
| 90 | 89 | | |
| | 84 | | |

Dengan taraf nyata pengujian 5%, uji apakah keempat Metode memiliki pengaruh yang sama ?

Pertama kali kita harus buat peringkat dari data diatas, seperti cara membuat peringkat dalam uji Kruskal-Wallis, sehingga diperoleh

| Peringkat | | | |
|---|---|---|---|
| **1** | **2** | **3** | **4** |
| 11 | 23 | 34 | 2 |
| 23 | 19.5 | 33 | 9 |
| 28.5 | 6.5 | 23 | 6.5 |
| 17 | 11 | 27 | 1 |
| 17 | 13.5 | 31.5 | 3 |
| 31.5 | 11 | 30 | 6.5 |
| 23 | 15 | 28.5 | 4 |
| 26 | 23 | | 6.5 |
| 19.5 | 17 | | |
| | 13.5 | | |

Kemudian bangkitkan dengan Microsoft Excel misalnya, nilai deviasi Normal Baku, kemudian ikuti prosedur Bell-Doksum sehingga peringkat diatas digantikan dengan nilai deviasi Normal Baku tersebut. Karena pembangkitan tersebut menghasilkan nilai yang acak, berikut **hanya** salah satu diantaranya dan setelah diolah kita dapatkan

| | Ganti Peringkat | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **1** | **2** | **3** | **4** |
| | -0.76 | 0.34 | 1.53 | -1.47 |
| | 0.34 | 0.11 | 1.43 | -0.99 |
| | 0.91 | -1.14 | 0.34 | -1.14 |
| | -0.07 | -0.76 | 0.61 | -1.96 |
| | -0.07 | -0.58 | 1.37 | -1.30 |
| | 1.37 | -0.76 | 1.26 | -1.14 |
| | 0.34 | -0.23 | 0.91 | -1.27 |
| | 0.47 | 0.34 | | -1.14 |
| | 0.11 | -0.07 | | |
| | | -0.58 | | |
| Total | 3.64 | -1.33 | 10.45 | -6.41 |
| $n_i$ | 9 | 10 | 7 | 8 |
| $Z_i$ | 0.40 | -0.13 | 1.49 | -0.80 |
| | 2.38 | 0.01 | 17.98 | 3.82 |

$$\bar{Z} = \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N} Z(r) = \frac{1}{34}(-0.76 + 0.34 + \ldots - 1.14) = -0.11$$

$$T_2 = \sum_{i=1}^{k} n_i (Z_i - \bar{Z})^2 = 9(0.40 - 0.11)^2 + 10(-0.13 - 0.11)^2 + 7(1.49 - 0.11)^2 + 8(-0.80 - 0.11)^2 = 24.19$$

Karena $T_2 = 24.19 > \chi^2_{0.95;3} = 7.815$ maka hipotesis nol ditolak, yang artinya terdapat perbedaan pengaruh Metode terhadap hasil pada taraf nyata pengujian 5%.

**Catatan**:
Nilai $T_2$ tidak unik, karena sangat tergantung dari deviasi Normal Baku yang anda peroleh dari pembangkitan data.

## Uji Bell-Doksum untuk Contoh Berkaitan

Data terdiri dari sebanyak $b$ kelompok atau blok $(X_{i1}, X_{i2}, ..., X_{ik})$, $i = 1, 2, ..., b$, dengan $k$ amatan atau observasi dalam tiap blok. Peringkat dari $1$ hingga $k$ diberikan untuk tiap amatan dalam tiap blok, seperti didiskripsikan dalam uji Friedman. Misalkan $R(X_{ij})$ adalah peringkat yang dapat bernilai dari $1$ atau $k$ untuk amatan $X_{ij}$ dalam blok $i$.

Selanjutnya bangkitkan sejumlah $b$ grup yang masing-masing terdiri dari $k$ bilangan dari deviasi Normal Baku. Misalkan $Z_i(r)$ merupakan bilangan terkecil ke-$r$ dalam grup deviasi Normal Baku ke-$i$, $i = 1, 2, ..., b$ dan $r = 1, 2, ..., k$. Berikan $Z_i(r)$ untuk data $X_{ij}$ dengan peringkat $r$ dalam blok $i$, untuk tiap $r$ dan $i$, dan nilai $Z$ dengan $Z_i[R(X_{ij})]$.

Untuk tiap kolom (perlakuan) hitung

$$Z_j = \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{b} Z_i[R(X_{ij})] \qquad j = 1, 2, ..., k$$

dan juga rata-rata keseluruhannya

$$\bar{Z} = \frac{1}{bk}\sum_{i=1}^{b}\sum_{r=1}^{k} Z_i(r)$$

Asumsi pengujian Bell-Doksum ini sama dengan asumsi pada uji Friedman ditambah dengan deviasi Normal Baku yang digunakan disini merupakan contoh acak dari sebaran Normal Baku.

Hipotesis yang diuji

$H_0$: tak ada pengaruh perlakuan.

$H_1$: sedikitnya ada sepasang perlakuan yang memiliki pengaruh berbeda.

Statistik uji:

$$T_3 = b\sum_{j=1}^{k}(Z_j - \bar{Z})^2$$

Aturan pengambilan keputusan:

Tolak hipotesis nol pada taraf $\alpha$ jika $T_3 > \chi^2_{1-\alpha;k-1}$.

## Teladan 29.

Sebuah perusahaan roti Glepoenk Bakery ingin menguji coba 4 jenis rasa pada roti santapan pagi. Dua belas orang sebagai *tester* diminta merasakan masing-masing roti ini kemudian diminta meranking sesuai dengan rasa kesukaannya (1 paling suka, 2 suka, 3 cukup suka, dan 4 kurang suka). Hasil uji organoleptik tersebut disajikan pada tabel berikut:

| Resp | Roti | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **1** | **2** | **3** | **4** |
| 1 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 4 | 2 | 3 | 1 |
| 3 | 3 | 1 | 2 | 4 |
| 4 | 1 | 3 | 2 | 4 |
| 5 | 4 | 2 | 1 | 3 |
| 6 | 3 | 1 | 2 | 4 |
| 7 | 1 | 3 | 2 | 4 |
| 8 | 2 | 4 | 1 | 3 |
| 9 | 3 | 1 | 2 | 4 |
| 10 | 1 | 4 | 3 | 2 |
| 11 | 4 | 2 | 3 | 1 |
| 12 | 3 | 1 | 2 | 4 |

Dengan menggunakan uji Bell-Doksum $T_3$ ini uji apakah keempat rasa roti memiliki rata-rata peringkat yang sama di mata konsumen ? Gunakan taraf nyata pengujian 5%.

Karena data sudah berupa skala ordinal, maka setelah kita bangkitkan nilai deviasi normal untuk tiap responden, kita ikuti prosedurnya sehingga kita peroleh penempatan nilai deviasi tersebut seperti di bawah ini

| Resp | NormDevRank | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **1** | **2** | **3** | **4** |
| 1 | 0.30 | 0.23 | -1.73 | -1.91 |
| 2 | 0.73 | -0.17 | 0.30 | -0.49 |
| 3 | 0.22 | -0.32 | -0.12 | 0.31 |
| 4 | -0.57 | -0.41 | -0.51 | 0.69 |
| 5 | 1.26 | 0.48 | 0.34 | 0.57 |
| 6 | -0.26 | -1.47 | -1.46 | 0.18 |
| 7 | -0.87 | 0.22 | -0.87 | 1.06 |
| 8 | 0.32 | 0.42 | -0.56 | 0.41 |
| 9 | 0.16 | -0.60 | -0.49 | 0.63 |
| 10 | -0.91 | 1.07 | 0.78 | -0.02 |
| 11 | 0.08 | -1.26 | -0.10 | -1.97 |
| 12 | 0.68 | 0.45 | 0.61 | 1.98 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | aver(Z) | -0.05 |
| Total | 1.14 | -1.36 | -3.81 | 1.44 |
| $Z_j$ | 0.095 | -0.113 | -0.318 | 0.120 |
| $(Z_j\text{-}aver(Z))^2$ | 0.0222 | 0.0035 | 0.0695 | 0.0303 |
| $T_3 =$ | **1.5052** | | | |
| Kai-kuadrat | **7.815** | | | |
| Keputusan | **Terima H0** | | | |

Terlihat bahwa

$$T_3 = b\sum_{j=1}^{k}(Z_j - \overline{Z})^2 = 12(0.0222 + 0.0035 + 0.0695 + 0.0303) = 1.5052$$

Karena nilai ini lebih kecil dari kai-kuadrat tabel (7.815) maka hipotesis nol diterima, yang artinya bahwa dengan taraf nyata pengujian 5% kita yakin bahwa keempat rasa roti tersebut memiliki rata-rata peringkat yang sama di mata konsumen, atau tak ada perbedaan peringkat tentang rasa roti tersebut.

# Statistik Tipe Kolomogorov-Smirnov

Suatu contoh acak $X_1, ..., X_n$ diambil dari suatu populasi, dan dibandingkan dengan $F^*(x)$ dengan tujuan untuk melihat apakah ada alasan yang cukup bahwa $F^*(x)$ merupakan fungsi sebaran dari contoh acak tersebut. Apabila $S(x)$ adalah fungsi sebaran empiris, yang didefinisikan sebagai frkasi dari peubah acak $X_i$ yang lebih kecil atau sama dengan $x$ untuk setiap $x$, $-\infty < x < +\infty$. Fungsi sebaran empiris ini merupakan penduga $F(x)$ yaitu penduga fungsi sebaran dari peubah acak $X_i$. Dengan demikian, idenya adalah membandingkan antara $S(x)$ dengan $F^*(x)$. Jika ada kesamaan, maka hipotesis nol diterima. Jika sebaliknya, hipotesis nol ditolak.

Statistik uji apakah yang dapat digunakan untuk mengukur perbedaan tersebut ? Salah satu ukuran sederhana yang dapat dibayangkan adalah selisih maksimum jarak secara vertikal apabila kedua fungsi tersebut digambarkan dalam satu absis. Statistik yang merupakan fungsi dari jarak vertikal dua sebaran dalam satu absis disebut dengan **Statistik tipe Kolmogorov-Smirnov**.

## Uji Kolmogorov

Data terdiri dari contoh acak berukuran $n$, $X_1, X_2, ..., X_n$ yang berkaitan dengan suatu fungsi sebaran yang tak diketaui, $F(x)$.

Asumsi-asumsi yang diperlukan:
1. Contoh merupakan contoh acak.
2. Jika fungsi sebaran yang dihipotesiskan, $F^*(x)$ dalam hipotesis nol, kontinu, maka ujinya pasti. Jika tidak ujinya konservatif.

Hipotesis. Misalkan $F^*(x)$ adalah suatu fungsi sebaran yang dihipotesiskan ditetapkan secara lengkap.

A. Uji dua arah. $H_0$: $F(x) = F^*(x)$ untuk semua $x$ dari $-\infty$ sampai $+\infty$ vs $H_1$: $F(x) \neq F^*(x)$ untuk sedikitnya satu nilai $x$.
B. Uji satu arah. $H_0$: $F(x) \geq F^*(x)$ untuk semua $x$ dari $-\infty$ sampai $+\infty$ vs $H_1$: $F(x) < F^*(x)$ untuk sedikitnya satu nilai $x$.
C. Uji satu arah. $H_0$: $F(x) \leq F^*(x)$ untuk semua $x$ dari $-\infty$ sampai $+\infty$ vs $H_1$: $F(x) > F^*(x)$ untuk sedikitnya satu nilai $x$.

Statistik uji. Misalkan $S(x)$ adalah fungsi sebaran empiris berdasarkan contoh acak $X_1, ..., X_n$. Statisik uji didefinisikan berbeda untuk ketiga tipe pengujian.

A. $T_1 = \sup_x \left| F^*(x) - S(x) \right|$

B. $T_1^{+} = \sup_x \left[F^*(x) - S(x)\right]$

C. $T_1^{-} = \sup_x \left[S(x) - F^*(x)\right]$

Aturan penolakan hipotesis nol:
Tolak hipotesis nol, jika statistik ujinya lebih besar dari nilai tabel statistik Kolmogorov pada taraf nyata pengujian $\alpha$. Tabel tersebut merupakan tabel pasti untuk pengujian dua arah dan apabila $n \leq 20$ [lihat tabel lampiran pada halaman 154] Untuk pengujian satu arah dan $n > 20$ tabel juga memberikan pendekatan nilai kuantil yang bagus dalam hampir kebanyakan kasus. Untuk $n > 40$ statistik pembanding berdasarkan sebaran asimtotik dan kurang akurat apabila $n$ semakin besar.

## Teladan 30.

Suatu contoh acak berukuran 10 diperoleh, dan hasilnya adalah seperti berikut: $X_1 = 0.382$, $X_2 = 0.554$, $X_3 = 0.480$, $X_4 = 0.329$, $X_5 = 0.581$, $X_6 = 0.710$, $X_7 = 0.477$, $X_8 = 0.203$, $X_9 = 0.503$, dan $X_{10} = 0.621$. Kita ingin uji apakah data tersebut berasal dari sebaran Seragam(0,1) ?

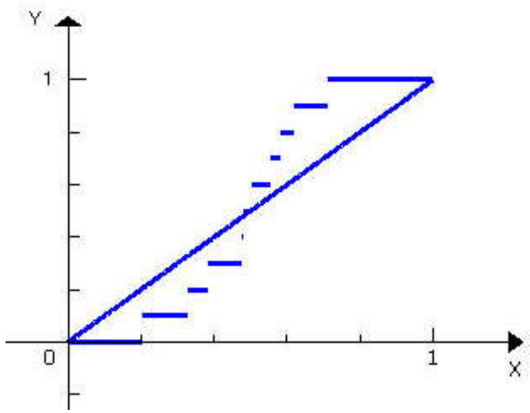
*S(x)* berbentuk seperi tangga yaitu

$$S(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0.203 \\ 1/10 & , \quad 0.203 \leq x < 0.329 \\ 2/10 & , \quad 0.329 \leq x < 0.382 \\ 3/10 & , \quad 0.382 \leq x < 0.477 \\ 4/10 & , \quad 0.477 \leq x < 0.480 \\ 5/10 & , \quad 0.480 \leq x < 0.503 \\ 6/10 & , \quad 0.503 \leq x < 0.554 \\ 7/10 & , \quad 0.554 \leq x < 0.581 \\ 8/10 & , \quad 0.581 \leq x < 0.621 \\ 9/10 & , \quad 0.621 \leq x < 0.710 \\ 1 & , \quad 0.710 \leq x \end{cases},$$

sedangkan

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ x & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & , \quad 1 \leq x \end{cases}$$

Grafik bersama antara *S(x)* dan *F*(x)* dapat disajikan seperti berikut.



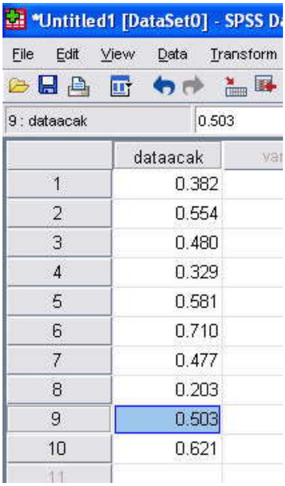

Dengan menggunakan uji dua arah, maka kriteria penolakannya adalah apabila nilai $T_1$ lebih besar dari 0.409 (tabel Kolmogorov dengan $\alpha = 0.05$ dan $n = 10$).

$$T_1 = \sup_x \left|F^*(x) - S(x)\right| = \left|F^*(0.710) - S(0.710)\right| = \left|0.710 - 1.000\right| = 0.290$$

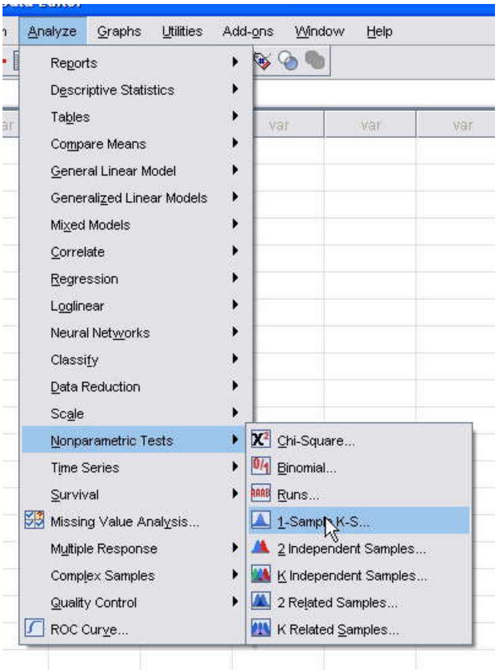
Karena nilai statistik uji ini < 0.409 maka hipotesis nol diterima, atau dengan kata lain bahwa contoh acak tersebut masih dapat dikatakan berasal dari sebaran Seragam(0,1).

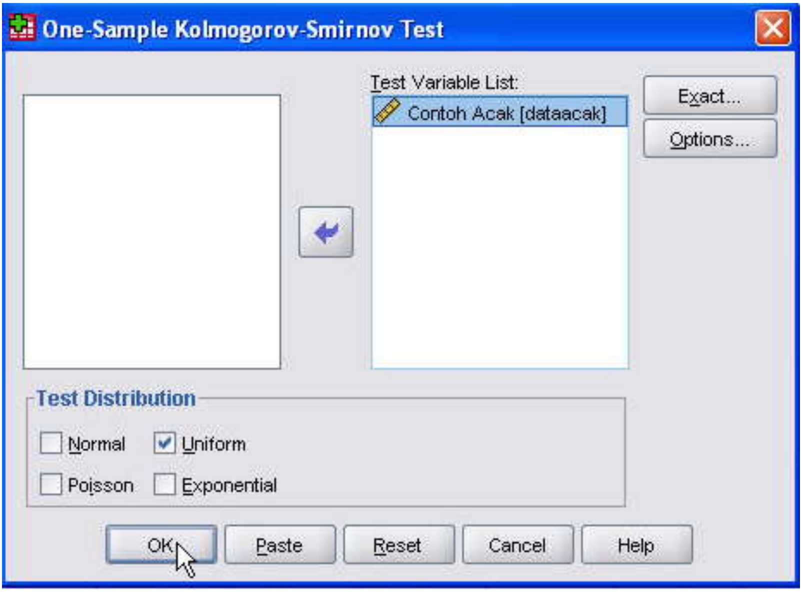
Terdapat sedikit perbedaan bila kita olah dengan menggunakan SPSS, meskipun hasil akhirnya sama yaitu menerima hipotesis nol, karena nilai *asymp.sig = 0.610 > 0.05*.

Statistik Tipe Kolmogorov-Smirnov




Proses analisisnya






Output SPSS 1-Sample Kolmogorov-Smirnov

**One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test**

| | | Contoh Acak |
|---|---|---|
| N | | 10 |
| Uniform Parameters[a] | Minimum | .203 |
| | Maximum | .710 |
| Most Extreme Differences | Absolute | .240 |
| | Positive | .100 |
| | Negative | -.240 |
| Kolmogorov-Smirnov Z | | .760 |
| Asymp. Sig. (2-tailed) | | .610 |

a. Test distribution is Uniform.

# Uji Lilliefors

Data berupa contoh acak berukuran *n*, $X_1, X_2, ..., X_n$ dari suatu fungsi sebaran yang tak diketahui, *F(x)*. Pertama kali hitung rata-rata dan simpangan baku contoh sebagai penduga bagi, berturut-turut, rata-rata populasi $\mu$ dan simpangan baku populasi $\sigma$.

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}$$

Kemudian hitung nilai contoh yang dinormalkan dengan

$$Z_i = \frac{X_i - \bar{X}}{s} \qquad i = 1, 2, ..., n$$

Nilai statistik uji dihitung dari nilai contoh yang telah dinormalkan, bukannya dari nilai contoh aslinya.

Asumsi utama dari uji ini adalah bahwa contoh merupakan contoh acak. Sedangkan hipotesis yang diuji berbunyi:
$H_0$: contoh acak memiliki sebaran Normal dengan rata-rata dan ragam atau varian yang tak diketahui.
$H_1$: fungsi sebaran contoh acak atau data bukan Normal.

Statistik uji Lilliefors:

$$T_2 = \sup_x \left| F^*(x) - S(x) \right|$$

Sedangkan kriteria penolakan hipotesis nolnya: Tolak hipotesis nol jika $T_2$ lebih besar dari nilai tabel Statistik Lilliefors dengan taraf nyata $\alpha$. Lihat tabel lampiran pada halaman 155.

## Teladan 31.

Diberikan data seperti dibawah ini, dan ingin diuji apakah data tersebut memiliki sebaran Normal.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 23 | 23 | 24 | 27 | 29 | 31 | 32 | 33 | 33 | 35 |
| 36 | 37 | 40 | 42 | 43 | 43 | 44 | 45 | 48 | 48 |
| 54 | 54 | 56 | 57 | 57 | 58 | 58 | 58 | 58 | 59 |
| 61 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 68 | 68 | 70 |
| 73 | 73 | 74 | 75 | 77 | 81 | 87 | 89 | 93 | 97 |

Langkah pertama adalah merubah nilai-nilai data diatas menjadi nilai yang dinormalkan. Hasilnya adalah seperti berikut:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -1.69 | -1.69 | -1.63 | -1.48 | -1.37 | -1.26 | -1.21 | -1.16 | -1.16 | -1.05 |
| -1.00 | -0.95 | -0.79 | -0.69 | -0.63 | -0.63 | -0.58 | -0.53 | -0.37 | -0.37 |
| -0.05 | -0.05 | 0.05 | 0.10 | 0.10 | 0.16 | 0.16 | 0.16 | 0.16 | 0.21 |
| 0.31 | 0.31 | 0.37 | 0.42 | 0.47 | 0.52 | 0.58 | 0.68 | 0.68 | 0.79 |
| 0.95 | 0.95 | 1.00 | 1.05 | 1.16 | 1.37 | 1.68 | 1.79 | 2.00 | 2.21 |

Untuk membuat sebaran empirisnya perlu dihitung kumulatif frekuensinya seperti berikut:

| | Data | Frek | KumFrek |
|---|---|---|---|
| 1 | -1.69 | 2 | 2 |
| 3 | -1.63 | 1 | 3 |
| 4 | -1.48 | 1 | 4 |
| 5 | -1.37 | 1 | 5 |
| 6 | -1.26 | 1 | 6 |
| 7 | -1.21 | 1 | 7 |
| 8 | -1.16 | 2 | 9 |
| 10 | -1.05 | 1 | 10 |
| 11 | -1.00 | 1 | 11 |
| 12 | -0.95 | 1 | 12 |
| 13 | -0.79 | 1 | 13 |
| 14 | -0.69 | 1 | 14 |
| 15 | -0.63 | 2 | 16 |
| 17 | -0.58 | 1 | 17 |
| 18 | -0.53 | 1 | 18 |
| 19 | -0.37 | 2 | 20 |
| 21 | -0.05 | 2 | 22 |
| 23 | 0.05 | 1 | 23 |
| 24 | 0.10 | 2 | 25 |
| 26 | 0.16 | 4 | 29 |
| 30 | 0.21 | 1 | 30 |
| 31 | 0.31 | 2 | 32 |
| 33 | 0.37 | 1 | 33 |
| 34 | 0.42 | 1 | 34 |
| 35 | 0.47 | 1 | 35 |
| 36 | 0.52 | 1 | 36 |
| 37 | 0.58 | 1 | 37 |
| 38 | 0.68 | 2 | 39 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 40 | 0.79 | 1 | 40 |
| 41 | 0.95 | 2 | 42 |
| 43 | 1.00 | 1 | 43 |
| 44 | 1.05 | 1 | 44 |
| 45 | 1.16 | 1 | 45 |
| 46 | 1.37 | 1 | 46 |
| 47 | 1.68 | 1 | 47 |
| 48 | 1.79 | 1 | 48 |
| 49 | 2.00 | 1 | 49 |
| 50 | 2.21 | 1 | 50 |

Setelah itu baru dibuat sebaran empiris dan hipotetisnya, yang secara bersama dapat ditabelkan seperti di bawah ini

| **x** | **S(x)** | **F*(x)** | **\|S(x)-F*(x)\|** |
|---|---|---|---|
| -1.69 | 0.04 | 0.05 | |
| -1.63 | 0.06 | 0.05 | 0.01 |
| -1.48 | 0.08 | 0.07 | 0.01 |
| -1.37 | 0.10 | 0.09 | 0.01 |
| -1.26 | 0.12 | 0.10 | 0.00 |
| -1.21 | 0.14 | 0.11 | 0.01 |
| -1.16 | 0.18 | 0.12 | 0.02 |
| -1.05 | 0.20 | 0.15 | 0.03 |
| -1.00 | 0.22 | 0.16 | 0.04 |
| -0.95 | 0.24 | 0.17 | 0.05 |
| -0.79 | 0.26 | 0.21 | 0.03 |
| -0.69 | 0.28 | 0.25 | 0.01 |
| -0.63 | 0.32 | 0.26 | 0.02 |
| -0.58 | 0.34 | 0.28 | 0.04 |
| -0.53 | 0.36 | 0.30 | 0.04 |
| -0.37 | **0.40** | 0.36 | 0.00 |
| -0.05 | **0.44** | **0.48** | **0.08** |
| 0.05 | **0.46** | **0.52** | **0.08** |
| 0.10 | 0.50 | **0.54** | **0.08** |
| 0.16 | 0.58 | 0.56 | 0.06 |
| 0.21 | 0.60 | 0.58 | 0.00 |
| 0.31 | 0.64 | 0.62 | 0.02 |
| 0.37 | 0.66 | 0.64 | 0.00 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0.42 | 0.68 | 0.66 | 0.00 |
| 0.47 | 0.70 | 0.68 | 0.00 |
| 0.52 | 0.72 | 0.70 | 0.00 |
| 0.58 | 0.74 | 0.72 | 0.00 |
| 0.68 | 0.78 | 0.75 | 0.01 |
| 0.79 | 0.80 | 0.79 | 0.01 |
| 0.95 | 0.84 | 0.83 | 0.03 |
| 1.00 | 0.86 | 0.84 | 0.00 |
| 1.05 | 0.88 | 0.85 | 0.01 |
| 1.16 | 0.90 | 0.88 | 0.00 |
| 1.37 | 0.92 | 0.91 | 0.01 |
| 1.68 | 0.94 | 0.95 | 0.03 |
| 1.79 | 0.96 | 0.96 | 0.02 |
| 2.00 | 0.98 | 0.98 | 0.02 |
| 2.21 | 1.00 | 0.99 | 0.01 |

Nilai perbedaan dihitung dengan cara $F^*(x)\text{-}S(\bar{x})$. Terlihat bahwa perbedaan terbesar bernilai 0.08 yaitu pada nilai-nilai $x = -0.05, +0.05,$ dan $0.10$. Dari tabel Lilliefors diperoleh nilai 0.125. Karena nilai statistik uji = 0.08 < 0.125 maka hipotesis nol diterima, artinya data tersebut masih memiliki distribusi normal.

# Uji Cramer-von Mises

Data berupa contoh acak berukuran $n$, $X_1, X_2, ..., X_n$ dari suatu fungsi sebaran yang tak diketahui, $F(x)$. Notasikan contoh acak berurut atau tertata dengan $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq .. \leq X_{(n)}$ dimana $X_{(i)}$ merupakan statistik tataan dengan peringkat $i$. Diasumsikan bahwa contoh adalah contoh acak.

Hipotesis yang diuji : Misalkan $F^*(x)$ adalah fungsi sebaran yang dihipotesiskan dan terspesifikasi secara lengkap.

$H_0$: $F(x) = F^*(x)$ untuk semua $x$ dari $-\infty$ hingga $+\infty$

$H_1$: $F(x) \neq F^*(x)$ untuk sedikitnya satu nilai $x$.

Statistik uji. Misalkan $F^*(X_{(i)})$ adalah nilai fungsi sebaran hipotesis terkecil ke $i$ dari contoh acak, untuk $i = 1, 2, ..., n$. Maka statistik ujinya merupakan fungsi dari $F^*(X_{(i)})$.

$$T_3 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n}\left[F^*(X_{(i)}) - \frac{2i-1}{2n}\right]^2$$

Kriteria penolakan hipotesis nol: Tolak hipotesis jika $T_3$ lebih besar dari statistik Anderson-Darling.

Tabel kuantil statistik Anderson-Darling

| | | |
|---|---|---|
| $w_{0.10} = 0.046$ | $w_{0.50} = 0.119$ | $w_{0.90} = 0.347$ |
| $w_{0.20} = 0.062$ | $w_{0.60} = 0.147$ | $w_{0.95} = 0.461$ |
| $w_{0.30} = 0.079$ | $w_{0.70} = 0.184$ | $w_{0.99} = 0.743$ |
| $w_{0.40} = 0.097$ | $w_{0.80} = 0.241$ | $w_{0.999} = 1.168$ |

## Teladan 32.

Dengan menggunakan data seperti pada teladan Uji Kolomogorov, kita susun ulang dan tabelkan seperti berikut:

| *i* | *X(i)* | *F*(X(i))* | *F*(X(i))-(2i-1)/2n* |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.203 | 0.203 | 0.153 |
| 2 | 0.329 | 0.329 | 0.179 |
| 3 | 0.382 | 0.382 | 0.132 |
| 4 | 0.477 | 0.477 | 0.127 |
| 5 | 0.480 | 0.480 | 0.030 |
| 6 | 0.503 | 0.503 | -0.047 |
| 7 | 0.554 | 0.554 | -0.096 |
| 8 | 0.581 | 0.581 | -0.169 |
| 9 | 0.621 | 0.621 | -0.229 |
| 10 | 0.710 | 0.710 | -0.240 |

Hipotesis nol yang menyatakan bahwa sebaran data adalah Seragam(0,1) ditolak pada taraf nyata 5% jika $T_3$ lebih besar dari 0.461.
Selanjutnya hitung

$$T_3 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n} \left[ F^*(X_{(i)}) - \frac{2i-1}{2n} \right]^2$$

$$= \frac{1}{120} + \left[ (0.153)^2 + (0.179)^2 + \ldots + (-0.240)^2 \right] = 0.248$$

Karena nilai ini 0.248 < 0.461 maka hipotesis nol diterima. Artinya, pada taraf 5% data tersebut dapat dikatakan berasal dari sebaran Seragam(0,1).

# Uji Smirnov

Data terdiri dari dua contoh acak yang saling bebas, yang pertama berukuran *n* yaitu $X_1, X_2, ..., X_n$ dan yang kedua berukuran *m* yaitu $Y_1, Y_2, ..., Y_m$. Misalkan *F(x)* dan *G(x)* masing-masing berturut-turut adalah fungsi sebaran kumulatif peubah acak peubah acak *X* dan *Y,* meskipun tak diketahui.

Asumsi yang diperlukan dalam pengujian ini adalah:

1. Contoh merupakan contoh acak.
2. Kedua kelompok contoh bebas mutual.
3. Skala pengukuran masing-masing sedikitnya ordinal.
4. Untuk menghasilkan uji pasti diasumsikan peubah acak harus kontinu, jika diskrit hasilnya masih sahih namun konservatif.

Bentuk hipotesis yang akan diuji:

A. Pengujian dua arah
   $H_0$: $F(x) = G(x)$ untuk semua nilai *x* dari $-\infty$ hingga $+\infty$
   $H_1$: $F(x) \neq G(x)$ untuk sedikitnya satu nilai *x*.
B. Pengujian satu arah
   $H_0$: $F(x) \leq G(x)$ untuk semua nilai *x* dari $-\infty$ hingga $+\infty$
   $H_1$: $F(x) > G(x)$ untuk sedikitnya satu nilai *x*.
C. Pengujian satu arah
   $H_0$: $F(x) \geq G(x)$ untuk semua nilai *x* dari $-\infty$ hingga $+\infty$
   $H_1$: $F(x) < G(x)$ untuk sedikitnya satu nilai *x*.

Statistik uji
Misalkan $S_1(x)$ merupakan fungsi sebaran empiris berdasarkan contoh acak $X_1, X_2, ..., X_n$ dan $S_2(x)$ merupakan fungsi sebaran empiris berdasarkan contoh acak $Y_1, Y_2, ..., Y_m$.

A. Pengujian dua arah
$$T_1 = \sup_x \left| S_1(x) - S_2(x) \right|$$
B. Pengujian satu arah
$$T_1^+ = \sup_x \left[ S_1(x) - S_2(x) \right]$$
C. Pengujian satu arah
$$T_1^- = \sup_x \left[ S_2(x) - S_1(x) \right]$$

Kriteria penolakan hipotesis
Tolak hipotesis nol jika statistik yang digunakan diatas lebih besar dari kuantil atas $1-\alpha$ dari tabel Statistik Smirnov. Untuk ukuran contoh yang lebih besar dan tak ada dalam tabel, dapat digunakan pendekatan seperti tertera di akhir tabel.

## Teladan 33.

Contoh acak berukuran 9 diperoleh dari populasi *X* dan berukuran 15 diperoleh dari populasi *Y*. Dengan menggunakan taraf nyata pengujian 5%, ujilah apakah kedua populasi tersebut memiliki sebaran yang sama. Data diperoleh seperti di bawah ini

| Data X | Data Y |
|---|---|
| 11.46 | 9.68 |
| 7.35 | 7.71 |
| 10.39 | 16.33 |
| 19.69 | 14.08 |
| 8.1 | 11.51 |
| 9.9 | 18.74 |
| 10.64 | 11.23 |
| 8.31 | 11.95 |
| 8.69 | 19.67 |
| | 6.36 |
| | 14.73 |
| | 14.36 |
| | 6.44 |
| | 9.54 |
| | 13.78 |

Hasil olahan diperoleh seperti berikut

| *i* | Rank | X | cumfrek(X) | Y | cumfrek(Y) | $S_1(x)$ | $S_2(x)$ | $S_1(x)-S_2(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6.36 | | 0 | 6.36 | 1 | 0.000 | 0.067 | -0.067 |
| 2 | 6.44 | | 0 | 6.44 | 2 | 0.000 | 0.133 | -0.133 |
| 3 | 7.35 | 7.35 | 1 | | 2 | 0.111 | 0.133 | -0.022 |
| 4 | 7.71 | | 1 | 7.71 | 3 | 0.111 | 0.200 | -0.089 |
| 5 | 8.10 | 8.10 | 2 | | 3 | 0.222 | 0.200 | 0.022 |
| 6 | 8.31 | 8.31 | 3 | | 3 | 0.333 | 0.200 | 0.133 |
| 7 | 8.69 | 8.69 | 4 | | 3 | 0.444 | 0.200 | 0.244 |
| 8 | 9.54 | | 4 | 9.54 | 4 | 0.444 | 0.267 | 0.178 |
| 9 | 9.68 | | 4 | 9.68 | 5 | 0.444 | 0.333 | 0.111 |
| 10 | 9.90 | 9.90 | 5 | | 5 | 0.556 | 0.333 | 0.222 |
| 11 | 10.39 | 10.39 | 6 | | 5 | 0.667 | 0.333 | 0.333 |
| 12 | 10.64 | 10.64 | 7 | | 5 | 0.778 | 0.333 | 0.444 |
| 13 | 11.23 | | 7 | 11.23 | 6 | 0.778 | 0.400 | 0.378 |
| 14 | 11.46 | 11.46 | 8 | | 6 | 0.889 | 0.400 | 0.489 |
| 15 | 11.51 | | 8 | 11.51 | 7 | 0.889 | 0.467 | 0.422 |
| 16 | 11.95 | | 8 | 11.95 | 8 | 0.889 | 0.533 | 0.356 |
| 17 | 13.78 | | 8 | 13.78 | 9 | 0.889 | 0.600 | 0.289 |
| 18 | 14.08 | | 8 | 14.08 | 10 | 0.889 | 0.667 | 0.222 |
| 19 | 14.36 | | 8 | 14.36 | 11 | 0.889 | 0.733 | 0.156 |
| 20 | 14.73 | | 8 | 14.73 | 12 | 0.889 | 0.800 | 0.089 |
| 21 | 16.33 | | 8 | 16.33 | 13 | 0.889 | 0.867 | 0.022 |
| 22 | 18.74 | | 8 | 18.74 | 14 | 0.889 | 0.933 | -0.044 |
| 23 | 19.67 | | 8 | 19.67 | 15 | 0.889 | 1.000 | -0.111 |
| 24 | 19.69 | 19.69 | 9 | | 15 | 1.000 | 1.000 | 0.000 |
| | | | | | **Smirnov** | | | **0.489** |

Kriteria penolakan dengan tabel Smirnov pad taraf 5% dengan $n = 9$ dan $m = 15$ adalah Tolak Hipotesis nol jika statistik hitung Smirnov > 0.533 = 8/15. Karena statistik hitung Smirnov kita = 0.489 < 0.533 maka hipotesis nol diterima. Artinya, kedua populasi memiliki fungsi sebaran yang sama.

# Uji Cramer-von Mises Dua Contoh

Data terdiri dari dua contoh acak yang saling bebas, yang pertama berukuran *n* yaitu $X_1, X_2, ..., X_n$ dan yang kedua berukuran *m* yaitu $Y_1, Y_2, ..., Y_m$. Misalkan *F(x)* dan *G(x)* masing-masing berturut-turut adalah fungsi sebaran kumulatif peubah acak peubah acak *X* dan *Y,* meskipun tak diketahui.

Asumsi yang diperlukan dalam pengujian ini adalah:

1. Contoh merupakan contoh acak, saling bebas sesamanya
2. Skala pengukuran masing-masing sedikitnya ordinal.
3. Untuk menghasilkan uji pasti diasumsikan peubah acak harus kontinu, jika diskrit hasilnya masih sahih namun konservatif.

Hipotesis yang diuji

$H_0$: $F(x) = G(x)$ untuk semua nilai *x* dari $-\infty$ hingga $+\infty$

$H_1$: $F(x) \neq G(x)$ untuk sedikitnya satu nilai *x*.

Statistik uji yang digunakan.

Apabila $S_1(x)$ dan $S_2(x)$ merupakan fungsi sebaran empiris kedua kelompok contoh acak tersebut. Statistik uji untuk menguji hipotesis diatas adalah

$$T_2 = \frac{mn}{(m+n)^2} \sum_{x=X_i, x=Y_j} \left[ S_1(x) - S_2(x) \right]^2$$

Atau alternatif statistik ujinya dapat dituliskan sebagai

$$T_2 = \frac{mn}{(m+n)^2} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[ S_1(X_i) - S_2(X_i) \right]^2 + \sum_{j=1}^{m} \left[ S_1(X_i) - S_2(X_i) \right]^2 \right\}$$

Bentuk yang serupa dengan uji diatas adalah dengan menggunakan notasi peringkat. Misalkan $R(X_{(i)})$ dan $R(Y_{(j)})$ adalah peringkat dalam contoh gabungan tertata dari nilai *X* terkecil ke-*i* dan nilai *Y* terkecil ke-*j*. Sehingga

$$T_2 = \frac{mn}{(m+n)^2} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[ \frac{R(X_{(i)})}{m} - i\frac{n+m}{nm} \right]^2 + \sum_{i=1}^{n} \left[ \frac{R(Y_{(j)})}{n} - j\frac{n+m}{nm} \right]^2 \right\}$$

Jika $n = m$, maka statistik ini menjadi

$$T_2 = \frac{1}{4n^2} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[ R(X_{(i)}) - 2i \right]^2 + \sum_{j=1}^{m} \left[ R(Y_{(j)}) - 2j \right]^2 \right\}$$

Tabel kuantil statistik Cramer-von Mises

| | | |
|---|---|---|
| $w_{0.10} = 0.046$ | $w_{0.50} = 0.119$ | $w_{0.90} = 0.347$ |
| $w_{0.20} = 0.062$ | $w_{0.60} = 0.147$ | $w_{0.95} = 0.461$ |
| $w_{0.30} = 0.079$ | $w_{0.70} = 0.184$ | $w_{0.99} = 0.743$ |
| $w_{0.40} = 0.097$ | $w_{0.80} = 0.241$ | $w_{0.999} = 1.168$ |

Kriteria penolakan hipotesis nol: Tolak hipotesis nol jika nilai statistik hitung Cramer-von Mises melebih kuantil $1-\alpha$ yang diperoleh dari tabel diatas.

## Teladan 34.

Dengan menggunakan data seperti pada Teladan uji Smirnov, kita peroleh

| $S_1(x)$-$S_2(x)$ | $[S_1(x)-S_2(x)]^2$ | $[S_1(y)-S_2(y)]^2$ |
|---|---|---|
| -0.067 | | 0.004 |
| 0.044 | 0.002 | |
| 0.156 | 0.024 | |
| 0.267 | 0.071 | |
| 0.378 | 0.143 | |
| 0.489 | 0.239 | |
| 0.422 | | 0.178 |
| 0.356 | | 0.126 |
| 0.289 | | 0.083 |
| 0.400 | 0.160 | |
| 0.511 | 0.261 | |
| 0.444 | | 0.198 |
| 0.378 | | 0.143 |
| 0.489 | 0.239 | |
| 0.422 | | 0.178 |
| 0.356 | | 0.126 |
| 0.289 | | 0.083 |
| 0.222 | | 0.049 |
| 0.156 | | 0.024 |
| 0.267 | 0.071 | |
| 0.200 | | 0.040 |
| 0.133 | | 0.018 |
| 0.067 | | 0.004 |
| 0.000 | | 0.000 |
| Total | **1.210** | **1.257** |
| Cramer-von Mises | | 0.578 |

Pada taraf nyata 5%, nilai statistik Cramer-von Mises = 0.578 > 0.461 sehingga hipotesis nol ditolak. Dengan demikian kedua data memiliki fungsi sebaran populasi yang tidak sama. Hasil ini berbeda dengan apa yang kita peroleh dengan uji Smirnov.

# Uji Birnbaum-Hall

Data terdiri dari tiga contoh acak yang saling bebas masing-masing berukuran *n* dan masing-masing berasal dari populasi dengan fungsi sebaran kumulatif yang tak diketahui $F_1(x)$, $F_2(x)$ dan $F_3(x)$. Bila dinotasikan bahwa fungsi sebaran empiris ketiganya berturut-turut adalah $S_1(x)$, $S_2(x)$, dan $S_3(x)$.

Asumsi yang diperlukan dalam pengujian ini adalah:

1. Contoh merupakan contoh acak yang saling bebas mutual.
2. Skala pengukuran sedikitnya ordinal.
3. Untuk menghasilkan uji pasti diasumsikan peubah acak harus kontinu, jika diskrit hasilnya masih sahih namun konservatif.

Hipotesis yang diuji

$H_0$: $F_1(x)$, $F_2(x)$ dan $F_3(x)$ identik.

$H_1$: sedikitnya dua fungsi sebaran tersebut berbeda dengan yang lain.

Statistik uji yang digunakan:

$$T_{BH} = \sup_{x,i,j} \left| S_i(x) - S_j(x) \right|$$

Aturan pengambilan keputusan: Tolak hipotesis nol dengan taraf nyata pengujian $\alpha$ jika $T_{BH}$ > kuantil $1-\alpha$ statistik Birnbaum-Hall. Lihat tabel lampiran pada halaman 159.

# Uji k-contoh satu arah Smirnov

Data terdiri dari *k* contoh acak berukuran sama *n*. Misalkan fungsi sebaran empirisnya berturut-turut adalah $S_1(x)$, $S_2(x)$, ..., $S_k(x)$, dan fungsi sebaran yang tak diketahui $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_k(x)$.

Asumsi pengujian

1. Contoh merupakan contoh acak yang saling bebas mutual sesamanya.
2. Skala pengukuran sedikitnya ordinal.
3. Untuk menghasilkan uji pasti diasumsikan peubah acak harus kontinu, jika diskrit hasilnya masih sahih namun konservatif.

Hipotesis yang diuji:

$H_0$: $F_1(x) \leq F_2(x) \leq \ldots \leq F_k(x)$ untuk semua *x*.

$H_1$: $F_i(x) > F_j(x)$ untuk beberapa $i < j$, dan untuk beberapa *x*.

Statistik uji:

$$T_2 = \sup_{x,i<k} \left[ S_i(x) - S_{i+1}(x) \right]$$

Aturan pengambilan keputusan.
Tolak hipotesis nol, jika nilai statistik ini lebih besar dari kuantil atas $1-\alpha$ dari statistik Smirnov *k*-contoh satu arah. Lihat tabel lampiran pada halaman 160.

# Uji k-contoh dua arah Smirnov

Data terdiri dari *k* contoh acak masing-masing berukuran *n*. Fungsi sebaran kumulatifnya yang tak diketahui dinotasikan dengan $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_k(x)$.

Asumsi yang diperlukan:

1. Contoh merupakan contoh acak yang saling bebas mutual sesamanya.
2. Skala pengukuran sedikitnya ordinal.
3. Untuk menghasilkan uji pasti diasumsikan peubah acak harus kontinu, jika diskrit hasilnya masih sahih namun konservatif.

Hipotesis yang diuji:

$H_0$: $F_1(x) = F_2(x) = \ldots = F_k(x)$ untuk semua *x*.
$H_1$: $F_i(x) \neq F_j(x)$ untuk beberapa *i, j* dan *x*.

Statistik uji:
Pertama kali dapatkan nilai terbesar dalam tiap contoh dan notasikan dengan $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$. Contoh dengan $Z_i$ terbesar disebut contoh berperingkat *k* dan fungsi sebaran empirisnya $S_{(k)}(x)$. Contoh dengan $Z_i$ terkecil disebut contoh berperingkat *k* dan fungsi sebaran empirisnya $S_{(1)}(x)$.
Secara matematis statistik uji tersebut dapat dituliskan

$$T_3 = \sup_x \left[ S_{(1)}(x) - S_{(k)}(x) \right]$$

Aturan Keputusan:
Tolak hipotesis nol, jika nilai statistik ini lebih besar dari kuantil atas $1-\alpha$ dari statistik Smirnov *k*-contoh dua arah. Lihat tabel lampiran pada halaman 163.

# Uji Nonparametrik Lainnya

Di awal bab ini akan disajikan beberapa uji cepat dalam prosedur statistika nonparametrik yang bentuknya yang sederhana dan kemudahan penerapannya. Diawali dengan uji cepat Tukey untuk menguji lokasi dua contoh yang saling bebas serta uji Olmstead-Tukey untuk mendeteksi apakah dua peubah berkorelasi. Uji Slippage untuk menguji apakah $k$ populasi memiliki fungsi sebaran yang identik merupakan sajian berikutnya, yang diikuti uji berdasarkan larian (*run*) Wald-Wolfowitz untuk menguji apakah suatu proses bersifat acak atau tidak dan di akhiri dengan uji keteracakan.

## Uji Tukey

Data terdiri dari dua contoh acak berukuran $n$ dan $m$; $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dan $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$.

Asumsi-asumsi yang dipakai dalam pengujian:

1. Dua contoh merupakan contoh acak.
2. Dua contoh saling bebas mutual sesamanya.
3. Skala pengukuran sedikitnya ordinal.
4. Peubah acak bersifat kontinu.
5. Dua populasi memiliki fungsi sebaran identik atau salah satu populasi cenderung menghasilkan observasi yang lebih besar daripada yang lainnya.

Hipotesis yang diuji.

A. Pengujian satu arah. $H_0$: $E(X) \leq E(Y)$ vs $H_1$: $E(X) > E(Y)$
B. Pengujian satu arah. $H_0$: $E(X) \geq E(Y)$ vs $H_1$: $E(X) < E(Y)$
C. Pengujian dua arah. $H_0$: $E(X) = E(Y)$ vs $H_1$: $E(X) \neq E(Y)$

Statistik uji yang digunakan.

A. Jika observasi terbesar dari kedua contoh adalah sebuah dari $X$ dan observasi terendahnya adalah sebuah nilai dari $Y$, maka statistik ujinya merupakan jumlah dari dua *count*; $T_1$ sama dengan banyaknya $X$ lebih besar dari $Y$ terbesar ditambah dengan banyaknya $Y$ yang lebih kecil dari $X$ terkecil. Dalam semua kasus lainnya $T_1$ sama dengan nol.
B. Jika observasi terbesar dari kedua contoh adalah sebuah dari $Y$ dan observasi terendahnya adalah sebuah nilai dari $X$, maka statistik ujinya merupakan jumlah dari dua *count*; $T_2$ sama dengan banyaknya $Y$ lebih besar dari $X$ terbesar ditambah dengan banyaknya $X$ yang lebih kecil dari $Y$ terkecil. Dalam semua kasus lainnya $T_2$ sama dengan nol.
C. $T_3 = max(T_1, T_2)$

Aturan pengambilan keputusan:
Tolak hipotesis nol pada taraf 0.05, 0.01, atau 0.001 untuk pengujian dua arah, atau 0.025, 0.005, atau 0.0005 untuk pengujian satu arah jika nilai statistik ujinya lebih besar atau sama dengan, berturut-turut, 7, 10, atau 13. Selain itu, terima hipotesis nol. Atau gnnakan tabel statistik Quick Tukey. Lihat tabel lampiran pada halaman 165.

# Uji Wald-Wolfowitz

Bentuk data dapat merupakan kategori dari salah satu hal berikut:

1. Uji keteracakan. Data berupa sekuen amatan berdasarkan munculnya. Amatan dikategorikan menjadi dua tipe atau dapat direduksi menjadi data biner. Misalkan $n$ adalah banyaknya "0" dan $m$ adalah banyaknya "1" dalam sekuen yang diamati.
2. Uji dua contoh. Data berupa contoh acak dan saling bebas mutual sesamanya. Contoh pertama berukuran $n$ yaitu $X_1, X_2, ..., X_n$ dan contoh kedua berukuran $m$ yaitu $Y_1, Y_2, ..., Y_m$. Susun dua contoh menjadi satu contoh gabungan tertata seperti $X < Y < Y < X < X < ... < X < Y$.

Untuk uji keteracakan hanya diasumsikan bahwa amatan merupakan data biner, sedangkan untuk uji dua contoh diasumsikan bahwa dua contoh merupakan contoh acak yang saling bebas mutual antar sesamanya serta peubah acak kontinu.

Hipotesis yang diuji untuk uji keteracakan

$H_0$: proses yang membangkitkan barisan merupakan proses acak.

$H_1$: peubah acak dalam sekuen tergantung pada peubah acak lain dalam barisan atau memiliki sebaran yang berbeda dengan sebaran peubah acak lainnya.

Hipotesis dalam pengujian dua contoh

$H_0$: peubah acak $X$ dan $Y$ memiliki fungsi sebaran yang identik.

$H_1$: fungsi sebaran peubah acak $X$ berbeda dengan fungsi sebaran peubah acak $Y$.

Statistik uji.

A. Uji keteracakan. Statistik uji yang digunakan adalah $T$ yaitu banyaknya larian (*run*) elemen serupa dalam sekuen pengamatan.
B. Uji dua contoh. Statistik uji yang digunakan adalah $T$ yaitu banyaknya larian (*run*) amatan dari populasi yang sama dalam contoh gabungan tertata.

Aturan pengambilan keputusan.

A. Uji keteracakan. Tolak hipotesis nol jika nilai $T$ hitung lebih besar dari kuantil atas $1\text{-}\alpha/2$ statistik Wald-Wolfowitz atau nilai $T$ hitung lebih kecil dari kuantil bawah $\alpha/2$ statistik Wald-Wolfowitz. Lihat tabel lampiran pada halaman 170.

B. Uji dua contoh. Tolak hipotesis nol jika nilai $T$ hitung lebih kecil dari kuantil bawah $\alpha$ statistik Wald-Wolfowitz. Lihat tabel lampiran pada halaman 170.

# Tabel Statistika

## Tabel 1. Sebaran Kumulatif Normal Baku.

| | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -3,0 | 0,0013 | 0,0013 | 0,0013 | 0,0012 | 0,0012 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0010 | 0,0010 |
| -2,9 | 0,0019 | 0,0018 | 0,0018 | 0,0017 | 0,0016 | 0,0016 | 0,0015 | 0,0015 | 0,0014 | 0,0014 |
| -2,8 | 0,0026 | 0,0025 | 0,0024 | 0,0023 | 0,0023 | 0,0022 | 0,0021 | 0,0021 | 0,0020 | 0,0019 |
| -2,7 | 0,0035 | 0,0034 | 0,0033 | 0,0032 | 0,0031 | 0,0030 | 0,0029 | 0,0028 | 0,0027 | 0,0026 |
| -2,6 | 0,0047 | 0,0045 | 0,0044 | 0,0043 | 0,0041 | 0,0040 | 0,0039 | 0,0038 | 0,0037 | 0,0036 |
| -2,5 | 0,0062 | 0,0060 | 0,0059 | 0,0057 | 0,0055 | 0,0054 | 0,0052 | 0,0051 | 0,0049 | 0,0048 |
| -2,4 | 0,0082 | 0,0080 | 0,0078 | 0,0075 | 0,0073 | 0,0071 | 0,0069 | 0,0068 | 0,0066 | 0,0064 |
| -2,3 | 0,0107 | 0,0104 | 0,0102 | 0,0099 | 0,0096 | 0,0094 | 0,0091 | 0,0089 | 0,0087 | 0,0084 |
| -2,2 | 0,0139 | 0,0136 | 0,0132 | 0,0129 | 0,0125 | 0,0122 | 0,0119 | 0,0116 | 0,0113 | 0,0110 |
| -2,1 | 0,0179 | 0,0174 | 0,0170 | 0,0166 | 0,0162 | 0,0158 | 0,0154 | 0,0150 | 0,0146 | 0,0143 |
| -2,0 | 0,0228 | 0,0222 | 0,0217 | 0,0212 | 0,0207 | 0,0202 | 0,0197 | 0,0192 | 0,0188 | 0,0183 |
| -1,9 | 0,0287 | 0,0281 | 0,0274 | 0,0268 | 0,0262 | 0,0256 | 0,0250 | 0,0244 | 0,0239 | 0,0233 |
| -1,8 | 0,0359 | 0,0351 | 0,0344 | 0,0336 | 0,0329 | 0,0322 | 0,0314 | 0,0307 | 0,0301 | 0,0294 |
| -1,7 | 0,0446 | 0,0436 | 0,0427 | 0,0418 | 0,0409 | 0,0401 | 0,0392 | 0,0384 | 0,0375 | 0,0367 |
| -1,6 | 0,0548 | 0,0537 | 0,0526 | 0,0516 | 0,0505 | 0,0495 | 0,0485 | 0,0475 | 0,0465 | 0,0455 |
| -1,5 | 0,0668 | 0,0655 | 0,0643 | 0,0630 | 0,0618 | 0,0606 | 0,0594 | 0,0582 | 0,0571 | 0,0559 |
| -1,4 | 0,0808 | 0,0793 | 0,0778 | 0,0764 | 0,0749 | 0,0735 | 0,0721 | 0,0708 | 0,0694 | 0,0681 |
| -1,3 | 0,0968 | 0,0951 | 0,0934 | 0,0918 | 0,0901 | 0,0885 | 0,0869 | 0,0853 | 0,0838 | 0,0823 |
| -1,2 | 0,1151 | 0,1131 | 0,1112 | 0,1093 | 0,1075 | 0,1056 | 0,1038 | 0,1020 | 0,1003 | 0,0985 |
| -1,1 | 0,1357 | 0,1335 | 0,1314 | 0,1292 | 0,1271 | 0,1251 | 0,1230 | 0,1210 | 0,1190 | 0,1170 |
| -1,0 | 0,1587 | 0,1562 | 0,1539 | 0,1515 | 0,1492 | 0,1469 | 0,1446 | 0,1423 | 0,1401 | 0,1379 |
| -0,9 | 0,1841 | 0,1814 | 0,1788 | 0,1762 | 0,1736 | 0,1711 | 0,1685 | 0,1660 | 0,1635 | 0,1611 |
| -0,8 | 0,2119 | 0,2090 | 0,2061 | 0,2033 | 0,2005 | 0,1977 | 0,1949 | 0,1922 | 0,1894 | 0,1867 |
| -0,7 | 0,2420 | 0,2389 | 0,2358 | 0,2327 | 0,2296 | 0,2266 | 0,2236 | 0,2206 | 0,2177 | 0,2148 |
| -0,6 | 0,2743 | 0,2709 | 0,2676 | 0,2643 | 0,2611 | 0,2578 | 0,2546 | 0,2514 | 0,2483 | 0,2451 |
| -0,5 | 0,3085 | 0,3050 | 0,3015 | 0,2981 | 0,2946 | 0,2912 | 0,2877 | 0,2843 | 0,2810 | 0,2776 |
| -0,4 | 0,3446 | 0,3409 | 0,3372 | 0,3336 | 0,3300 | 0,3264 | 0,3228 | 0,3192 | 0,3156 | 0,3121 |
| -0,3 | 0,3821 | 0,3783 | 0,3745 | 0,3707 | 0,3669 | 0,3632 | 0,3594 | 0,3557 | 0,3520 | 0,3483 |
| -0,2 | 0,4207 | 0,4168 | 0,4129 | 0,4090 | 0,4052 | 0,4013 | 0,3974 | 0,3936 | 0,3897 | 0,3859 |
| -0,1 | 0,4602 | 0,4562 | 0,4522 | 0,4483 | 0,4443 | 0,4404 | 0,4364 | 0,4325 | 0,4286 | 0,4247 |
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |

... Lanjutan

Tabel Lampiran

| | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| 2,0 | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| 2,3 | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| 2,4 | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| 2,5 | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| 2,6 | 0,9953 | 0,9955 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| 2,7 | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| 2,8 | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| 2,9 | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |
| 3,0 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9988 | 0,9988 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9990 | 0,9990 |

## Tabel 2. Sebaran Kai-kuadrat

| db | 0,001 | 0,005 | 0,010 | 0,025 | 0,050 | 0,100 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10,828 | 7,879 | 6,635 | 5,024 | 3,841 | 2,706 |
| 2 | 13,816 | 10,597 | 9,210 | 7,378 | 5,991 | 4,605 |
| 3 | 16,266 | 12,838 | 11,345 | 9,348 | 7,815 | 6,251 |
| 4 | 18,467 | 14,860 | 13,277 | 11,143 | 9,488 | 7,779 |
| 5 | 20,515 | 16,750 | 15,086 | 12,833 | 11,070 | 9,236 |
| 6 | 22,458 | 18,548 | 16,812 | 14,449 | 12,592 | 10,645 |
| 7 | 24,322 | 20,278 | 18,475 | 16,013 | 14,067 | 12,017 |
| 8 | 26,124 | 21,955 | 20,090 | 17,535 | 15,507 | 13,362 |
| 9 | 27,877 | 23,589 | 21,666 | 19,023 | 16,919 | 14,684 |
| 10 | 29,588 | 25,188 | 23,209 | 20,483 | 18,307 | 15,987 |
| 11 | 31,264 | 26,757 | 24,725 | 21,920 | 19,675 | 17,275 |
| 12 | 32,909 | 28,300 | 26,217 | 23,337 | 21,026 | 18,549 |
| 13 | 34,528 | 29,819 | 27,688 | 24,736 | 22,362 | 19,812 |
| 14 | 36,123 | 31,319 | 29,141 | 26,119 | 23,685 | 21,064 |
| 15 | 37,697 | 32,801 | 30,578 | 27,488 | 24,996 | 22,307 |
| 16 | 39,252 | 34,267 | 32,000 | 28,845 | 26,296 | 23,542 |
| 17 | 40,790 | 35,718 | 33,409 | 30,191 | 27,587 | 24,769 |
| 18 | 42,312 | 37,156 | 34,805 | 31,526 | 28,869 | 25,989 |
| 19 | 43,820 | 38,582 | 36,191 | 32,852 | 30,144 | 27,204 |
| 20 | 45,315 | 39,997 | 37,566 | 34,170 | 31,410 | 28,412 |
| 21 | 46,797 | 41,401 | 38,932 | 35,479 | 32,671 | 29,615 |
| 22 | 48,268 | 42,796 | 40,289 | 36,781 | 33,924 | 30,813 |
| 23 | 49,728 | 44,181 | 41,638 | 38,076 | 35,172 | 32,007 |
| 24 | 51,179 | 45,559 | 42,980 | 39,364 | 36,415 | 33,196 |
| 25 | 52,620 | 46,928 | 44,314 | 40,646 | 37,652 | 34,382 |
| 26 | 54,052 | 48,290 | 45,642 | 41,923 | 38,885 | 35,563 |
| 27 | 55,476 | 49,645 | 46,963 | 43,195 | 40,113 | 36,741 |
| 28 | 56,892 | 50,993 | 48,278 | 44,461 | 41,337 | 37,916 |
| 29 | 58,301 | 52,336 | 49,588 | 45,722 | 42,557 | 39,087 |
| 30 | 59,703 | 53,672 | 50,892 | 46,979 | 43,773 | 40,256 |
| 40 | 73,402 | 66,766 | 63,691 | 59,342 | 55,758 | 51,805 |
| 50 | 86,661 | 79,490 | 76,154 | 71,420 | 67,505 | 63,167 |

... Lanjutan

| db | 0,900 | 0,950 | 0,975 | 0,990 | 0,995 | 0,999 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,016 | 0,004 | 0,001 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 2 | 0,211 | 0,103 | 0,051 | 0,020 | 0,010 | 0,002 |
| 3 | 0,584 | 0,352 | 0,216 | 0,115 | 0,072 | 0,024 |
| 4 | 1,064 | 0,711 | 0,484 | 0,297 | 0,207 | 0,091 |
| 5 | 1,610 | 1,145 | 0,831 | 0,554 | 0,412 | 0,210 |
| 6 | 2,204 | 1,635 | 1,237 | 0,872 | 0,676 | 0,381 |
| 7 | 2,833 | 2,167 | 1,690 | 1,239 | 0,989 | 0,598 |
| 8 | 3,490 | 2,733 | 2,180 | 1,646 | 1,344 | 0,857 |
| 9 | 4,168 | 3,325 | 2,700 | 2,088 | 1,735 | 1,152 |
| 10 | 4,865 | 3,940 | 3,247 | 2,558 | 2,156 | 1,479 |
| 11 | 5,578 | 4,575 | 3,816 | 3,053 | 2,603 | 1,834 |
| 12 | 6,304 | 5,226 | 4,404 | 3,571 | 3,074 | 2,214 |
| 13 | 7,042 | 5,892 | 5,009 | 4,107 | 3,565 | 2,617 |
| 14 | 7,790 | 6,571 | 5,629 | 4,660 | 4,075 | 3,041 |
| 15 | 8,547 | 7,261 | 6,262 | 5,229 | 4,601 | 3,483 |
| 16 | 9,312 | 7,962 | 6,908 | 5,812 | 5,142 | 3,942 |
| 17 | 10,085 | 8,672 | 7,564 | 6,408 | 5,697 | 4,416 |
| 18 | 10,865 | 9,390 | 8,231 | 7,015 | 6,265 | 4,905 |
| 19 | 11,651 | 10,117 | 8,907 | 7,633 | 6,844 | 5,407 |
| 20 | 12,443 | 10,851 | 9,591 | 8,260 | 7,434 | 5,921 |
| 21 | 13,240 | 11,591 | 10,283 | 8,897 | 8,034 | 6,447 |
| 22 | 14,041 | 12,338 | 10,982 | 9,542 | 8,643 | 6,983 |
| 23 | 14,848 | 13,091 | 11,689 | 10,196 | 9,260 | 7,529 |
| 24 | 15,659 | 13,848 | 12,401 | 10,856 | 9,886 | 8,085 |
| 25 | 16,473 | 14,611 | 13,120 | 11,524 | 10,520 | 8,649 |
| 26 | 17,292 | 15,379 | 13,844 | 12,198 | 11,160 | 9,222 |
| 27 | 18,114 | 16,151 | 14,573 | 12,879 | 11,808 | 9,803 |
| 28 | 18,939 | 16,928 | 15,308 | 13,565 | 12,461 | 10,391 |
| 29 | 19,768 | 17,708 | 16,047 | 14,256 | 13,121 | 10,986 |
| 30 | 20,599 | 18,493 | 16,791 | 14,953 | 13,787 | 11,588 |
| 40 | 29,051 | 26,509 | 24,433 | 22,164 | 20,707 | 17,916 |
| 50 | 37,689 | 34,764 | 32,357 | 29,707 | 27,991 | 24,674 |

## Tabel 3. Sebaran *t-student*

| | 0,100 | 0,050 | 0,025 | 0,010 | 0,005 | 0,001 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3,078 | 6,314 | 12,706 | 31,821 | 63,657 | 318,309 |
| 2 | 1,886 | 2,920 | 4,303 | 6,965 | 9,925 | 22,327 |
| 3 | 1,638 | 2,353 | 3,182 | 4,541 | 5,841 | 10,215 |
| 4 | 1,533 | 2,132 | 2,776 | 3,747 | 4,604 | 7,173 |
| 5 | 1,476 | 2,015 | 2,571 | 3,365 | 4,032 | 5,893 |
| 6 | 1,440 | 1,943 | 2,447 | 3,143 | 3,707 | 5,208 |
| 7 | 1,415 | 1,895 | 2,365 | 2,998 | 3,499 | 4,785 |
| 8 | 1,397 | 1,860 | 2,306 | 2,896 | 3,355 | 4,501 |
| 9 | 1,383 | 1,833 | 2,262 | 2,821 | 3,250 | 4,297 |
| 10 | 1,372 | 1,812 | 2,228 | 2,764 | 3,169 | 4,144 |
| 11 | 1,363 | 1,796 | 2,201 | 2,718 | 3,106 | 4,025 |
| 12 | 1,356 | 1,782 | 2,179 | 2,681 | 3,055 | 3,930 |
| 13 | 1,350 | 1,771 | 2,160 | 2,650 | 3,012 | 3,852 |
| 14 | 1,345 | 1,761 | 2,145 | 2,624 | 2,977 | 3,787 |
| 15 | 1,341 | 1,753 | 2,131 | 2,602 | 2,947 | 3,733 |
| 16 | 1,337 | 1,746 | 2,120 | 2,583 | 2,921 | 3,686 |
| 17 | 1,333 | 1,740 | 2,110 | 2,567 | 2,898 | 3,646 |
| 18 | 1,330 | 1,734 | 2,101 | 2,552 | 2,878 | 3,610 |
| 19 | 1,328 | 1,729 | 2,093 | 2,539 | 2,861 | 3,579 |
| 20 | 1,325 | 1,725 | 2,086 | 2,528 | 2,845 | 3,552 |
| 21 | 1,323 | 1,721 | 2,080 | 2,518 | 2,831 | 3,527 |
| 22 | 1,321 | 1,717 | 2,074 | 2,508 | 2,819 | 3,505 |
| 23 | 1,319 | 1,714 | 2,069 | 2,500 | 2,807 | 3,485 |
| 24 | 1,318 | 1,711 | 2,064 | 2,492 | 2,797 | 3,467 |
| 25 | 1,316 | 1,708 | 2,060 | 2,485 | 2,787 | 3,450 |
| 26 | 1,315 | 1,706 | 2,056 | 2,479 | 2,779 | 3,435 |
| 27 | 1,314 | 1,703 | 2,052 | 2,473 | 2,771 | 3,421 |
| 28 | 1,313 | 1,701 | 2,048 | 2,467 | 2,763 | 3,408 |
| 29 | 1,311 | 1,699 | 2,045 | 2,462 | 2,756 | 3,396 |
| 30 | 1,310 | 1,697 | 2,042 | 2,457 | 2,750 | 3,385 |
| 40 | 1,303 | 1,684 | 2,021 | 2,423 | 2,704 | 3,307 |
| 60 | 1,296 | 1,671 | 2,000 | 2,390 | 2,660 | 3,232 |
| inf | 1,282 | 1,645 | 1,960 | 2,326 | 2,576 | 3,090 |

## Tabel 4. Sebaran *F*

| | | db-1 | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **db-2** | **alpha** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** |
| **1** | **0,100** | 39,86 | 49,50 | 53,59 | 55,83 | 57,24 | 58,20 | 58,91 | 59,44 |
| | **0,050** | 161,45 | 199,50 | 215,71 | 224,58 | 230,16 | 233,99 | 236,77 | 238,88 |
| | **0,010** | 4052,18 | 4999,50 | 5403,35 | 5624,58 | 5763,65 | 5858,99 | 5928,36 | 5981,07 |
| | | | | | | | | | |
| **2** | **0,100** | 8,53 | 9,00 | 9,16 | 9,24 | 9,29 | 9,33 | 9,35 | 9,37 |
| | **0,050** | 18,51 | 19,00 | 19,16 | 19,25 | 19,30 | 19,33 | 19,35 | 19,37 |
| | **0,010** | 98,50 | 99,00 | 99,17 | 99,25 | 99,30 | 99,33 | 99,36 | 99,37 |
| | | | | | | | | | |
| **3** | **0,100** | 5,54 | 5,46 | 5,39 | 5,34 | 5,31 | 5,28 | 5,27 | 5,25 |
| | **0,050** | 10,13 | 9,55 | 9,28 | 9,12 | 9,01 | 8,94 | 8,89 | 8,85 |
| | **0,010** | 34,12 | 30,82 | 29,46 | 28,71 | 28,24 | 27,91 | 27,67 | 27,49 |
| | | | | | | | | | |
| **4** | **0,100** | 4,54 | 4,32 | 4,19 | 4,11 | 4,05 | 4,01 | 3,98 | 3,95 |
| | **0,050** | 7,71 | 6,94 | 6,59 | 6,39 | 6,26 | 6,16 | 6,09 | 6,04 |
| | **0,010** | 21,20 | 18,00 | 16,69 | 15,98 | 15,52 | 15,21 | 14,98 | 14,80 |
| | | | | | | | | | |
| **5** | **0,100** | 4,06 | 3,78 | 3,62 | 3,52 | 3,45 | 3,40 | 3,37 | 3,34 |
| | **0,050** | 6,61 | 5,79 | 5,41 | 5,19 | 5,05 | 4,95 | 4,88 | 4,82 |
| | **0,010** | 16,26 | 13,27 | 12,06 | 11,39 | 10,97 | 10,67 | 10,46 | 10,29 |
| | | | | | | | | | |
| **6** | **0,100** | 3,78 | 3,46 | 3,29 | 3,18 | 3,11 | 3,05 | 3,01 | 2,98 |
| | **0,050** | 5,99 | 5,14 | 4,76 | 4,53 | 4,39 | 4,28 | 4,21 | 4,15 |
| | **0,010** | 13,75 | 10,92 | 9,78 | 9,15 | 8,75 | 8,47 | 8,26 | 8,10 |
| | | | | | | | | | |
| **7** | **0,100** | 3,59 | 3,26 | 3,07 | 2,96 | 2,88 | 2,83 | 2,78 | 2,75 |
| | **0,050** | 5,59 | 4,74 | 4,35 | 4,12 | 3,97 | 3,87 | 3,79 | 3,73 |
| | **0,010** | 12,25 | 9,55 | 8,45 | 7,85 | 7,46 | 7,19 | 6,99 | 6,84 |
| | | | | | | | | | |
| **8** | **0,100** | 3,46 | 3,11 | 2,92 | 2,81 | 2,73 | 2,67 | 2,62 | 2,59 |
| | **0,050** | 5,32 | 4,46 | 4,07 | 3,84 | 3,69 | 3,58 | 3,50 | 3,44 |
| | **0,010** | 11,26 | 8,65 | 7,59 | 7,01 | 6,63 | 6,37 | 6,18 | 6,03 |

... Lanjutan

| | | db-1 | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **db-2** | **alpha** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** |
| **9** | **0,100** | 3,36 | 3,01 | 2,81 | 2,69 | 2,61 | 2,55 | 2,51 | 2,47 |
| | **0,050** | 5,12 | 4,26 | 3,86 | 3,63 | 3,48 | 3,37 | 3,29 | 3,23 |
| | **0,010** | 10,56 | 8,02 | 6,99 | 6,42 | 6,06 | 5,80 | 5,61 | 5,47 |
| | | | | | | | | | |
| **10** | **0,100** | 3,29 | 2,92 | 2,73 | 2,61 | 2,52 | 2,46 | 2,41 | 2,38 |
| | **0,050** | 4,96 | 4,10 | 3,71 | 3,48 | 3,33 | 3,22 | 3,14 | 3,07 |
| | **0,010** | 10,04 | 7,56 | 6,55 | 5,99 | 5,64 | 5,39 | 5,20 | 5,06 |
| | | | | | | | | | |
| **11** | **0,100** | 3,23 | 2,86 | 2,66 | 2,54 | 2,45 | 2,39 | 2,34 | 2,30 |
| | **0,050** | 4,84 | 3,98 | 3,59 | 3,36 | 3,20 | 3,09 | 3,01 | 2,95 |
| | **0,010** | 9,65 | 7,21 | 6,22 | 5,67 | 5,32 | 5,07 | 4,89 | 4,74 |
| | | | | | | | | | |
| **12** | **0,100** | 3,18 | 2,81 | 2,61 | 2,48 | 2,39 | 2,33 | 2,28 | 2,24 |
| | **0,050** | 4,75 | 3,89 | 3,49 | 3,26 | 3,11 | 3,00 | 2,91 | 2,85 |
| | **0,010** | 9,33 | 6,93 | 5,95 | 5,41 | 5,06 | 4,82 | 4,64 | 4,50 |
| | | | | | | | | | |
| **13** | **0,100** | 3,14 | 2,76 | 2,56 | 2,43 | 2,35 | 2,28 | 2,23 | 2,20 |
| | **0,050** | 4,67 | 3,81 | 3,41 | 3,18 | 3,03 | 2,92 | 2,83 | 2,77 |
| | **0,010** | 9,07 | 6,70 | 5,74 | 5,21 | 4,86 | 4,62 | 4,44 | 4,30 |
| | | | | | | | | | |
| **14** | **0,100** | 3,10 | 2,73 | 2,52 | 2,39 | 2,31 | 2,24 | 2,19 | 2,15 |
| | **0,050** | 4,60 | 3,74 | 3,34 | 3,11 | 2,96 | 2,85 | 2,76 | 2,70 |
| | **0,010** | 8,86 | 6,51 | 5,56 | 5,04 | 4,69 | 4,46 | 4,28 | 4,14 |
| | | | | | | | | | |
| **15** | **0,100** | 3,07 | 2,70 | 2,49 | 2,36 | 2,27 | 2,21 | 2,16 | 2,12 |
| | **0,050** | 4,54 | 3,68 | 3,29 | 3,06 | 2,90 | 2,79 | 2,71 | 2,64 |
| | **0,010** | 8,68 | 6,36 | 5,42 | 4,89 | 4,56 | 4,32 | 4,14 | 4,00 |
| | | | | | | | | | |
| **16** | **0,100** | 3,05 | 2,67 | 2,46 | 2,33 | 2,24 | 2,18 | 2,13 | 2,09 |
| | **0,050** | 4,49 | 3,63 | 3,24 | 3,01 | 2,85 | 2,74 | 2,66 | 2,59 |
| | **0,010** | 8,53 | 6,23 | 5,29 | 4,77 | 4,44 | 4,20 | 4,03 | 3,89 |

... Lanjutan

| | | db-1 | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **db-2** | **alpha** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** |
| **17** | **0,100** | 3,03 | 2,64 | 2,44 | 2,31 | 2,22 | 2,15 | 2,10 | 2,06 |
| | **0,050** | 4,45 | 3,59 | 3,20 | 2,96 | 2,81 | 2,70 | 2,61 | 2,55 |
| | **0,010** | 8,40 | 6,11 | 5,18 | 4,67 | 4,34 | 4,10 | 3,93 | 3,79 |
| | | | | | | | | | |
| **18** | **0,100** | 3,01 | 2,62 | 2,42 | 2,29 | 2,20 | 2,13 | 2,08 | 2,04 |
| | **0,050** | 4,41 | 3,55 | 3,16 | 2,93 | 2,77 | 2,66 | 2,58 | 2,51 |
| | **0,010** | 8,29 | 6,01 | 5,09 | 4,58 | 4,25 | 4,01 | 3,84 | 3,71 |
| | | | | | | | | | |
| **19** | **0,100** | 2,99 | 2,61 | 2,40 | 2,27 | 2,18 | 2,11 | 2,06 | 2,02 |
| | **0,050** | 4,38 | 3,52 | 3,13 | 2,90 | 2,74 | 2,63 | 2,54 | 2,48 |
| | **0,010** | 8,18 | 5,93 | 5,01 | 4,50 | 4,17 | 3,94 | 3,77 | 3,63 |
| | | | | | | | | | |
| **20** | **0,100** | 2,97 | 2,59 | 2,38 | 2,25 | 2,16 | 2,09 | 2,04 | 2,00 |
| | **0,050** | 4,35 | 3,49 | 3,10 | 2,87 | 2,71 | 2,60 | 2,51 | 2,45 |
| | **0,010** | 8,10 | 5,85 | 4,94 | 4,43 | 4,10 | 3,87 | 3,70 | 3,56 |
| | | | | | | | | | |
| **21** | **0,100** | 2,96 | 2,57 | 2,36 | 2,23 | 2,14 | 2,08 | 2,02 | 1,98 |
| | **0,050** | 4,32 | 3,47 | 3,07 | 2,84 | 2,68 | 2,57 | 2,49 | 2,42 |
| | **0,010** | 8,02 | 5,78 | 4,87 | 4,37 | 4,04 | 3,81 | 3,64 | 3,51 |
| | | | | | | | | | |
| **22** | **0,100** | 2,95 | 2,56 | 2,35 | 2,22 | 2,13 | 2,06 | 2,01 | 1,97 |
| | **0,050** | 4,30 | 3,44 | 3,05 | 2,82 | 2,66 | 2,55 | 2,46 | 2,40 |
| | **0,010** | 7,95 | 5,72 | 4,82 | 4,31 | 3,99 | 3,76 | 3,59 | 3,45 |
| | | | | | | | | | |
| **23** | **0,100** | 2,94 | 2,55 | 2,34 | 2,21 | 2,11 | 2,05 | 1,99 | 1,95 |
| | **0,050** | 4,28 | 3,42 | 3,03 | 2,80 | 2,64 | 2,53 | 2,44 | 2,37 |
| | **0,010** | 7,88 | 5,66 | 4,76 | 4,26 | 3,94 | 3,71 | 3,54 | 3,41 |
| | | | | | | | | | |
| **24** | **0,100** | 2,93 | 2,54 | 2,33 | 2,19 | 2,10 | 2,04 | 1,98 | 1,94 |
| | **0,050** | 4,26 | 3,40 | 3,01 | 2,78 | 2,62 | 2,51 | 2,42 | 2,36 |
| | **0,010** | 7,82 | 5,61 | 4,72 | 4,22 | 3,90 | 3,67 | 3,50 | 3,36 |

... Lanjutan

| | | db-1 | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **db-2** | **alpha** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | **16** |
| **1** | **0,100** | 59,86 | 60,19 | 60,47 | 60,71 | 60,90 | 61,07 | 61,22 | 61,35 |
| | **0,050** | 240,54 | 241,88 | 242,98 | 243,91 | 244,69 | 245,36 | 245,95 | 246,46 |
| | **0,010** | 6022,47 | 6055,85 | 6083,32 | 6106,32 | 6125,86 | 6142,67 | 6157,28 | 6170,10 |
| | | | | | | | | | |
| **2** | **0,100** | 9,38 | 9,39 | 9,40 | 9,41 | 9,41 | 9,42 | 9,42 | 9,43 |
| | **0,050** | 19,38 | 19,40 | 19,40 | 19,41 | 19,42 | 19,42 | 19,43 | 19,43 |
| | **0,010** | 99,39 | 99,40 | 99,41 | 99,42 | 99,42 | 99,43 | 99,43 | 99,44 |
| | | | | | | | | | |
| **3** | **0,100** | 5,24 | 5,23 | 5,22 | 5,22 | 5,21 | 5,20 | 5,20 | 5,20 |
| | **0,050** | 8,81 | 8,79 | 8,76 | 8,74 | 8,73 | 8,71 | 8,70 | 8,69 |
| | **0,010** | 27,35 | 27,23 | 27,13 | 27,05 | 26,98 | 26,92 | 26,87 | 26,83 |
| | | | | | | | | | |
| **4** | **0,100** | 3,94 | 3,92 | 3,91 | 3,90 | 3,89 | 3,88 | 3,87 | 3,86 |
| | **0,050** | 6,00 | 5,96 | 5,94 | 5,91 | 5,89 | 5,87 | 5,86 | 5,84 |
| | **0,010** | 14,66 | 14,55 | 14,45 | 14,37 | 14,31 | 14,25 | 14,20 | 14,15 |
| | | | | | | | | | |
| **5** | **0,100** | 3,32 | 3,30 | 3,28 | 3,27 | 3,26 | 3,25 | 3,24 | 3,23 |
| | **0,050** | 4,77 | 4,74 | 4,70 | 4,68 | 4,66 | 4,64 | 4,62 | 4,60 |
| | **0,010** | 10,16 | 10,05 | 9,96 | 9,89 | 9,82 | 9,77 | 9,72 | 9,68 |
| | | | | | | | | | |
| **6** | **0,100** | 2,96 | 2,94 | 2,92 | 2,90 | 2,89 | 2,88 | 2,87 | 2,86 |
| | **0,050** | 4,10 | 4,06 | 4,03 | 4,00 | 3,98 | 3,96 | 3,94 | 3,92 |
| | **0,010** | 7,98 | 7,87 | 7,79 | 7,72 | 7,66 | 7,60 | 7,56 | 7,52 |
| | | | | | | | | | |
| **7** | **0,100** | 2,72 | 2,70 | 2,68 | 2,67 | 2,65 | 2,64 | 2,63 | 2,62 |
| | **0,050** | 3,68 | 3,64 | 3,60 | 3,57 | 3,55 | 3,53 | 3,51 | 3,49 |
| | **0,010** | 6,72 | 6,62 | 6,54 | 6,47 | 6,41 | 6,36 | 6,31 | 6,28 |
| | | | | | | | | | |
| **8** | **0,100** | 2,56 | 2,54 | 2,52 | 2,50 | 2,49 | 2,48 | 2,46 | 2,45 |
| | **0,050** | 3,39 | 3,35 | 3,31 | 3,28 | 3,26 | 3,24 | 3,22 | 3,20 |
| | **0,010** | 5,91 | 5,81 | 5,73 | 5,67 | 5,61 | 5,56 | 5,52 | 5,48 |

... Lanjutan

| | | db-1 | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **db-2** | **alpha** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | **16** |
| **9** | **0,100** | 2,44 | 2,42 | 2,40 | 2,38 | 2,36 | 2,35 | 2,34 | 2,33 |
| | **0,050** | 3,18 | 3,14 | 3,10 | 3,07 | 3,05 | 3,03 | 3,01 | 2,99 |
| | **0,010** | 5,35 | 5,26 | 5,18 | 5,11 | 5,05 | 5,01 | 4,96 | 4,92 |
| | | | | | | | | | |
| **10** | **0,100** | 2,35 | 2,32 | 2,30 | 2,28 | 2,27 | 2,26 | 2,24 | 2,23 |
| | **0,050** | 3,02 | 2,98 | 2,94 | 2,91 | 2,89 | 2,86 | 2,85 | 2,83 |
| | **0,010** | 4,94 | 4,85 | 4,77 | 4,71 | 4,65 | 4,60 | 4,56 | 4,52 |
| | | | | | | | | | |
| **11** | **0,100** | 2,27 | 2,25 | 2,23 | 2,21 | 2,19 | 2,18 | 2,17 | 2,16 |
| | **0,050** | 2,90 | 2,85 | 2,82 | 2,79 | 2,76 | 2,74 | 2,72 | 2,70 |
| | **0,010** | 4,63 | 4,54 | 4,46 | 4,40 | 4,34 | 4,29 | 4,25 | 4,21 |
| | | | | | | | | | |
| **12** | **0,100** | 2,21 | 2,19 | 2,17 | 2,15 | 2,13 | 2,12 | 2,10 | 2,09 |
| | **0,050** | 2,80 | 2,75 | 2,72 | 2,69 | 2,66 | 2,64 | 2,62 | 2,60 |
| | **0,010** | 4,39 | 4,30 | 4,22 | 4,16 | 4,10 | 4,05 | 4,01 | 3,97 |
| | | | | | | | | | |
| **13** | **0,100** | 2,16 | 2,14 | 2,12 | 2,10 | 2,08 | 2,07 | 2,05 | 2,04 |
| | **0,050** | 2,71 | 2,67 | 2,63 | 2,60 | 2,58 | 2,55 | 2,53 | 2,51 |
| | **0,010** | 4,19 | 4,10 | 4,02 | 3,96 | 3,91 | 3,86 | 3,82 | 3,78 |
| | | | | | | | | | |
| **14** | **0,100** | 2,12 | 2,10 | 2,07 | 2,05 | 2,04 | 2,02 | 2,01 | 2,00 |
| | **0,050** | 2,65 | 2,60 | 2,57 | 2,53 | 2,51 | 2,48 | 2,46 | 2,44 |
| | **0,010** | 4,03 | 3,94 | 3,86 | 3,80 | 3,75 | 3,70 | 3,66 | 3,62 |
| | | | | | | | | | |
| **15** | **0,100** | 2,09 | 2,06 | 2,04 | 2,02 | 2,00 | 1,99 | 1,97 | 1,96 |
| | **0,050** | 2,59 | 2,54 | 2,51 | 2,48 | 2,45 | 2,42 | 2,40 | 2,38 |
| | **0,010** | 3,89 | 3,80 | 3,73 | 3,67 | 3,61 | 3,56 | 3,52 | 3,49 |
| | | | | | | | | | |
| **16** | **0,100** | 2,06 | 2,03 | 2,01 | 1,99 | 1,97 | 1,95 | 1,94 | 1,93 |
| | **0,050** | 2,54 | 2,49 | 2,46 | 2,42 | 2,40 | 2,37 | 2,35 | 2,33 |
| | **0,010** | 3,78 | 3,69 | 3,62 | 3,55 | 3,50 | 3,45 | 3,41 | 3,37 |

... Lanjutan

| | | db-1 | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **db-2** | **alpha** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | **16** |
| **17** | **0,100** | 2,03 | 2,00 | 1,98 | 1,96 | 1,94 | 1,93 | 1,91 | 1,90 |
| | **0,050** | 2,49 | 2,45 | 2,41 | 2,38 | 2,35 | 2,33 | 2,31 | 2,29 |
| | **0,010** | 3,68 | 3,59 | 3,52 | 3,46 | 3,40 | 3,35 | 3,31 | 3,27 |
| | | | | | | | | | |
| **18** | **0,100** | 2,00 | 1,98 | 1,95 | 1,93 | 1,92 | 1,90 | 1,89 | 1,87 |
| | **0,050** | 2,46 | 2,41 | 2,37 | 2,34 | 2,31 | 2,29 | 2,27 | 2,25 |
| | **0,010** | 3,60 | 3,51 | 3,43 | 3,37 | 3,32 | 3,27 | 3,23 | 3,19 |
| | | | | | | | | | |
| **19** | **0,100** | 1,98 | 1,96 | 1,93 | 1,91 | 1,89 | 1,88 | 1,86 | 1,85 |
| | **0,050** | 2,42 | 2,38 | 2,34 | 2,31 | 2,28 | 2,26 | 2,23 | 2,21 |
| | **0,010** | 3,52 | 3,43 | 3,36 | 3,30 | 3,24 | 3,19 | 3,15 | 3,12 |
| | | | | | | | | | |
| **20** | **0,100** | 1,96 | 1,94 | 1,91 | 1,89 | 1,87 | 1,86 | 1,84 | 1,83 |
| | **0,050** | 2,39 | 2,35 | 2,31 | 2,28 | 2,25 | 2,22 | 2,20 | 2,18 |
| | **0,010** | 3,46 | 3,37 | 3,29 | 3,23 | 3,18 | 3,13 | 3,09 | 3,05 |
| | | | | | | | | | |
| **21** | **0,100** | 1,95 | 1,92 | 1,90 | 1,87 | 1,86 | 1,84 | 1,83 | 1,81 |
| | **0,050** | 2,37 | 2,32 | 2,28 | 2,25 | 2,22 | 2,20 | 2,18 | 2,16 |
| | **0,010** | 3,40 | 3,31 | 3,24 | 3,17 | 3,12 | 3,07 | 3,03 | 2,99 |
| | | | | | | | | | |
| **22** | **0,100** | 1,93 | 1,90 | 1,88 | 1,86 | 1,84 | 1,83 | 1,81 | 1,80 |
| | **0,050** | 2,34 | 2,30 | 2,26 | 2,23 | 2,20 | 2,17 | 2,15 | 2,13 |
| | **0,010** | 3,35 | 3,26 | 3,18 | 3,12 | 3,07 | 3,02 | 2,98 | 2,94 |
| | | | | | | | | | |
| **23** | **0,100** | 1,92 | 1,89 | 1,87 | 1,84 | 1,83 | 1,81 | 1,80 | 1,78 |
| | **0,050** | 2,32 | 2,27 | 2,24 | 2,20 | 2,18 | 2,15 | 2,13 | 2,11 |
| | **0,010** | 3,30 | 3,21 | 3,14 | 3,07 | 3,02 | 2,97 | 2,93 | 2,89 |
| | | | | | | | | | |
| **24** | **0,100** | 1,91 | 1,88 | 1,85 | 1,83 | 1,81 | 1,80 | 1,78 | 1,77 |
| | **0,050** | 2,30 | 2,25 | 2,22 | 2,18 | 2,15 | 2,13 | 2,11 | 2,09 |
| | **0,010** | 3,26 | 3,17 | 3,09 | 3,03 | 2,98 | 2,93 | 2,89 | 2,85 |

... Lanjutan

| | | db-1 | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **db-2** | **alpha** | **17** | **18** | **19** | **20** | **21** | **22** | **23** | **24** |
| **1** | **0,100** | 61,46 | 61,57 | 61,66 | 61,74 | 61,81 | 61,88 | 61,95 | 62,00 |
| | **0,050** | 246,92 | 247,32 | 247,69 | 248,01 | 248,31 | 248,58 | 248,83 | 249,05 |
| | **0,010** | 6181,43 | 6191,53 | 6200,58 | 6208,73 | 6216,12 | 6222,84 | 6228,99 | 6234,63 |
| | | | | | | | | | |
| **2** | **0,100** | 9,43 | 9,44 | 9,44 | 9,44 | 9,44 | 9,45 | 9,45 | 9,45 |
| | **0,050** | 19,44 | 19,44 | 19,44 | 19,45 | 19,45 | 19,45 | 19,45 | 19,45 |
| | **0,010** | 99,44 | 99,44 | 99,45 | 99,45 | 99,45 | 99,45 | 99,46 | 99,46 |
| | | | | | | | | | |
| **3** | **0,100** | 5,19 | 5,19 | 5,19 | 5,18 | 5,18 | 5,18 | 5,18 | 5,18 |
| | **0,050** | 8,68 | 8,67 | 8,67 | 8,66 | 8,65 | 8,65 | 8,64 | 8,64 |
| | **0,010** | 26,79 | 26,75 | 26,72 | 26,69 | 26,66 | 26,64 | 26,62 | 26,60 |
| | | | | | | | | | |
| **4** | **0,100** | 3,86 | 3,85 | 3,85 | 3,84 | 3,84 | 3,84 | 3,83 | 3,83 |
| | **0,050** | 5,83 | 5,82 | 5,81 | 5,80 | 5,79 | 5,79 | 5,78 | 5,77 |
| | **0,010** | 14,11 | 14,08 | 14,05 | 14,02 | 13,99 | 13,97 | 13,95 | 13,93 |
| | | | | | | | | | |
| **5** | **0,100** | 3,22 | 3,22 | 3,21 | 3,21 | 3,20 | 3,20 | 3,19 | 3,19 |
| | **0,050** | 4,59 | 4,58 | 4,57 | 4,56 | 4,55 | 4,54 | 4,53 | 4,53 |
| | **0,010** | 9,64 | 9,61 | 9,58 | 9,55 | 9,53 | 9,51 | 9,49 | 9,47 |
| | | | | | | | | | |
| **6** | **0,100** | 2,85 | 2,85 | 2,84 | 2,84 | 2,83 | 2,83 | 2,82 | 2,82 |
| | **0,050** | 3,91 | 3,90 | 3,88 | 3,87 | 3,86 | 3,86 | 3,85 | 3,84 |
| | **0,010** | 7,48 | 7,45 | 7,42 | 7,40 | 7,37 | 7,35 | 7,33 | 7,31 |
| | | | | | | | | | |
| **7** | **0,100** | 2,61 | 2,61 | 2,60 | 2,59 | 2,59 | 2,58 | 2,58 | 2,58 |
| | **0,050** | 3,48 | 3,47 | 3,46 | 3,44 | 3,43 | 3,43 | 3,42 | 3,41 |
| | **0,010** | 6,24 | 6,21 | 6,18 | 6,16 | 6,13 | 6,11 | 6,09 | 6,07 |
| | | | | | | | | | |
| **8** | **0,100** | 2,45 | 2,44 | 2,43 | 2,42 | 2,42 | 2,41 | 2,41 | 2,40 |
| | **0,050** | 3,19 | 3,17 | 3,16 | 3,15 | 3,14 | 3,13 | 3,12 | 3,12 |
| | **0,010** | 5,44 | 5,41 | 5,38 | 5,36 | 5,34 | 5,32 | 5,30 | 5,28 |

... Lanjutan

| | | db-1 | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **db-2** | **alpha** | **17** | **18** | **19** | **20** | **21** | **22** | **23** | **24** |
| **9** | **0,100** | 2,32 | 2,31 | 2,30 | 2,30 | 2,29 | 2,29 | 2,28 | 2,28 |
| | **0,050** | 2,97 | 2,96 | 2,95 | 2,94 | 2,93 | 2,92 | 2,91 | 2,90 |
| | **0,010** | 4,89 | 4,86 | 4,83 | 4,81 | 4,79 | 4,77 | 4,75 | 4,73 |
| | | | | | | | | | |
| **10** | **0,100** | 2,22 | 2,22 | 2,21 | 2,20 | 2,19 | 2,19 | 2,18 | 2,18 |
| | **0,050** | 2,81 | 2,80 | 2,79 | 2,77 | 2,76 | 2,75 | 2,75 | 2,74 |
| | **0,010** | 4,49 | 4,46 | 4,43 | 4,41 | 4,38 | 4,36 | 4,34 | 4,33 |
| | | | | | | | | | |
| **11** | **0,100** | 2,15 | 2,14 | 2,13 | 2,12 | 2,12 | 2,11 | 2,11 | 2,10 |
| | **0,050** | 2,69 | 2,67 | 2,66 | 2,65 | 2,64 | 2,63 | 2,62 | 2,61 |
| | **0,010** | 4,18 | 4,15 | 4,12 | 4,10 | 4,08 | 4,06 | 4,04 | 4,02 |
| | | | | | | | | | |
| **12** | **0,100** | 2,08 | 2,08 | 2,07 | 2,06 | 2,05 | 2,05 | 2,04 | 2,04 |
| | **0,050** | 2,58 | 2,57 | 2,56 | 2,54 | 2,53 | 2,52 | 2,51 | 2,51 |
| | **0,010** | 3,94 | 3,91 | 3,88 | 3,86 | 3,84 | 3,82 | 3,80 | 3,78 |
| | | | | | | | | | |
| **13** | **0,100** | 2,03 | 2,02 | 2,01 | 2,01 | 2,00 | 1,99 | 1,99 | 1,98 |
| | **0,050** | 2,50 | 2,48 | 2,47 | 2,46 | 2,45 | 2,44 | 2,43 | 2,42 |
| | **0,010** | 3,75 | 3,72 | 3,69 | 3,66 | 3,64 | 3,62 | 3,60 | 3,59 |
| | | | | | | | | | |
| **14** | **0,100** | 1,99 | 1,98 | 1,97 | 1,96 | 1,96 | 1,95 | 1,94 | 1,94 |
| | **0,050** | 2,43 | 2,41 | 2,40 | 2,39 | 2,38 | 2,37 | 2,36 | 2,35 |
| | **0,010** | 3,59 | 3,56 | 3,53 | 3,51 | 3,48 | 3,46 | 3,44 | 3,43 |
| | | | | | | | | | |
| **15** | **0,100** | 1,95 | 1,94 | 1,93 | 1,92 | 1,92 | 1,91 | 1,90 | 1,90 |
| | **0,050** | 2,37 | 2,35 | 2,34 | 2,33 | 2,32 | 2,31 | 2,30 | 2,29 |
| | **0,010** | 3,45 | 3,42 | 3,40 | 3,37 | 3,35 | 3,33 | 3,31 | 3,29 |
| | | | | | | | | | |
| **16** | **0,100** | 1,92 | 1,91 | 1,90 | 1,89 | 1,88 | 1,88 | 1,87 | 1,87 |
| | **0,050** | 2,32 | 2,30 | 2,29 | 2,28 | 2,26 | 2,25 | 2,24 | 2,24 |
| | **0,010** | 3,34 | 3,31 | 3,28 | 3,26 | 3,24 | 3,22 | 3,20 | 3,18 |

... Lanjutan

| | | db-1 | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **db-2** | **alpha** | **17** | **18** | **19** | **20** | **21** | **22** | **23** | **24** |
| **17** | **0,100** | 1,89 | 1,88 | 1,87 | 1,86 | 1,86 | 1,85 | 1,84 | 1,84 |
| | **0,050** | 2,27 | 2,26 | 2,24 | 2,23 | 2,22 | 2,21 | 2,20 | 2,19 |
| | **0,010** | 3,24 | 3,21 | 3,19 | 3,16 | 3,14 | 3,12 | 3,10 | 3,08 |
| | | | | | | | | | |
| **18** | **0,100** | 1,86 | 1,85 | 1,84 | 1,84 | 1,83 | 1,82 | 1,82 | 1,81 |
| | **0,050** | 2,23 | 2,22 | 2,20 | 2,19 | 2,18 | 2,17 | 2,16 | 2,15 |
| | **0,010** | 3,16 | 3,13 | 3,10 | 3,08 | 3,05 | 3,03 | 3,02 | 3,00 |
| | | | | | | | | | |
| **19** | **0,100** | 1,84 | 1,83 | 1,82 | 1,81 | 1,81 | 1,80 | 1,79 | 1,79 |
| | **0,050** | 2,20 | 2,18 | 2,17 | 2,16 | 2,14 | 2,13 | 2,12 | 2,11 |
| | **0,010** | 3,08 | 3,05 | 3,03 | 3,00 | 2,98 | 2,96 | 2,94 | 2,92 |
| | | | | | | | | | |
| **20** | **0,100** | 1,82 | 1,81 | 1,80 | 1,79 | 1,79 | 1,78 | 1,77 | 1,77 |
| | **0,050** | 2,17 | 2,15 | 2,14 | 2,12 | 2,11 | 2,10 | 2,09 | 2,08 |
| | **0,010** | 3,02 | 2,99 | 2,96 | 2,94 | 2,92 | 2,90 | 2,88 | 2,86 |
| | | | | | | | | | |
| **21** | **0,100** | 1,80 | 1,79 | 1,78 | 1,78 | 1,77 | 1,76 | 1,75 | 1,75 |
| | **0,050** | 2,14 | 2,12 | 2,11 | 2,10 | 2,08 | 2,07 | 2,06 | 2,05 |
| | **0,010** | 2,96 | 2,93 | 2,90 | 2,88 | 2,86 | 2,84 | 2,82 | 2,80 |
| | | | | | | | | | |
| **22** | **0,100** | 1,79 | 1,78 | 1,77 | 1,76 | 1,75 | 1,74 | 1,74 | 1,73 |
| | **0,050** | 2,11 | 2,10 | 2,08 | 2,07 | 2,06 | 2,05 | 2,04 | 2,03 |
| | **0,010** | 2,91 | 2,88 | 2,85 | 2,83 | 2,81 | 2,78 | 2,77 | 2,75 |
| | | | | | | | | | |
| **23** | **0,100** | 1,77 | 1,76 | 1,75 | 1,74 | 1,74 | 1,73 | 1,72 | 1,72 |
| | **0,050** | 2,09 | 2,08 | 2,06 | 2,05 | 2,04 | 2,02 | 2,01 | 2,01 |
| | **0,010** | 2,86 | 2,83 | 2,80 | 2,78 | 2,76 | 2,74 | 2,72 | 2,70 |
| | | | | | | | | | |
| **24** | **0,100** | 1,76 | 1,75 | 1,74 | 1,73 | 1,72 | 1,71 | 1,71 | 1,70 |
| | **0,050** | 2,07 | 2,05 | 2,04 | 2,03 | 2,01 | 2,00 | 1,99 | 1,98 |
| | **0,010** | 2,82 | 2,79 | 2,76 | 2,74 | 2,72 | 2,70 | 2,68 | 2,66 |

# Tabel 5. Sebaran Binomial

| n | X | 0.05 | 0.10 | 0.15 | 0.20 | 0.25 | 0.30 | 0.35 | 0.40 | 0.45 | 0.50 | 0.55 | 0.60 | 0.65 | 0.70 | 0.75 | 0.80 | 0.85 | 0.90 | 0.95 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0.9500 | 0.9000 | 0.8500 | 0.8000 | 0.7500 | 0.7000 | 0.6500 | 0.6000 | 0.5500 | 0.5000 | 0.4500 | 0.4000 | 0.3500 | 0.3000 | 0.2500 | 0.2000 | 0.1500 | 0.1000 | 0.0500 |
| | 1 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| **n** | **x** | **0.05** | **0.10** | **0.15** | **0.20** | **0.25** | **0.30** | **0.35** | **0.40** | **0.45** | **0.50** | **0.55** | **0.60** | **0.65** | **0.70** | **0.75** | **0.80** | **0.85** | **0.90** | **0.95** |
| 2 | 0 | 0.9025 | 0.8100 | 0.7225 | 0.6400 | 0.5625 | 0.4900 | 0.4225 | 0.3600 | 0.3025 | 0.2500 | 0.2025 | 0.1600 | 0.1225 | 0.0900 | 0.0625 | 0.0400 | 0.0225 | 0.0100 | 0.0025 |
| | 1 | 0.9975 | 0.9900 | 0.9775 | 0.9600 | 0.9375 | 0.9100 | 0.8775 | 0.8400 | 0.7975 | 0.7500 | 0.6975 | 0.6400 | 0.5775 | 0.5100 | 0.4375 | 0.3600 | 0.2775 | 0.1900 | 0.0975 |
| | 2 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| **n** | **x** | **0.05** | **0.10** | **0.15** | **0.20** | **0.25** | **0.30** | **0.35** | **0.40** | **0.45** | **0.50** | **0.55** | **0.60** | **0.65** | **0.70** | **0.75** | **0.80** | **0.85** | **0.90** | **0.95** |
| 3 | 0 | 0.8574 | 0.7290 | 0.6141 | 0.5120 | 0.4219 | 0.3430 | 0.2746 | 0.2160 | 0.1664 | 0.1250 | 0.0911 | 0.0640 | 0.0429 | 0.0270 | 0.0156 | 0.0080 | 0.0034 | 0.0010 | 0.0001 |
| | 1 | 0.9928 | 0.9720 | 0.9393 | 0.8960 | 0.8438 | 0.7840 | 0.7183 | 0.6480 | 0.5748 | 0.5000 | 0.4253 | 0.3520 | 0.2818 | 0.2160 | 0.1563 | 0.1040 | 0.0608 | 0.0280 | 0.0073 |
| | 2 | 0.9999 | 0.9990 | 0.9966 | 0.9920 | 0.9844 | 0.9730 | 0.9571 | 0.9360 | 0.9089 | 0.8750 | 0.8336 | 0.7840 | 0.7254 | 0.6570 | 0.5781 | 0.4880 | 0.3859 | 0.2710 | 0.1426 |
| | 3 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| **n** | **x** | **0.05** | **0.10** | **0.15** | **0.20** | **0.25** | **0.30** | **0.35** | **0.40** | **0.45** | **0.50** | **0.55** | **0.60** | **0.65** | **0.70** | **0.75** | **0.80** | **0.85** | **0.90** | **0.95** |
| 4 | 0 | 0.8145 | 0.6561 | 0.5220 | 0.4096 | 0.3164 | 0.2401 | 0.1785 | 0.1296 | 0.0915 | 0.0625 | 0.0410 | 0.0256 | 0.0150 | 0.0081 | 0.0039 | 0.0016 | 0.0005 | 0.0001 | 0.0000 |
| | 1 | 0.9860 | 0.9477 | 0.8905 | 0.8192 | 0.7383 | 0.6517 | 0.5630 | 0.4752 | 0.3910 | 0.3125 | 0.2415 | 0.1792 | 0.1265 | 0.0837 | 0.0508 | 0.0272 | 0.0120 | 0.0037 | 0.0005 |
| | 2 | 0.9995 | 0.9963 | 0.9880 | 0.9728 | 0.9492 | 0.9163 | 0.8735 | 0.8208 | 0.7585 | 0.6875 | 0.6090 | 0.5248 | 0.4370 | 0.3483 | 0.2617 | 0.1808 | 0.1095 | 0.0523 | 0.0140 |
| | 3 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9995 | 0.9984 | 0.9961 | 0.9919 | 0.9850 | 0.9744 | 0.9590 | 0.9375 | 0.9085 | 0.8704 | 0.8215 | 0.7599 | 0.6836 | 0.5904 | 0.4780 | 0.3439 | 0.1855 |
| | 4 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| **n** | **x** | **0.05** | **0.10** | **0.15** | **0.20** | **0.25** | **0.30** | **0.35** | **0.40** | **0.45** | **0.50** | **0.55** | **0.60** | **0.65** | **0.70** | **0.75** | **0.80** | **0.85** | **0.90** | **0.95** |
| 5 | 0 | 0.7738 | 0.5905 | 0.4437 | 0.3277 | 0.2373 | 0.1681 | 0.1160 | 0.0778 | 0.0503 | 0.0313 | 0.0185 | 0.0102 | 0.0053 | 0.0024 | 0.0010 | 0.0003 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 1 | 0.9774 | 0.9185 | 0.8352 | 0.7373 | 0.6328 | 0.5282 | 0.4284 | 0.3370 | 0.2562 | 0.1875 | 0.1312 | 0.0870 | 0.0540 | 0.0308 | 0.0156 | 0.0067 | 0.0022 | 0.0005 | 0.0000 |
| | 2 | 0.9988 | 0.9914 | 0.9734 | 0.9421 | 0.8965 | 0.8369 | 0.7648 | 0.6826 | 0.5931 | 0.5000 | 0.4069 | 0.3174 | 0.2352 | 0.1631 | 0.1035 | 0.0579 | 0.0266 | 0.0086 | 0.0012 |
| | 3 | 1.0000 | 0.9995 | 0.9978 | 0.9933 | 0.9844 | 0.9692 | 0.9460 | 0.9130 | 0.8688 | 0.8125 | 0.7438 | 0.6630 | 0.5716 | 0.4718 | 0.3672 | 0.2627 | 0.1648 | 0.0815 | 0.0226 |
| | 4 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9990 | 0.9976 | 0.9947 | 0.9898 | 0.9815 | 0.9688 | 0.9497 | 0.9222 | 0.8840 | 0.8319 | 0.7627 | 0.6723 | 0.5563 | 0.4095 | 0.2262 |
| | 5 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| **n** | **x** | **0.05** | **0.10** | **0.15** | **0.20** | **0.25** | **0.30** | **0.35** | **0.40** | **0.45** | **0.50** | **0.55** | **0.60** | **0.65** | **0.70** | **0.75** | **0.80** | **0.85** | **0.90** | **0.95** |
| 6 | 0 | 0.7351 | 0.5314 | 0.3771 | 0.2621 | 0.1780 | 0.1176 | 0.0754 | 0.0467 | 0.0277 | 0.0156 | 0.0083 | 0.0041 | 0.0018 | 0.0007 | 0.0002 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 1 | 0.9672 | 0.8857 | 0.7765 | 0.6554 | 0.5339 | 0.4202 | 0.3191 | 0.2333 | 0.1636 | 0.1094 | 0.0692 | 0.0410 | 0.0223 | 0.0109 | 0.0046 | 0.0016 | 0.0004 | 0.0001 | 0.0000 |
| | 2 | 0.9978 | 0.9842 | 0.9527 | 0.9011 | 0.8306 | 0.7443 | 0.6471 | 0.5443 | 0.4415 | 0.3438 | 0.2553 | 0.1792 | 0.1174 | 0.0705 | 0.0376 | 0.0170 | 0.0059 | 0.0013 | 0.0001 |
| | 3 | 0.9999 | 0.9987 | 0.9941 | 0.9830 | 0.9624 | 0.9295 | 0.8826 | 0.8208 | 0.7447 | 0.6563 | 0.5585 | 0.4557 | 0.3529 | 0.2557 | 0.1694 | 0.0989 | 0.0473 | 0.0159 | 0.0022 |
| | 4 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9984 | 0.9954 | 0.9891 | 0.9777 | 0.9590 | 0.9308 | 0.8906 | 0.8364 | 0.7667 | 0.6809 | 0.5798 | 0.4661 | 0.3446 | 0.2235 | 0.1143 | 0.0328 |
| | 5 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9998 | 0.9993 | 0.9982 | 0.9959 | 0.9917 | 0.9844 | 0.9723 | 0.9533 | 0.9246 | 0.8824 | 0.8220 | 0.7379 | 0.6229 | 0.4686 | 0.2649 |
| | 6 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

| n | x | 0.05 | 0.10 | 0.15 | 0.20 | 0.25 | 0.30 | 0.35 | 0.40 | 0.45 | 0.50 | 0.55 | 0.60 | 0.65 | 0.70 | 0.75 | 0.80 | 0.85 | 0.90 | 0.95 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 0 | 0.6983 | 0.4783 | 0.3206 | 0.2097 | 0.1335 | 0.0824 | 0.0490 | 0.0280 | 0.0152 | 0.0078 | 0.0037 | 0.0016 | 0.0006 | 0.0002 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 1 | 0.9556 | 0.8503 | 0.7166 | 0.5767 | 0.4449 | 0.3294 | 0.2338 | 0.1586 | 0.1024 | 0.0625 | 0.0357 | 0.0188 | 0.0090 | 0.0038 | 0.0013 | 0.0004 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 2 | 0.9962 | 0.9743 | 0.9262 | 0.8520 | 0.7564 | 0.6471 | 0.5323 | 0.4199 | 0.3164 | 0.2266 | 0.1529 | 0.0963 | 0.0556 | 0.0288 | 0.0129 | 0.0047 | 0.0012 | 0.0002 | 0.0000 |
| | 3 | 0.9998 | 0.9973 | 0.9879 | 0.9667 | 0.9294 | 0.8740 | 0.8002 | 0.7102 | 0.6083 | 0.5000 | 0.3917 | 0.2898 | 0.1998 | 0.1260 | 0.0706 | 0.0333 | 0.0121 | 0.0027 | 0.0002 |
| | 4 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9988 | 0.9953 | 0.9871 | 0.9712 | 0.9444 | 0.9037 | 0.8471 | 0.7734 | 0.6836 | 0.5801 | 0.4677 | 0.3529 | 0.2436 | 0.1480 | 0.0738 | 0.0257 | 0.0038 |
| | 5 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9987 | 0.9962 | 0.9910 | 0.9812 | 0.9643 | 0.9375 | 0.8976 | 0.8414 | 0.7662 | 0.6706 | 0.5551 | 0.4233 | 0.2834 | 0.1497 | 0.0444 |
| | 6 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9998 | 0.9994 | 0.9984 | 0.9963 | 0.9922 | 0.9848 | 0.9720 | 0.9510 | 0.9176 | 0.8665 | 0.7903 | 0.6794 | 0.5217 | 0.3017 |
| | 7 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

| n | x | 0.05 | 0.10 | 0.15 | 0.20 | 0.25 | 0.30 | 0.35 | 0.40 | 0.45 | 0.50 | 0.55 | 0.60 | 0.65 | 0.70 | 0.75 | 0.80 | 0.85 | 0.90 | 0.95 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 0 | 0.6634 | 0.4305 | 0.2725 | 0.1678 | 0.1001 | 0.0576 | 0.0319 | 0.0168 | 0.0084 | 0.0039 | 0.0017 | 0.0007 | 0.0002 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 1 | 0.9428 | 0.8131 | 0.6572 | 0.5033 | 0.3671 | 0.2553 | 0.1691 | 0.1064 | 0.0632 | 0.0352 | 0.0181 | 0.0085 | 0.0036 | 0.0013 | 0.0004 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 2 | 0.9942 | 0.9619 | 0.8948 | 0.7969 | 0.6785 | 0.5518 | 0.4278 | 0.3154 | 0.2201 | 0.1445 | 0.0885 | 0.0498 | 0.0253 | 0.0113 | 0.0042 | 0.0012 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 3 | 0.9996 | 0.9950 | 0.9786 | 0.9437 | 0.8862 | 0.8059 | 0.7064 | 0.5941 | 0.4770 | 0.3633 | 0.2604 | 0.1737 | 0.1061 | 0.0580 | 0.0273 | 0.0104 | 0.0029 | 0.0004 | 0.0000 |
| | 4 | 1.0000 | 0.9996 | 0.9971 | 0.9896 | 0.9727 | 0.9420 | 0.8939 | 0.8263 | 0.7396 | 0.6367 | 0.5230 | 0.4059 | 0.2936 | 0.1941 | 0.1138 | 0.0563 | 0.0214 | 0.0050 | 0.0004 |
| | 5 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9988 | 0.9958 | 0.9887 | 0.9747 | 0.9502 | 0.9115 | 0.8555 | 0.7799 | 0.6846 | 0.5722 | 0.4482 | 0.3215 | 0.2031 | 0.1052 | 0.0381 | 0.0058 |
| | 6 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9987 | 0.9964 | 0.9915 | 0.9819 | 0.9648 | 0.9368 | 0.8936 | 0.8309 | 0.7447 | 0.6329 | 0.4967 | 0.3428 | 0.1869 | 0.0572 |
| | 7 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9998 | 0.9993 | 0.9983 | 0.9961 | 0.9916 | 0.9832 | 0.9681 | 0.9424 | 0.8999 | 0.8322 | 0.7275 | 0.5695 | 0.3366 |
| | 8 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

| n | x | 0.05 | 0.10 | 0.15 | 0.20 | 0.25 | 0.30 | 0.35 | 0.40 | 0.45 | 0.50 | 0.55 | 0.60 | 0.65 | 0.70 | 0.75 | 0.80 | 0.85 | 0.90 | 0.95 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 0 | 0.6302 | 0.3874 | 0.2316 | 0.1342 | 0.0751 | 0.0404 | 0.0207 | 0.0101 | 0.0046 | 0.0020 | 0.0008 | 0.0003 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 1 | 0.9288 | 0.7748 | 0.5995 | 0.4362 | 0.3003 | 0.1960 | 0.1211 | 0.0705 | 0.0385 | 0.0195 | 0.0091 | 0.0038 | 0.0014 | 0.0004 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 2 | 0.9916 | 0.9470 | 0.8591 | 0.7382 | 0.6007 | 0.4628 | 0.3373 | 0.2318 | 0.1495 | 0.0898 | 0.0498 | 0.0250 | 0.0112 | 0.0043 | 0.0013 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 3 | 0.9994 | 0.9917 | 0.9661 | 0.9144 | 0.8343 | 0.7297 | 0.6089 | 0.4826 | 0.3614 | 0.2539 | 0.1658 | 0.0994 | 0.0536 | 0.0253 | 0.0100 | 0.0031 | 0.0006 | 0.0001 | 0.0000 |
| | 4 | 1.0000 | 0.9991 | 0.9944 | 0.9804 | 0.9511 | 0.9012 | 0.8283 | 0.7334 | 0.6214 | 0.5000 | 0.3786 | 0.2666 | 0.1717 | 0.0988 | 0.0489 | 0.0196 | 0.0056 | 0.0009 | 0.0000 |
| | 5 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9994 | 0.9969 | 0.9900 | 0.9747 | 0.9464 | 0.9006 | 0.8342 | 0.7461 | 0.6386 | 0.5174 | 0.3911 | 0.2703 | 0.1657 | 0.0856 | 0.0339 | 0.0083 | 0.0006 |
| | 6 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9987 | 0.9957 | 0.9888 | 0.9750 | 0.9502 | 0.9102 | 0.8505 | 0.7682 | 0.6627 | 0.5372 | 0.3993 | 0.2618 | 0.1409 | 0.0530 | 0.0084 |
| | 7 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9986 | 0.9962 | 0.9909 | 0.9805 | 0.9615 | 0.9295 | 0.8789 | 0.8040 | 0.6997 | 0.5638 | 0.4005 | 0.2252 | 0.0712 |
| | 8 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9992 | 0.9980 | 0.9954 | 0.9899 | 0.9793 | 0.9596 | 0.9249 | 0.8658 | 0.7684 | 0.6126 | 0.3698 |
| | 9 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

| n | x | 0.05 | 0.10 | 0.15 | 0.20 | 0.25 | 0.30 | 0.35 | 0.40 | 0.45 | 0.50 | 0.55 | 0.60 | 0.65 | 0.70 | 0.75 | 0.80 | 0.85 | 0.90 | 0.95 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 0 | 0.5987 | 0.3487 | 0.1969 | 0.1074 | 0.0563 | 0.0282 | 0.0135 | 0.0060 | 0.0025 | 0.0010 | 0.0003 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 1 | 0.9139 | 0.7361 | 0.5443 | 0.3758 | 0.2440 | 0.1493 | 0.0860 | 0.0464 | 0.0233 | 0.0107 | 0.0045 | 0.0017 | 0.0005 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 2 | 0.9885 | 0.9298 | 0.8202 | 0.6778 | 0.5256 | 0.3828 | 0.2616 | 0.1673 | 0.0996 | 0.0547 | 0.0274 | 0.0123 | 0.0048 | 0.0016 | 0.0004 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 3 | 0.9990 | 0.9872 | 0.9500 | 0.8791 | 0.7759 | 0.6496 | 0.5138 | 0.3823 | 0.2660 | 0.1719 | 0.1020 | 0.0548 | 0.0260 | 0.0106 | 0.0035 | 0.0009 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 4 | 0.9999 | 0.9984 | 0.9901 | 0.9672 | 0.9219 | 0.8497 | 0.7515 | 0.6331 | 0.5044 | 0.3770 | 0.2616 | 0.1662 | 0.0949 | 0.0473 | 0.0197 | 0.0064 | 0.0014 | 0.0001 | 0.0000 |
| | 5 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9986 | 0.9936 | 0.9803 | 0.9527 | 0.9051 | 0.8338 | 0.7384 | 0.6230 | 0.4956 | 0.3669 | 0.2485 | 0.1503 | 0.0781 | 0.0328 | 0.0099 | 0.0016 | 0.0001 |

| n | x | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 6 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9991 | 0.9965 | 0.9894 | 0.9740 | 0.9452 | 0.8980 | 0.8281 | 0.7340 | 0.6177 | 0.4862 | 0.3504 | 0.2241 | 0.1209 | 0.0500 | 0.0128 | 0.0010 |
| | 7 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9984 | 0.9952 | 0.9877 | 0.9726 | 0.9453 | 0.9004 | 0.8327 | 0.7384 | 0.6172 | 0.4744 | 0.3222 | 0.1798 | 0.0702 | 0.0115 |
| | 8 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9995 | 0.9983 | 0.9955 | 0.9893 | 0.9767 | 0.9536 | 0.9140 | 0.8507 | 0.7560 | 0.6242 | 0.4557 | 0.2639 | 0.0861 |
| | 9 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9990 | 0.9975 | 0.9940 | 0.9865 | 0.9718 | 0.9437 | 0.8926 | 0.8031 | 0.6513 | 0.4013 |
| | 10 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| **n** | **x** | **0.05** | **0.10** | **0.15** | **0.20** | **0.25** | **0.30** | **0.35** | **0.40** | **0.45** | **0.50** | **0.55** | **0.60** | **0.65** | **0.70** | **0.75** | **0.80** | **0.85** | **0.90** | **0.95** |
| 11 | 0 | 0.5688 | 0.3138 | 0.1673 | 0.0859 | 0.0422 | 0.0198 | 0.0088 | 0.0036 | 0.0014 | 0.0005 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 1 | 0.8981 | 0.6974 | 0.4922 | 0.3221 | 0.1971 | 0.1130 | 0.0606 | 0.0302 | 0.0139 | 0.0059 | 0.0022 | 0.0007 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 2 | 0.9848 | 0.9104 | 0.7788 | 0.6174 | 0.4552 | 0.3127 | 0.2001 | 0.1189 | 0.0652 | 0.0327 | 0.0148 | 0.0059 | 0.0020 | 0.0006 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 3 | 0.9984 | 0.9815 | 0.9306 | 0.8389 | 0.7133 | 0.5696 | 0.4256 | 0.2963 | 0.1911 | 0.1133 | 0.0610 | 0.0293 | 0.0122 | 0.0043 | 0.0012 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 4 | 0.9999 | 0.9972 | 0.9841 | 0.9496 | 0.8854 | 0.7897 | 0.6683 | 0.5328 | 0.3971 | 0.2744 | 0.1738 | 0.0994 | 0.0501 | 0.0216 | 0.0076 | 0.0020 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 5 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9973 | 0.9883 | 0.9657 | 0.9218 | 0.8513 | 0.7535 | 0.6331 | 0.5000 | 0.3669 | 0.2465 | 0.1487 | 0.0782 | 0.0343 | 0.0117 | 0.0027 | 0.0003 | 0.0000 |
| | 6 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9980 | 0.9924 | 0.9784 | 0.9499 | 0.9006 | 0.8262 | 0.7256 | 0.6029 | 0.4672 | 0.3317 | 0.2103 | 0.1146 | 0.0504 | 0.0159 | 0.0028 | 0.0001 |
| | 7 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9988 | 0.9957 | 0.9878 | 0.9707 | 0.9390 | 0.8867 | 0.8089 | 0.7037 | 0.5744 | 0.4304 | 0.2867 | 0.1611 | 0.0694 | 0.0185 | 0.0016 |
| | 8 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9994 | 0.9980 | 0.9941 | 0.9852 | 0.9673 | 0.9348 | 0.8811 | 0.7999 | 0.6873 | 0.5448 | 0.3826 | 0.2212 | 0.0896 | 0.0152 |
| | 9 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9993 | 0.9978 | 0.9941 | 0.9861 | 0.9698 | 0.9394 | 0.8870 | 0.8029 | 0.6779 | 0.5078 | 0.3026 | 0.1019 |
| | 10 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9995 | 0.9986 | 0.9964 | 0.9912 | 0.9802 | 0.9578 | 0.9141 | 0.8327 | 0.6862 | 0.4312 |
| | 11 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| **n** | **x** | **0.05** | **0.10** | **0.15** | **0.20** | **0.25** | **0.30** | **0.35** | **0.40** | **0.45** | **0.50** | **0.55** | **0.60** | **0.65** | **0.70** | **0.75** | **0.80** | **0.85** | **0.90** | **0.95** |
| 12 | 0 | 0.5404 | 0.2824 | 0.1422 | 0.0687 | 0.0317 | 0.0138 | 0.0057 | 0.0022 | 0.0008 | 0.0002 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 1 | 0.8816 | 0.6590 | 0.4435 | 0.2749 | 0.1584 | 0.0850 | 0.0424 | 0.0196 | 0.0083 | 0.0032 | 0.0011 | 0.0003 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 2 | 0.9804 | 0.8891 | 0.7358 | 0.5583 | 0.3907 | 0.2528 | 0.1513 | 0.0834 | 0.0421 | 0.0193 | 0.0079 | 0.0028 | 0.0008 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 3 | 0.9978 | 0.9744 | 0.9078 | 0.7946 | 0.6488 | 0.4925 | 0.3467 | 0.2253 | 0.1345 | 0.0730 | 0.0356 | 0.0153 | 0.0056 | 0.0017 | 0.0004 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 4 | 0.9998 | 0.9957 | 0.9761 | 0.9274 | 0.8424 | 0.7237 | 0.5833 | 0.4382 | 0.3044 | 0.1938 | 0.1117 | 0.0573 | 0.0255 | 0.0095 | 0.0028 | 0.0006 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 5 | 1.0000 | 0.9995 | 0.9954 | 0.9806 | 0.9456 | 0.8822 | 0.7873 | 0.6652 | 0.5269 | 0.3872 | 0.2607 | 0.1582 | 0.0846 | 0.0386 | 0.0143 | 0.0039 | 0.0007 | 0.0001 | 0.0000 |
| | 6 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9993 | 0.9961 | 0.9857 | 0.9614 | 0.9154 | 0.8418 | 0.7393 | 0.6128 | 0.4731 | 0.3348 | 0.2127 | 0.1178 | 0.0544 | 0.0194 | 0.0046 | 0.0005 | 0.0000 |
| | 7 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9994 | 0.9972 | 0.9905 | 0.9745 | 0.9427 | 0.8883 | 0.8062 | 0.6956 | 0.5618 | 0.4167 | 0.2763 | 0.1576 | 0.0726 | 0.0239 | 0.0043 | 0.0002 |
| | 8 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9983 | 0.9944 | 0.9847 | 0.9644 | 0.9270 | 0.8655 | 0.7747 | 0.6533 | 0.5075 | 0.3512 | 0.2054 | 0.0922 | 0.0256 | 0.0022 |
| | 9 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9992 | 0.9972 | 0.9921 | 0.9807 | 0.9579 | 0.9166 | 0.8487 | 0.7472 | 0.6093 | 0.4417 | 0.2642 | 0.1109 | 0.0196 |
| | 10 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9989 | 0.9968 | 0.9917 | 0.9804 | 0.9576 | 0.9150 | 0.8416 | 0.7251 | 0.5565 | 0.3410 | 0.1184 |
| | 11 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9998 | 0.9992 | 0.9978 | 0.9943 | 0.9862 | 0.9683 | 0.9313 | 0.8578 | 0.7176 | 0.4596 |
| | 12 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| **n** | **x** | **0.05** | **0.10** | **0.15** | **0.20** | **0.25** | **0.30** | **0.35** | **0.40** | **0.45** | **0.50** | **0.55** | **0.60** | **0.65** | **0.70** | **0.75** | **0.80** | **0.85** | **0.90** | **0.95** |
| 13 | 0 | 0.5133 | 0.2542 | 0.1209 | 0.0550 | 0.0238 | 0.0097 | 0.0037 | 0.0013 | 0.0004 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 1 | 0.8646 | 0.6213 | 0.3983 | 0.2336 | 0.1267 | 0.0637 | 0.0296 | 0.0126 | 0.0049 | 0.0017 | 0.0005 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 0.9755 | 0.8661 | 0.6920 | 0.5017 | 0.3326 | 0.2025 | 0.1132 | 0.0579 | 0.0269 | 0.0112 | 0.0041 | 0.0013 | 0.0003 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 3 | 0.9969 | 0.9658 | 0.8820 | 0.7473 | 0.5843 | 0.4206 | 0.2783 | 0.1686 | 0.0929 | 0.0461 | 0.0203 | 0.0078 | 0.0025 | 0.0007 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 4 | 0.9997 | 0.9935 | 0.9658 | 0.9009 | 0.7940 | 0.6543 | 0.5005 | 0.3530 | 0.2279 | 0.1334 | 0.0698 | 0.0321 | 0.0126 | 0.0040 | 0.0010 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 5 | 1.0000 | 0.9991 | 0.9925 | 0.9700 | 0.9198 | 0.8346 | 0.7159 | 0.5744 | 0.4268 | 0.2905 | 0.1788 | 0.0977 | 0.0462 | 0.0182 | 0.0056 | 0.0012 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 6 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9987 | 0.9930 | 0.9757 | 0.9376 | 0.8705 | 0.7712 | 0.6437 | 0.5000 | 0.3563 | 0.2288 | 0.1295 | 0.0624 | 0.0243 | 0.0070 | 0.0013 | 0.0001 | 0.0000 |
| | 7 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9988 | 0.9944 | 0.9818 | 0.9538 | 0.9023 | 0.8212 | 0.7095 | 0.5732 | 0.4256 | 0.2841 | 0.1654 | 0.0802 | 0.0300 | 0.0075 | 0.0009 | 0.0000 |
| | 8 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9990 | 0.9960 | 0.9874 | 0.9679 | 0.9302 | 0.8666 | 0.7721 | 0.6470 | 0.4995 | 0.3457 | 0.2060 | 0.0991 | 0.0342 | 0.0065 | 0.0003 |
| | 9 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9993 | 0.9975 | 0.9922 | 0.9797 | 0.9539 | 0.9071 | 0.8314 | 0.7217 | 0.5794 | 0.4157 | 0.2527 | 0.1180 | 0.0342 | 0.0031 |
| | 10 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9987 | 0.9959 | 0.9888 | 0.9731 | 0.9421 | 0.8868 | 0.7975 | 0.6674 | 0.4983 | 0.3080 | 0.1339 | 0.0245 |
| | 11 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9995 | 0.9983 | 0.9951 | 0.9874 | 0.9704 | 0.9363 | 0.8733 | 0.7664 | 0.6017 | 0.3787 | 0.1354 |
| | 12 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9987 | 0.9963 | 0.9903 | 0.9762 | 0.9450 | 0.8791 | 0.7458 | 0.4867 |
| | 13 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| **n** | **x** | **0.05** | **0.10** | **0.15** | **0.20** | **0.25** | **0.30** | **0.35** | **0.40** | **0.45** | **0.50** | **0.55** | **0.60** | **0.65** | **0.70** | **0.75** | **0.80** | **0.85** | **0.90** | **0.95** |
| 14 | 0 | 0.4877 | 0.2288 | 0.1028 | 0.0440 | 0.0178 | 0.0068 | 0.0024 | 0.0008 | 0.0002 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 1 | 0.8470 | 0.5846 | 0.3567 | 0.1979 | 0.1010 | 0.0475 | 0.0205 | 0.0081 | 0.0029 | 0.0009 | 0.0003 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 2 | 0.9699 | 0.8416 | 0.6479 | 0.4481 | 0.2811 | 0.1608 | 0.0839 | 0.0398 | 0.0170 | 0.0065 | 0.0022 | 0.0006 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 3 | 0.9958 | 0.9559 | 0.8535 | 0.6982 | 0.5213 | 0.3552 | 0.2205 | 0.1243 | 0.0632 | 0.0287 | 0.0114 | 0.0039 | 0.0011 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 4 | 0.9996 | 0.9908 | 0.9533 | 0.8702 | 0.7415 | 0.5842 | 0.4227 | 0.2793 | 0.1672 | 0.0898 | 0.0426 | 0.0175 | 0.0060 | 0.0017 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 5 | 1.0000 | 0.9985 | 0.9885 | 0.9561 | 0.8883 | 0.7805 | 0.6405 | 0.4859 | 0.3373 | 0.2120 | 0.1189 | 0.0583 | 0.0243 | 0.0083 | 0.0022 | 0.0004 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 6 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9978 | 0.9884 | 0.9617 | 0.9067 | 0.8164 | 0.6925 | 0.5461 | 0.3953 | 0.2586 | 0.1501 | 0.0753 | 0.0315 | 0.0103 | 0.0024 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 7 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9976 | 0.9897 | 0.9685 | 0.9247 | 0.8499 | 0.7414 | 0.6047 | 0.4539 | 0.3075 | 0.1836 | 0.0933 | 0.0383 | 0.0116 | 0.0022 | 0.0002 | 0.0000 |
| | 8 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9996 | 0.9978 | 0.9917 | 0.9757 | 0.9417 | 0.8811 | 0.7880 | 0.6627 | 0.5141 | 0.3595 | 0.2195 | 0.1117 | 0.0439 | 0.0115 | 0.0015 | 0.0000 |
| | 9 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9983 | 0.9940 | 0.9825 | 0.9574 | 0.9102 | 0.8328 | 0.7207 | 0.5773 | 0.4158 | 0.2585 | 0.1298 | 0.0467 | 0.0092 | 0.0004 |
| | 10 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9989 | 0.9961 | 0.9886 | 0.9713 | 0.9368 | 0.8757 | 0.7795 | 0.6448 | 0.4787 | 0.3018 | 0.1465 | 0.0441 | 0.0042 |
| | 11 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9994 | 0.9978 | 0.9935 | 0.9830 | 0.9602 | 0.9161 | 0.8392 | 0.7189 | 0.5519 | 0.3521 | 0.1584 | 0.0301 |
| | 12 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9991 | 0.9971 | 0.9919 | 0.9795 | 0.9525 | 0.8990 | 0.8021 | 0.6433 | 0.4154 | 0.1530 |
| | 13 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9998 | 0.9992 | 0.9976 | 0.9932 | 0.9822 | 0.9560 | 0.8972 | 0.7712 | 0.5123 |
| | 14 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| **n** | **x** | **0.05** | **0.10** | **0.15** | **0.20** | **0.25** | **0.30** | **0.35** | **0.40** | **0.45** | **0.50** | **0.55** | **0.60** | **0.65** | **0.70** | **0.75** | **0.80** | **0.85** | **0.90** | **0.95** |
| 15 | 0 | 0.4633 | 0.2059 | 0.0874 | 0.0352 | 0.0134 | 0.0047 | 0.0016 | 0.0005 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 1 | 0.8290 | 0.5490 | 0.3186 | 0.1671 | 0.0802 | 0.0353 | 0.0142 | 0.0052 | 0.0017 | 0.0005 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 2 | 0.9638 | 0.8159 | 0.6042 | 0.3980 | 0.2361 | 0.1268 | 0.0617 | 0.0271 | 0.0107 | 0.0037 | 0.0011 | 0.0003 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 3 | 0.9945 | 0.9444 | 0.8227 | 0.6482 | 0.4613 | 0.2969 | 0.1727 | 0.0905 | 0.0424 | 0.0176 | 0.0063 | 0.0019 | 0.0005 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 4 | 0.9994 | 0.9873 | 0.9383 | 0.8358 | 0.6865 | 0.5155 | 0.3519 | 0.2173 | 0.1204 | 0.0592 | 0.0255 | 0.0093 | 0.0028 | 0.0007 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 5 | 0.9999 | 0.9978 | 0.9832 | 0.9389 | 0.8516 | 0.7216 | 0.5643 | 0.4032 | 0.2608 | 0.1509 | 0.0769 | 0.0338 | 0.0124 | 0.0037 | 0.0008 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 6 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9964 | 0.9819 | 0.9434 | 0.8689 | 0.7548 | 0.6098 | 0.4522 | 0.3036 | 0.1818 | 0.0950 | 0.0422 | 0.0152 | 0.0042 | 0.0008 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 7 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9994 | 0.9958 | 0.9827 | 0.9500 | 0.8868 | 0.7869 | 0.6535 | 0.5000 | 0.3465 | 0.2131 | 0.1132 | 0.0500 | 0.0173 | 0.0042 | 0.0006 | 0.0000 | 0.0000 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9992 | 0.9958 | 0.9848 | 0.9578 | 0.9050 | 0.8182 | 0.6964 | 0.5478 | 0.3902 | 0.2452 | 0.1311 | 0.0566 | 0.0181 | 0.0036 | 0.0003 | 0.0000 |
| | 9 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9992 | 0.9963 | 0.9876 | 0.9662 | 0.9231 | 0.8491 | 0.7392 | 0.5968 | 0.4357 | 0.2784 | 0.1484 | 0.0611 | 0.0168 | 0.0022 | 0.0001 |
| | 10 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9993 | 0.9972 | 0.9907 | 0.9745 | 0.9408 | 0.8796 | 0.7827 | 0.6481 | 0.4845 | 0.3135 | 0.1642 | 0.0617 | 0.0127 | 0.0006 |
| | 11 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9995 | 0.9981 | 0.9937 | 0.9824 | 0.9576 | 0.9095 | 0.8273 | 0.7031 | 0.5387 | 0.3518 | 0.1773 | 0.0556 | 0.0055 |
| | 12 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9989 | 0.9963 | 0.9893 | 0.9729 | 0.9383 | 0.8732 | 0.7639 | 0.6020 | 0.3958 | 0.1841 | 0.0362 |
| | 13 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9995 | 0.9983 | 0.9948 | 0.9858 | 0.9647 | 0.9198 | 0.8329 | 0.6814 | 0.4510 | 0.1710 |
| | 14 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9995 | 0.9984 | 0.9953 | 0.9866 | 0.9648 | 0.9126 | 0.7941 | 0.5367 |
| | 15 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| **n** | **x** | **0.05** | **0.10** | **0.15** | **0.20** | **0.25** | **0.30** | **0.35** | **0.40** | **0.45** | **0.50** | **0.55** | **0.60** | **0.65** | **0.70** | **0.75** | **0.80** | **0.85** | **0.90** | **0.95** |
| 16 | 0 | 0.4401 | 0.1853 | 0.0743 | 0.0281 | 0.0100 | 0.0033 | 0.0010 | 0.0003 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 1 | 0.8108 | 0.5147 | 0.2839 | 0.1407 | 0.0635 | 0.0261 | 0.0098 | 0.0033 | 0.0010 | 0.0003 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 2 | 0.9571 | 0.7892 | 0.5614 | 0.3518 | 0.1971 | 0.0994 | 0.0451 | 0.0183 | 0.0066 | 0.0021 | 0.0006 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 3 | 0.9930 | 0.9316 | 0.7899 | 0.5981 | 0.4050 | 0.2459 | 0.1339 | 0.0651 | 0.0281 | 0.0106 | 0.0035 | 0.0009 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 4 | 0.9991 | 0.9830 | 0.9209 | 0.7982 | 0.6302 | 0.4499 | 0.2892 | 0.1666 | 0.0853 | 0.0384 | 0.0149 | 0.0049 | 0.0013 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 5 | 0.9999 | 0.9967 | 0.9765 | 0.9183 | 0.8103 | 0.6598 | 0.4900 | 0.3288 | 0.1976 | 0.1051 | 0.0486 | 0.0191 | 0.0062 | 0.0016 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 6 | 1.0000 | 0.9995 | 0.9944 | 0.9733 | 0.9204 | 0.8247 | 0.6881 | 0.5272 | 0.3660 | 0.2272 | 0.1241 | 0.0583 | 0.0229 | 0.0071 | 0.0016 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 7 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9989 | 0.9930 | 0.9729 | 0.9256 | 0.8406 | 0.7161 | 0.5629 | 0.4018 | 0.2559 | 0.1423 | 0.0671 | 0.0257 | 0.0075 | 0.0015 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 8 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9985 | 0.9925 | 0.9743 | 0.9329 | 0.8577 | 0.7441 | 0.5982 | 0.4371 | 0.2839 | 0.1594 | 0.0744 | 0.0271 | 0.0070 | 0.0011 | 0.0001 | 0.0000 |
| | 9 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9984 | 0.9929 | 0.9771 | 0.9417 | 0.8759 | 0.7728 | 0.6340 | 0.4728 | 0.3119 | 0.1753 | 0.0796 | 0.0267 | 0.0056 | 0.0005 | 0.0000 |
| | 10 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9984 | 0.9938 | 0.9809 | 0.9514 | 0.8949 | 0.8024 | 0.6712 | 0.5100 | 0.3402 | 0.1897 | 0.0817 | 0.0235 | 0.0033 | 0.0001 |
| | 11 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9987 | 0.9951 | 0.9851 | 0.9616 | 0.9147 | 0.8334 | 0.7108 | 0.5501 | 0.3698 | 0.2018 | 0.0791 | 0.0170 | 0.0009 |
| | 12 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9991 | 0.9965 | 0.9894 | 0.9719 | 0.9349 | 0.8661 | 0.7541 | 0.5950 | 0.4019 | 0.2101 | 0.0684 | 0.0070 |
| | 13 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9994 | 0.9979 | 0.9934 | 0.9817 | 0.9549 | 0.9006 | 0.8029 | 0.6482 | 0.4386 | 0.2108 | 0.0429 |
| | 14 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9990 | 0.9967 | 0.9902 | 0.9739 | 0.9365 | 0.8593 | 0.7161 | 0.4853 | 0.1892 |
| | 15 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9990 | 0.9967 | 0.9900 | 0.9719 | 0.9257 | 0.8147 | 0.5599 |
| | 16 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| **n** | **x** | **0.05** | **0.10** | **0.15** | **0.20** | **0.25** | **0.30** | **0.35** | **0.40** | **0.45** | **0.50** | **0.55** | **0.60** | **0.65** | **0.70** | **0.75** | **0.80** | **0.85** | **0.90** | **0.95** |
| 17 | 0 | 0.4181 | 0.1668 | 0.0631 | 0.0225 | 0.0075 | 0.0023 | 0.0007 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 1 | 0.7922 | 0.4818 | 0.2525 | 0.1182 | 0.0501 | 0.0193 | 0.0067 | 0.0021 | 0.0006 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 2 | 0.9497 | 0.7618 | 0.5198 | 0.3096 | 0.1637 | 0.0774 | 0.0327 | 0.0123 | 0.0041 | 0.0012 | 0.0003 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 3 | 0.9912 | 0.9174 | 0.7556 | 0.5489 | 0.3530 | 0.2019 | 0.1028 | 0.0464 | 0.0184 | 0.0064 | 0.0019 | 0.0005 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 4 | 0.9988 | 0.9779 | 0.9013 | 0.7582 | 0.5739 | 0.3887 | 0.2348 | 0.1260 | 0.0596 | 0.0245 | 0.0086 | 0.0025 | 0.0006 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 5 | 0.9999 | 0.9953 | 0.9681 | 0.8943 | 0.7653 | 0.5968 | 0.4197 | 0.2639 | 0.1471 | 0.0717 | 0.0301 | 0.0106 | 0.0030 | 0.0007 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 6 | 1.0000 | 0.9992 | 0.9917 | 0.9623 | 0.8929 | 0.7752 | 0.6188 | 0.4478 | 0.2902 | 0.1662 | 0.0826 | 0.0348 | 0.0120 | 0.0032 | 0.0006 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 7 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9983 | 0.9891 | 0.9598 | 0.8954 | 0.7872 | 0.6405 | 0.4743 | 0.3145 | 0.1834 | 0.0919 | 0.0383 | 0.0127 | 0.0031 | 0.0005 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9974 | 0.9876 | 0.9597 | 0.9006 | 0.8011 | 0.6626 | 0.5000 | 0.3374 | 0.1989 | 0.0994 | 0.0403 | 0.0124 | 0.0026 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 9 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9995 | 0.9969 | 0.9873 | 0.9617 | 0.9081 | 0.8166 | 0.6855 | 0.5257 | 0.3595 | 0.2128 | 0.1046 | 0.0402 | 0.0109 | 0.0017 | 0.0001 | 0.0000 |
| | 10 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9994 | 0.9968 | 0.9880 | 0.9652 | 0.9174 | 0.8338 | 0.7098 | 0.5522 | 0.3812 | 0.2248 | 0.1071 | 0.0377 | 0.0083 | 0.0008 | 0.0000 |
| | 11 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9993 | 0.9970 | 0.9894 | 0.9699 | 0.9283 | 0.8529 | 0.7361 | 0.5803 | 0.4032 | 0.2347 | 0.1057 | 0.0319 | 0.0047 | 0.0001 |
| | 12 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9994 | 0.9975 | 0.9914 | 0.9755 | 0.9404 | 0.8740 | 0.7652 | 0.6113 | 0.4261 | 0.2418 | 0.0987 | 0.0221 | 0.0012 |
| | 13 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9995 | 0.9981 | 0.9936 | 0.9816 | 0.9536 | 0.8972 | 0.7981 | 0.6470 | 0.4511 | 0.2444 | 0.0826 | 0.0088 |
| | 14 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9988 | 0.9959 | 0.9877 | 0.9673 | 0.9226 | 0.8363 | 0.6904 | 0.4802 | 0.2382 | 0.0503 |
| | 15 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9994 | 0.9979 | 0.9933 | 0.9807 | 0.9499 | 0.8818 | 0.7475 | 0.5182 | 0.2078 |
| | 16 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9993 | 0.9977 | 0.9925 | 0.9775 | 0.9369 | 0.8332 | 0.5819 |
| | 17 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| **n** | **x** | **0.05** | **0.10** | **0.15** | **0.20** | **0.25** | **0.30** | **0.35** | **0.40** | **0.45** | **0.50** | **0.55** | **0.60** | **0.65** | **0.70** | **0.75** | **0.80** | **0.85** | **0.90** | **0.95** |
| 18 | 0 | 0.3972 | 0.1501 | 0.0536 | 0.0180 | 0.0056 | 0.0016 | 0.0004 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 1 | 0.7735 | 0.4503 | 0.2241 | 0.0991 | 0.0395 | 0.0142 | 0.0046 | 0.0013 | 0.0003 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 2 | 0.9419 | 0.7338 | 0.4797 | 0.2713 | 0.1353 | 0.0600 | 0.0236 | 0.0082 | 0.0025 | 0.0007 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 3 | 0.9891 | 0.9018 | 0.7202 | 0.5010 | 0.3057 | 0.1646 | 0.0783 | 0.0328 | 0.0120 | 0.0038 | 0.0010 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 4 | 0.9985 | 0.9718 | 0.8794 | 0.7164 | 0.5187 | 0.3327 | 0.1886 | 0.0942 | 0.0411 | 0.0154 | 0.0049 | 0.0013 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 5 | 0.9998 | 0.9936 | 0.9581 | 0.8671 | 0.7175 | 0.5344 | 0.3550 | 0.2088 | 0.1077 | 0.0481 | 0.0183 | 0.0058 | 0.0014 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 6 | 1.0000 | 0.9988 | 0.9882 | 0.9487 | 0.8610 | 0.7217 | 0.5491 | 0.3743 | 0.2258 | 0.1189 | 0.0537 | 0.0203 | 0.0062 | 0.0014 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 7 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9973 | 0.9837 | 0.9431 | 0.8593 | 0.7283 | 0.5634 | 0.3915 | 0.2403 | 0.1280 | 0.0576 | 0.0212 | 0.0061 | 0.0012 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 8 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9995 | 0.9957 | 0.9807 | 0.9404 | 0.8609 | 0.7368 | 0.5778 | 0.4073 | 0.2527 | 0.1347 | 0.0597 | 0.0210 | 0.0054 | 0.0009 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 9 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9991 | 0.9946 | 0.9790 | 0.9403 | 0.8653 | 0.7473 | 0.5927 | 0.4222 | 0.2632 | 0.1391 | 0.0596 | 0.0193 | 0.0043 | 0.0005 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 10 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9988 | 0.9939 | 0.9788 | 0.9424 | 0.8720 | 0.7597 | 0.6085 | 0.4366 | 0.2717 | 0.1407 | 0.0569 | 0.0163 | 0.0027 | 0.0002 | 0.0000 |
| | 11 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9986 | 0.9938 | 0.9797 | 0.9463 | 0.8811 | 0.7742 | 0.6257 | 0.4509 | 0.2783 | 0.1390 | 0.0513 | 0.0118 | 0.0012 | 0.0000 |
| | 12 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9986 | 0.9942 | 0.9817 | 0.9519 | 0.8923 | 0.7912 | 0.6450 | 0.4656 | 0.2825 | 0.1329 | 0.0419 | 0.0064 | 0.0002 |
| | 13 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9987 | 0.9951 | 0.9846 | 0.9589 | 0.9058 | 0.8114 | 0.6673 | 0.4813 | 0.2836 | 0.1206 | 0.0282 | 0.0015 |
| | 14 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9990 | 0.9962 | 0.9880 | 0.9672 | 0.9217 | 0.8354 | 0.6943 | 0.4990 | 0.2798 | 0.0982 | 0.0109 |
| | 15 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9993 | 0.9975 | 0.9918 | 0.9764 | 0.9400 | 0.8647 | 0.7287 | 0.5203 | 0.2662 | 0.0581 |
| | 16 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9987 | 0.9954 | 0.9858 | 0.9605 | 0.9009 | 0.7759 | 0.5497 | 0.2265 |
| | 17 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9984 | 0.9944 | 0.9820 | 0.9464 | 0.8499 | 0.6028 |
| | 18 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| **n** | **x** | **0.05** | **0.10** | **0.15** | **0.20** | **0.25** | **0.30** | **0.35** | **0.40** | **0.45** | **0.50** | **0.55** | **0.60** | **0.65** | **0.70** | **0.75** | **0.80** | **0.85** | **0.90** | **0.95** |
| 19 | 0 | 0.3774 | 0.1351 | 0.0456 | 0.0144 | 0.0042 | 0.0011 | 0.0003 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 1 | 0.7547 | 0.4203 | 0.1985 | 0.0829 | 0.0310 | 0.0104 | 0.0031 | 0.0008 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 2 | 0.9335 | 0.7054 | 0.4413 | 0.2369 | 0.1113 | 0.0462 | 0.0170 | 0.0055 | 0.0015 | 0.0004 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 3 | 0.9868 | 0.8850 | 0.6841 | 0.4551 | 0.2631 | 0.1332 | 0.0591 | 0.0230 | 0.0077 | 0.0022 | 0.0005 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 4 | 0.9980 | 0.9648 | 0.8556 | 0.6733 | 0.4654 | 0.2822 | 0.1500 | 0.0696 | 0.0280 | 0.0096 | 0.0028 | 0.0006 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 5 | 0.9998 | 0.9914 | 0.9463 | 0.8369 | 0.6678 | 0.4739 | 0.2968 | 0.1629 | 0.0777 | 0.0318 | 0.0109 | 0.0031 | 0.0007 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 6 | 1.0000 | 0.9983 | 0.9837 | 0.9324 | 0.8251 | 0.6655 | 0.4812 | 0.3081 | 0.1727 | 0.0835 | 0.0342 | 0.0116 | 0.0031 | 0.0006 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 7 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9959 | 0.9767 | 0.9225 | 0.8180 | 0.6656 | 0.4878 | 0.3169 | 0.1796 | 0.0871 | 0.0352 | 0.0114 | 0.0028 | 0.0005 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 8 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9992 | 0.9933 | 0.9713 | 0.9161 | 0.8145 | 0.6675 | 0.4940 | 0.3238 | 0.1841 | 0.0885 | 0.0347 | 0.0105 | 0.0023 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 9 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9984 | 0.9911 | 0.9674 | 0.9125 | 0.8139 | 0.6710 | 0.5000 | 0.3290 | 0.1861 | 0.0875 | 0.0326 | 0.0089 | 0.0016 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 10 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9977 | 0.9895 | 0.9653 | 0.9115 | 0.8159 | 0.6762 | 0.5060 | 0.3325 | 0.1855 | 0.0839 | 0.0287 | 0.0067 | 0.0008 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 11 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9995 | 0.9972 | 0.9886 | 0.9648 | 0.9129 | 0.8204 | 0.6831 | 0.5122 | 0.3344 | 0.1820 | 0.0775 | 0.0233 | 0.0041 | 0.0003 | 0.0000 |
| | 12 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9994 | 0.9969 | 0.9884 | 0.9658 | 0.9165 | 0.8273 | 0.6919 | 0.5188 | 0.3345 | 0.1749 | 0.0676 | 0.0163 | 0.0017 | 0.0000 |
| | 13 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9993 | 0.9969 | 0.9891 | 0.9682 | 0.9223 | 0.8371 | 0.7032 | 0.5261 | 0.3322 | 0.1631 | 0.0537 | 0.0086 | 0.0002 |
| | 14 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9994 | 0.9972 | 0.9904 | 0.9720 | 0.9304 | 0.8500 | 0.7178 | 0.5346 | 0.3267 | 0.1444 | 0.0352 | 0.0020 |
| | 15 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9995 | 0.9978 | 0.9923 | 0.9770 | 0.9409 | 0.8668 | 0.7369 | 0.5449 | 0.3159 | 0.1150 | 0.0132 |
| | 16 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9985 | 0.9945 | 0.9830 | 0.9538 | 0.8887 | 0.7631 | 0.5587 | 0.2946 | 0.0665 |
| | 17 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9992 | 0.9969 | 0.9896 | 0.9690 | 0.9171 | 0.8015 | 0.5797 | 0.2453 |
| | 18 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9989 | 0.9958 | 0.9856 | 0.9544 | 0.8649 | 0.6226 |
| | 19 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| **n** | **x** | **0.05** | **0.10** | **0.15** | **0.20** | **0.25** | **0.30** | **0.35** | **0.40** | **0.45** | **0.50** | **0.55** | **0.60** | **0.65** | **0.70** | **0.75** | **0.80** | **0.85** | **0.90** | **0.95** |
| 20 | 0 | 0.3585 | 0.1216 | 0.0388 | 0.0115 | 0.0032 | 0.0008 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 1 | 0.7358 | 0.3917 | 0.1756 | 0.0692 | 0.0243 | 0.0076 | 0.0021 | 0.0005 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 2 | 0.9245 | 0.6769 | 0.4049 | 0.2061 | 0.0913 | 0.0355 | 0.0121 | 0.0036 | 0.0009 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 3 | 0.9841 | 0.8670 | 0.6477 | 0.4114 | 0.2252 | 0.1071 | 0.0444 | 0.0160 | 0.0049 | 0.0013 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 4 | 0.9974 | 0.9568 | 0.8298 | 0.6296 | 0.4148 | 0.2375 | 0.1182 | 0.0510 | 0.0189 | 0.0059 | 0.0015 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 5 | 0.9997 | 0.9887 | 0.9327 | 0.8042 | 0.6172 | 0.4164 | 0.2454 | 0.1256 | 0.0553 | 0.0207 | 0.0064 | 0.0016 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 6 | 1.0000 | 0.9976 | 0.9781 | 0.9133 | 0.7858 | 0.6080 | 0.4166 | 0.2500 | 0.1299 | 0.0577 | 0.0214 | 0.0065 | 0.0015 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 7 | 1.0000 | 0.9996 | 0.9941 | 0.9679 | 0.8982 | 0.7723 | 0.6010 | 0.4159 | 0.2520 | 0.1316 | 0.0580 | 0.0210 | 0.0060 | 0.0013 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 8 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9987 | 0.9900 | 0.9591 | 0.8867 | 0.7624 | 0.5956 | 0.4143 | 0.2517 | 0.1308 | 0.0565 | 0.0196 | 0.0051 | 0.0009 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 9 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9974 | 0.9861 | 0.9520 | 0.8782 | 0.7553 | 0.5914 | 0.4119 | 0.2493 | 0.1275 | 0.0532 | 0.0171 | 0.0039 | 0.0006 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 10 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9994 | 0.9961 | 0.9829 | 0.9468 | 0.8725 | 0.7507 | 0.5881 | 0.4086 | 0.2447 | 0.1218 | 0.0480 | 0.0139 | 0.0026 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 11 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9991 | 0.9949 | 0.9804 | 0.9435 | 0.8692 | 0.7483 | 0.5857 | 0.4044 | 0.2376 | 0.1133 | 0.0409 | 0.0100 | 0.0013 | 0.0001 | 0.0000 |
| | 12 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9987 | 0.9940 | 0.9790 | 0.9420 | 0.8684 | 0.7480 | 0.5841 | 0.3990 | 0.2277 | 0.1018 | 0.0321 | 0.0059 | 0.0004 | 0.0000 |
| | 13 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9985 | 0.9935 | 0.9786 | 0.9423 | 0.8701 | 0.7500 | 0.5834 | 0.3920 | 0.2142 | 0.0867 | 0.0219 | 0.0024 | 0.0000 |
| | 14 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9984 | 0.9936 | 0.9793 | 0.9447 | 0.8744 | 0.7546 | 0.5836 | 0.3828 | 0.1958 | 0.0673 | 0.0113 | 0.0003 |
| | 15 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9985 | 0.9941 | 0.9811 | 0.9490 | 0.8818 | 0.7625 | 0.5852 | 0.3704 | 0.1702 | 0.0432 | 0.0026 |
| | 16 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9987 | 0.9951 | 0.9840 | 0.9556 | 0.8929 | 0.7748 | 0.5886 | 0.3523 | 0.1330 | 0.0159 |
| | 17 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9991 | 0.9964 | 0.9879 | 0.9645 | 0.9087 | 0.7939 | 0.5951 | 0.3231 | 0.0755 |
| | 18 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9995 | 0.9979 | 0.9924 | 0.9757 | 0.9308 | 0.8244 | 0.6083 | 0.2642 |
| | 19 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9992 | 0.9968 | 0.9885 | 0.9612 | 0.8784 | 0.6415 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

© 2008 Sigit Nugroho
Dibangkitkan dengan Microsoft Excel

# Tabel 6. Kuantil Uji Peringkat Bertanda Wilcoxon

| ***n*** | $w_{.005}$ | $w_{.010}$ | $w_{.025}$ | $w_{.050}$ | $w_{.10}$ | $w_{.20}$ | $w_{.30}$ | $w_{.40}$ | $w_{.50}$ | ***n(n+1)/2*** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *4* | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 3 | 4 | 7 | 10 |
| *5* | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7.5 | 15 |
| *6* | 0 | 0 | 1 | 3 | 4 | 6 | 8 | 9 | 10.5 | 21 |
| *7* | 0 | 1 | 3 | 4 | 6 | 9 | 11 | 12 | 14 | 28 |
| *8* | 1 | 2 | 4 | 6 | 9 | 12 | 14 | 16 | 18 | 36 |
| *9* | 2 | 4 | 6 | 9 | 11 | 15 | 18 | 20 | 22.5 | 45 |
| *10* | 4 | 6 | 9 | 11 | 15 | 19 | 22 | 25 | 27.5 | 55 |
| *11* | 6 | 8 | 11 | 14 | 18 | 23 | 27 | 30 | 33 | 66 |
| *12* | 8 | 10 | 14 | 18 | 22 | 28 | 32 | 36 | 39 | 78 |
| *13* | 10 | 13 | 18 | 22 | 27 | 33 | 38 | 42 | 45.5 | 91 |
| *14* | 13 | 16 | 22 | 26 | 32 | 39 | 44 | 48 | 52.5 | 105 |
| *15* | 16 | 20 | 26 | 31 | 37 | 45 | 51 | 55 | 60 | 120 |
| *16* | 20 | 24 | 30 | 36 | 43 | 51 | 58 | 63 | 68 | 136 |
| *17* | 24 | 28 | 35 | 42 | 49 | 58 | 65 | 71 | 76.5 | 153 |
| *18* | 28 | 33 | 41 | 48 | 56 | 66 | 73 | 80 | 85.5 | 171 |
| *19* | 33 | 38 | 47 | 54 | 63 | 74 | 82 | 89 | 95 | 190 |
| *20* | 38 | 44 | 53 | 61 | 70 | 82 | 91 | 98 | 105 | 210 |

**Sumber**: McCornack *dalam* Conover (1971).

Catatan

1. Kuantil $p > 0.50$ dapat diperoleh dengan menggunakan hubungan bahwa $w_p = n(n+1)/2 - w_{1-p}$.
2. Jika hipotesis nol benar, $P(T < w_p) \leq p$ dan $P(T > w_p) \leq 1 - p$
3. Untuk nilai *n* yang lebih besar dari 20, kuantil ke-*p* statistik uji peringkat bertanda Wilcoxon dapat dihitung dengan menggunakan pendekatan berikut $w_p = \dfrac{n(n+1)}{4} + z_p\sqrt{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{24}}$

# Tabel 7. Kuantil Statistik Uji Mann-Whitney

| *n* | *p* | *m=2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* | *10* | *11* | *12* | *13* | *14* | *15* | *16* | *17* | *18* | *19* | *20* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0.001 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 0.005 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| | 0.010 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| | 0.025 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | 0.050 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 |
| | 0.100 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 |
| 3 | 0.001 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 0.005 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| | 0.010 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 |
| | 0.025 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 |
| | 0.050 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 8 | 8 | 9 | 10 | 10 | 11 | 12 |
| | 0.100 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 4 | 0.001 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| | 0.005 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 9 |
| | 0.010 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 9 | 8 | 9 | 10 | 10 | 11 |
| | 0.025 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| | 0.050 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| | 0.100 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 16 | 17 | 18 | 19 | 21 | 22 | 23 |
| 5 | 0.001 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 8 | 8 |
| | 0.005 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| | 0.010 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| | 0.025 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 18 | 19 | 20 | 21 |
| | 0.050 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 9 | 10 | 12 | 13 | 14 | 16 | 17 | 19 | 20 | 21 | 23 | 24 | 26 |
| | 0.100 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 13 | 14 | 16 | 18 | 19 | 21 | 23 | 24 | 26 | 28 | 29 | 31 |
| 6 | 0.001 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| | 0.005 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| | 0.010 | 0 | 0 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 13 | 14 | 16 | 17 | 19 | 20 | 21 | 23 |
| | 0.025 | 0 | 2 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 11 | 12 | 14 | 15 | 17 | 18 | 20 | 22 | 23 | 25 | 26 | 28 |
| | 0.050 | 1 | 3 | 4 | 6 | 8 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 27 | 29 | 31 | 33 |
| | 0.100 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 | 35 | 37 | 39 |
| 7 | 0.001 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| | 0.005 | 0 | 0 | 1 | 2 | 4 | 5 | 7 | 8 | 10 | 11 | 13 | 14 | 16 | 17 | 19 | 20 | 22 | 23 | 25 |
| | 0.010 | 0 | 1 | 2 | 4 | 5 | 7 | 8 | 10 | 12 | 13 | 15 | 17 | 18 | 20 | 22 | 24 | 25 | 27 | 29 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0.025 | 0 | 2 | 4 | 6 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 27 | 29 | 31 | 33 | 35 |
| | 0.050 | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 25 | 27 | 29 | 31 | 34 | 36 | 38 | 40 |
| | 0.100 | 2 | 5 | 7 | 9 | 12 | 14 | 17 | 19 | 22 | 24 | 27 | 29 | 32 | 34 | 37 | 39 | 42 | 44 | 47 |
| 8 | 0.001 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 9 | 10 | 12 | 13 | 15 | 16 | 18 | 19 | 21 | 22 |
| | 0.005 | 0 | 0 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 19 | 21 | 23 | 25 | 27 | 29 | 31 |
| | 0.010 | 0 | 1 | 3 | 5 | 7 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 21 | 23 | 25 | 27 | 29 | 31 | 33 | 35 |
| | 0.025 | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 14 | 16 | 18 | 20 | 23 | 25 | 27 | 30 | 32 | 35 | 37 | 39 | 42 |
| | 0.050 | 2 | 4 | 6 | 9 | 11 | 14 | 16 | 19 | 21 | 24 | 27 | 29 | 32 | 34 | 37 | 40 | 42 | 45 | 48 |
| | 0.100 | 3 | 6 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 | 25 | 28 | 31 | 34 | 37 | 40 | 43 | 46 | 49 | 52 | 55 |
| 9 | 0.001 | 0 | 0 | 0 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 9 | 11 | 13 | 15 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 27 |
| | 0.005 | 0 | 1 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 28 | 30 | 32 | 34 | 37 |
| | 0.010 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 15 | 17 | 19 | 22 | 24 | 27 | 29 | 32 | 34 | 37 | 39 | 41 |
| | 0.025 | 1 | 3 | 5 | 8 | 11 | 13 | 16 | 18 | 21 | 24 | 27 | 29 | 32 | 35 | 38 | 40 | 43 | 46 | 49 |
| | 0.050 | 2 | 5 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 | 22 | 25 | 28 | 31 | 34 | 37 | 40 | 43 | 46 | 49 | 52 | 55 |
| | 0.100 | 3 | 6 | 10 | 13 | 16 | 19 | 23 | 26 | 29 | 32 | 36 | 39 | 42 | 46 | 49 | 53 | 56 | 59 | 63 |
| 10 | 0.001 | 0 | 0 | 1 | 2 | 4 | 6 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 33 |
| | 0.005 | 0 | 1 | 3 | 5 | 7 | 10 | 12 | 14 | 17 | 19 | 22 | 25 | 27 | 30 | 32 | 35 | 38 | 50 | 43 |
| | 0.010 | 0 | 2 | 4 | 7 | 9 | 12 | 14 | 17 | 20 | 23 | 25 | 28 | 31 | 34 | 37 | 39 | 42 | 45 | 48 |
| | 0.025 | 1 | 4 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 | 34 | 37 | 40 | 43 | 46 | 49 | 53 | 56 |
| | 0.050 | 2 | 5 | 8 | 12 | 15 | 18 | 21 | 25 | 28 | 32 | 35 | 38 | 42 | 45 | 49 | 52 | 56 | 59 | 63 |
| | 0.100 | 4 | 7 | 11 | 14 | 18 | 22 | 25 | 29 | 33 | 37 | 40 | 44 | 48 | 52 | 55 | 59 | 63 | 67 | 71 |
| 11 | 0.001 | 0 | 0 | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 16 | 18 | 21 | 23 | 25 | 28 | 30 | 33 | 35 | 38 |
| | 0.005 | 0 | 1 | 3 | 6 | 8 | 11 | 14 | 17 | 19 | 22 | 25 | 28 | 31 | 34 | 37 | 40 | 43 | 46 | 49 |
| | 0.010 | 0 | 2 | 5 | 8 | 10 | 13 | 16 | 19 | 23 | 26 | 29 | 32 | 35 | 38 | 42 | 45 | 48 | 51 | 54 |
| | 0.025 | 1 | 4 | 7 | 10 | 14 | 17 | 20 | 24 | 27 | 31 | 34 | 38 | 41 | 45 | 48 | 52 | 56 | 59 | 63 |
| | 0.050 | 2 | 6 | 9 | 13 | 17 | 20 | 24 | 28 | 32 | 35 | 39 | 43 | 47 | 51 | 55 | 58 | 62 | 66 | 70 |
| | 0.100 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 37 | 41 | 45 | 49 | 53 | 58 | 62 | 66 | 70 | 74 | 79 |
| 12 | 0.001 | 0 | 0 | 1 | 3 | 5 | 8 | 10 | 13 | 15 | 18 | 21 | 24 | 26 | 29 | 32 | 35 | 38 | 41 | 43 |
| | 0.005 | 0 | 2 | 4 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 | 22 | 25 | 28 | 32 | 35 | 38 | 42 | 45 | 48 | 52 | 55 |
| | 0.010 | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 22 | 25 | 29 | 32 | 36 | 39 | 43 | 47 | 50 | 54 | 57 | 61 |
| | 0.025 | 2 | 5 | 8 | 12 | 15 | 19 | 23 | 27 | 30 | 34 | 38 | 42 | 46 | 50 | 54 | 58 | 62 | 66 | 70 |
| | 0.050 | 3 | 6 | 10 | 14 | 18 | 22 | 27 | 31 | 35 | 39 | 43 | 48 | 52 | 56 | 61 | 65 | 69 | 73 | 78 |
| | 0.100 | 5 | 9 | 13 | 18 | 22 | 27 | 31 | 36 | 40 | 45 | 50 | 54 | 59 | 64 | 68 | 73 | 78 | 82 | 87 |
| 13 | 0.001 | 0 | 0 | 2 | 4 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 | 33 | 36 | 39 | 43 | 46 | 49 |
| | 0.005 | 0 | 2 | 4 | 8 | 11 | 14 | 18 | 21 | 25 | 28 | 32 | 35 | 39 | 43 | 46 | 50 | 54 | 58 | 61 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0.010 | 1 | 3 | 6 | 10 | 13 | 17 | 21 | 24 | 28 | 32 | 36 | 40 | 44 | 48 | 52 | 56 | 60 | 64 | 68 |
| | 0.025 | 2 | 5 | 9 | 13 | 17 | 21 | 25 | 29 | 34 | 38 | 42 | 46 | 51 | 55 | 60 | 64 | 68 | 73 | 77 |
| | 0.050 | 3 | 7 | 11 | 16 | 20 | 25 | 29 | 34 | 38 | 43 | 48 | 52 | 57 | 62 | 66 | 71 | 76 | 81 | 85 |
| | 0.100 | 5 | 10 | 14 | 19 | 24 | 29 | 34 | 39 | 44 | 49 | 54 | 59 | 64 | 69 | 75 | 80 | 85 | 90 | 95 |
| 14 | 0.001 | 0 | 0 | 2 | 4 | 7 | 10 | 13 | 16 | 20 | 23 | 26 | 30 | 33 | 37 | 40 | 44 | 47 | 51 | 55 |
| | 0.005 | 0 | 2 | 5 | 8 | 12 | 16 | 19 | 23 | 27 | 31 | 35 | 39 | 43 | 47 | 51 | 55 | 59 | 64 | 68 |
| | 0.010 | 1 | 3 | 7 | 11 | 14 | 18 | 23 | 27 | 31 | 35 | 39 | 44 | 48 | 52 | 57 | 61 | 66 | 70 | 74 |
| | 0.025 | 2 | 6 | 10 | 14 | 18 | 23 | 27 | 32 | 37 | 41 | 46 | 51 | 56 | 60 | 65 | 70 | 75 | 79 | 84 |
| | 0.050 | 4 | 8 | 12 | 17 | 22 | 27 | 32 | 37 | 42 | 47 | 52 | 57 | 62 | 67 | 72 | 78 | 83 | 88 | 93 |
| | 0.100 | 5 | 11 | 16 | 21 | 26 | 32 | 37 | 42 | 48 | 53 | 59 | 64 | 70 | 75 | 81 | 86 | 92 | 98 | 103 |
| 15 | 0.001 | 0 | 0 | 2 | 5 | 8 | 11 | 15 | 18 | 22 | 25 | 29 | 33 | 37 | 41 | 44 | 48 | 52 | 56 | 60 |
| | 0.005 | 0 | 3 | 6 | 9 | 13 | 17 | 21 | 25 | 30 | 34 | 38 | 43 | 47 | 52 | 56 | 61 | 65 | 70 | 74 |
| | 0.010 | 1 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 25 | 29 | 34 | 38 | 43 | 48 | 52 | 57 | 62 | 67 | 71 | 76 | 81 |
| | 0.025 | 2 | 6 | 11 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 | 65 | 71 | 76 | 81 | 86 | 91 |
| | 0.050 | 4 | 8 | 13 | 19 | 24 | 29 | 34 | 40 | 45 | 51 | 56 | 62 | 67 | 73 | 78 | 84 | 89 | 95 | 101 |
| | 0.100 | 6 | 11 | 17 | 23 | 28 | 34 | 40 | 46 | 52 | 58 | 64 | 69 | 75 | 81 | 87 | 93 | 99 | 105 | 111 |
| 16 | 0.001 | 0 | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 | 40 | 44 | 49 | 53 | 57 | 61 | 66 |
| | 0.005 | 0 | 3 | 6 | 10 | 14 | 19 | 23 | 28 | 32 | 37 | 42 | 46 | 51 | 56 | 61 | 66 | 71 | 75 | 80 |
| | 0.010 | 1 | 4 | 8 | 13 | 17 | 22 | 27 | 32 | 37 | 42 | 47 | 52 | 57 | 62 | 67 | 72 | 77 | 83 | 88 |
| | 0.025 | 2 | 7 | 12 | 16 | 22 | 27 | 32 | 38 | 43 | 48 | 54 | 60 | 65 | 71 | 76 | 82 | 87 | 93 | 99 |
| | 0.050 | 4 | 9 | 15 | 20 | 26 | 31 | 37 | 43 | 49 | 55 | 61 | 66 | 72 | 78 | 84 | 90 | 96 | 102 | 108 |
| | 0.100 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 37 | 43 | 49 | 55 | 62 | 68 | 75 | 81 | 87 | 94 | 100 | 107 | 113 | 120 |
| 17 | 0.001 | 0 | 1 | 3 | 6 | 10 | 14 | 18 | 22 | 26 | 30 | 35 | 39 | 44 | 48 | 53 | 58 | 62 | 67 | 71 |
| | 0.005 | 0 | 3 | 7 | 11 | 16 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | 61 | 66 | 71 | 76 | 82 | 87 |
| | 0.010 | 1 | 5 | 9 | 14 | 19 | 24 | 29 | 34 | 39 | 45 | 50 | 56 | 61 | 67 | 72 | 78 | 83 | 89 | 94 |
| | 0.025 | 3 | 7 | 12 | 18 | 23 | 29 | 35 | 40 | 46 | 52 | 58 | 64 | 70 | 76 | 82 | 88 | 94 | 100 | 106 |
| | 0.050 | 4 | 10 | 16 | 21 | 27 | 34 | 40 | 46 | 52 | 58 | 65 | 71 | 78 | 84 | 90 | 97 | 103 | 110 | 116 |
| | 0.100 | 7 | 13 | 19 | 26 | 32 | 39 | 46 | 53 | 59 | 66 | 73 | 80 | 86 | 93 | 100 | 107 | 114 | 121 | 128 |
| 18 | 0.001 | 0 | 1 | 4 | 7 | 11 | 15 | 19 | 24 | 28 | 33 | 38 | 43 | 47 | 52 | 57 | 62 | 67 | 72 | 77 |
| | 0.005 | 0 | 3 | 7 | 12 | 17 | 22 | 27 | 32 | 38 | 43 | 48 | 54 | 59 | 65 | 71 | 76 | 82 | 88 | 93 |
| | 0.010 | 1 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 31 | 37 | 42 | 48 | 54 | 60 | 66 | 71 | 77 | 83 | 89 | 95 | 101 |
| | 0.025 | 3 | 8 | 13 | 19 | 25 | 31 | 37 | 43 | 49 | 56 | 62 | 68 | 75 | 81 | 87 | 94 | 100 | 107 | 113 |
| | 0.050 | 5 | 10 | 17 | 23 | 29 | 36 | 42 | 49 | 56 | 62 | 69 | 76 | 83 | 89 | 96 | 103 | 110 | 117 | 124 |
| | 0.100 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 | 70 | 78 | 85 | 92 | 99 | 107 | 114 | 121 | 129 | 136 |
| 19 | 0.001 | 0 | 1 | 4 | 8 | 12 | 16 | 21 | 26 | 30 | 35 | 41 | 46 | 51 | 56 | 61 | 67 | 72 | 78 | 83 |
| | 0.005 | 1 | 4 | 8 | 13 | 18 | 23 | 29 | 34 | 40 | 46 | 52 | 58 | 64 | 70 | 75 | 82 | 88 | 94 | 100 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0.010 | 2 | 5 | 10 | 16 | 21 | 27 | 33 | 39 | 45 | 51 | 57 | 64 | 70 | 76 | 83 | 89 | 95 | 102 | 108 |
| | 0.025 | 3 | 8 | 14 | 20 | 26 | 33 | 39 | 46 | 53 | 59 | 66 | 73 | 79 | 86 | 93 | 100 | 107 | 114 | 120 |
| | 0.050 | 5 | 11 | 18 | 24 | 31 | 38 | 45 | 52 | 59 | 66 | 73 | 81 | 88 | 95 | 102 | 110 | 117 | 124 | 131 |
| | 0.100 | 8 | 15 | 22 | 29 | 37 | 44 | 52 | 59 | 67 | 74 | 82 | 90 | 98 | 105 | 113 | 121 | 129 | 136 | 144 |
| 20 | 0.001 | 0 | 1 | 4 | 8 | 13 | 17 | 22 | 27 | 33 | 38 | 43 | 49 | 55 | 60 | 66 | 71 | 77 | 83 | 89 |
| | 0.005 | 1 | 4 | 9 | 14 | 19 | 25 | 31 | 37 | 43 | 49 | 55 | 61 | 68 | 74 | 80 | 87 | 93 | 100 | 106 |
| | 0.010 | 2 | 6 | 11 | 17 | 23 | 29 | 35 | 41 | 48 | 54 | 61 | 68 | 74 | 81 | 88 | 94 | 101 | 108 | 115 |
| | 0.025 | 3 | 9 | 15 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 | 70 | 77 | 84 | 92 | 99 | 106 | 113 | 120 | 128 |
| | 0.050 | 5 | 12 | 19 | 26 | 33 | 40 | 48 | 55 | 63 | 70 | 78 | 85 | 93 | 101 | 108 | 116 | 124 | 131 | 139 |
| | 0.100 | 8 | 16 | 23 | 31 | 39 | 47 | 55 | 63 | 71 | 79 | 87 | 95 | 103 | 111 | 120 | 128 | 136 | 144 | 152 |

**Sumber**: Verdooren *dalam* Conover (1971).

Untuk nilai $n$ dan $m$ yang lebih besar dari 20, kuantil ke-$p$ statistik uji Mann-Whitney dapat didekati dengan menggunakan

$$w_p = \frac{nm}{2} + z_p \sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12}}$$

## Tabel 8. Kuantil Statistik Uji Hotelling-Pabst

| *n* | *p=0.001* | *0.005* | *0.010* | *0.025* | *0.050* | *0.100* | *½n(n²-1)* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | | | | | 2 | 2 | 20 |
| 5 | | | 2 | 2 | 4 | 6 | 40 |
| 6 | | 2 | 4 | 6 | 8 | 14 | 70 |
| 7 | 2 | 6 | 8 | 14 | 18 | 26 | 112 |
| 8 | 6 | 12 | 16 | 24 | 32 | 42 | 168 |
| 9 | 12 | 22 | 28 | 38 | 50 | 64 | 240 |
| 10 | 22 | 36 | 44 | 60 | 74 | 92 | 330 |
| 11 | 36 | 56 | 66 | 86 | 104 | 128 | 440 |
| 12 | 52 | 78 | 94 | 120 | 144 | 172 | 572 |
| 13 | 76 | 110 | 130 | 162 | 190 | 226 | 728 |
| 14 | 106 | 148 | 172 | 212 | 246 | 290 | 910 |
| 15 | 142 | 194 | 224 | 270 | 312 | 364 | 1120 |
| 16 | 186 | 250 | 284 | 340 | 390 | 450 | 1360 |
| 17 | 238 | 314 | 356 | 420 | 480 | 550 | 1632 |
| 18 | 300 | 390 | 438 | 512 | 582 | 664 | 1938 |
| 19 | 372 | 476 | 532 | 618 | 696 | 790 | 2280 |
| 20 | 454 | 574 | 638 | 738 | 826 | 934 | 2660 |
| 21 | 546 | 686 | 758 | 870 | 972 | 1092 | 3080 |
| 22 | 652 | 810 | 892 | 1020 | 1134 | 1270 | 3542 |
| 23 | 772 | 950 | 1042 | 1184 | 1312 | 1464 | 4048 |
| 24 | 904 | 1104 | 1208 | 1366 | 1510 | 1678 | 4600 |
| 25 | 1050 | 1274 | 1390 | 1566 | 1726 | 1912 | 5200 |
| 26 | 1212 | 1462 | 1590 | 1786 | 1960 | 2168 | 5850 |
| 27 | 1390 | 1666 | 1808 | 2024 | 2216 | 2444 | 6552 |
| 28 | 1586 | 1890 | 2046 | 2284 | 2494 | 2744 | 7308 |
| 29 | 1800 | 2134 | 2306 | 2564 | 2796 | 3068 | 8120 |
| 30 | 2032 | 2398 | 2584 | 2868 | 3120 | 3416 | 8990 |

**Sumber**: Glasser dan Winter *dalam* Conover (1971).

Catatan:

1. Entri dalam tabel adalah kuantil bawah ke-*p* dari statistik Hotelling-Pabst, $w_p$, dimana untuk setiap *p*, $P(T < w_p) \leq p$.
2. Untuk kuantil atas, dapat diperoleh dengan menggunakan formula berikut: $w_{1-p} = \frac{1}{3}n(n^2-1) - w_p$. Median dari *T* adalah $w_{0.50} = \frac{1}{6}n(n^2-1)$
3. Untuk nilai *n* yang lebih besar dari 30, kuantil *T* dapat didekati dengan

$$w_p \cong \frac{1}{6}n(n^2-1) + z_p \frac{1}{6}\frac{n(n^2-1)}{\sqrt{n-1}}$$

## Tabel 9. Nilai Kritis dan Peluang Statistik Uji Kruskal-Wallis

| $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | N.Kr | p |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 2.7000 | 0.500 |
| 2 | 2 | 1 | 3.6000 | 0.200 |
| 2 | 2 | 2 | 4.5714 | 0.067 |
| | | | 3.7143 | 0.200 |
| 3 | 1 | 1 | 3.2000 | 0.300 |
| 3 | 2 | 1 | 4.2857 | 0.100 |
| | | | 3.8571 | 0.133 |
| 3 | 2 | 2 | 5.3571 | 0.029 |
| | | | 4.7143 | 0.048 |
| | | | 4.5000 | 0.067 |
| | | | 4.4643 | 0.105 |
| 3 | 3 | 1 | 5.1429 | 0.043 |
| | | | 4.5714 | 0.100 |
| | | | 4.0000 | 0.129 |
| 3 | 3 | 2 | 6.2500 | 0.011 |
| | | | 5.3611 | 0.032 |
| | | | 5.1389 | 0.061 |
| | | | 4.5556 | 0.100 |
| | | | 4.2500 | 0.121 |
| 3 | 3 | 3 | 7.2000 | 0.004 |
| | | | 6.4889 | 0.011 |
| | | | 5.6889 | 0.029 |
| | | | 5.6000 | 0.050 |
| | | | 5.0667 | 0.086 |
| | | | 4.6662 | 0.100 |
| 4 | 1 | 1 | 3.5714 | 0.200 |
| 4 | 2 | 1 | 4.8214 | 0.057 |
| | | | 4.5000 | 0.076 |
| | | | 4.0179 | 0.114 |
| 4 | 2 | 2 | 6.0000 | 0.014 |
| | | | 5.3333 | 0.033 |
| | | | 5.1250 | 0.052 |
| | | | 4.4583 | 0.100 |
| | | | 4.1667 | 0.105 |
| 4 | 3 | 1 | 5.8333 | 0.021 |
| | | | 5.2083 | 0.050 |
| | | | 5.0000 | 0.057 |
| | | | 4.0556 | 0.093 |
| | | | 3.8889 | 0.129 |

| $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | N.Kr | p |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 2 | 6.4444 | 0.008 |
| | | | 6.3000 | 0.011 |
| | | | 5.4444 | 0.046 |
| | | | 5.4000 | 0.051 |
| | | | 4.5111 | 0.098 |
| | | | 4.4444 | 0.102 |
| 4 | 3 | 3 | 6.7455 | 0.010 |
| | | | 6.7091 | 0.013 |
| | | | 5.7909 | 0.046 |
| | | | 5.5727 | 0.053 |
| | | | 4.7091 | 0.092 |
| | | | 4.7000 | 0.101 |
| 4 | 4 | 1 | 6.6667 | 0.010 |
| | | | 6.1667 | 0.022 |
| | | | 4.9667 | 0.048 |
| | | | 4.8667 | 0.054 |
| | | | 4.1667 | 0.083 |
| | | | 4.0667 | 0.102 |
| 4 | 4 | 2 | 7.0364 | 0.006 |
| | | | 6.8727 | 0.011 |
| | | | 5.4545 | 0.046 |
| | | | 5.2364 | 0.052 |
| | | | 4.5545 | 0.098 |
| | | | 4.4455 | 0.103 |
| 4 | 4 | 3 | 7.1439 | 0.010 |
| | | | 7.1364 | 0.011 |
| | | | 5.5985 | 0.049 |
| | | | 5.5758 | 0.051 |
| | | | 4.5455 | 0.099 |
| | | | 4.4773 | 0.102 |
| 4 | 4 | 4 | 7.6538 | 0.008 |
| | | | 7.5385 | 0.011 |
| | | | 5.6923 | 0.049 |
| | | | 5.6538 | 0.055 |
| | | | 4.6538 | 0.097 |
| | | | 4.5000 | 0.104 |
| 5 | 1 | 1 | 3.8571 | 0.143 |
| 5 | 2 | 1 | 5.2500 | 0.036 |
| | | | 5.0000 | 0.048 |
| | | | 4.4500 | 0.071 |
| | | | 4.2000 | 0.095 |
| | | | 4.0500 | 0.119 |

| $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | *N.Kr* | *p* |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 2 | 2 | 6.5333 | 0.008 |
| | | | 6.1333 | 0.013 |
| | | | 5.1600 | 0.034 |
| | | | 5.0400 | 0.056 |
| | | | 4.3733 | 0.090 |
| | | | 4.2933 | 0.122 |
| 5 | 3 | 1 | 6.4000 | 0.012 |
| | | | 4.9600 | 0.048 |
| | | | 4.8711 | 0.052 |
| | | | 4.0178 | 0.095 |
| | | | 3.8400 | 0.123 |
| 5 | 3 | 2 | 6.9091 | 0.009 |
| | | | 6.8218 | 0.010 |
| | | | 5.2509 | 0.049 |
| | | | 5.1055 | 0.052 |
| | | | 4.6509 | 0.091 |
| | | | 4.4946 | 0.102 |
| 5 | 3 | 3 | 7.0788 | 0.009 |
| | | | 6.9818 | 0.011 |
| | | | 5.6485 | 0.049 |
| | | | 5.5152 | 0.051 |
| | | | 4.5333 | 0.097 |
| | | | 4.4121 | 0.109 |
| 5 | 4 | 1 | 6.9545 | 0.008 |
| | | | 6.8400 | 0.011 |
| | | | 4.9855 | 0.044 |
| | | | 4.8600 | 0.056 |
| | | | 3.9873 | 0.098 |
| | | | 3.9600 | 0.102 |
| 5 | 4 | 2 | 7.2045 | 0.009 |
| | | | 7.1182 | 0.010 |
| | | | 5.2727 | 0.049 |
| | | | 5.2682 | 0.050 |
| | | | 4.5409 | 0.098 |
| | | | 4.5182 | 0.101 |
| 5 | 4 | 3 | 7.4449 | 0.010 |
| | | | 7.3949 | 0.011 |
| | | | 5.6564 | 0.049 |
| | | | 5.6308 | 0.050 |
| | | | 4.5487 | 0.099 |
| | | | 4.5231 | 0.103 |
| 5 | 4 | 4 | 7.7604 | 0.009 |
| | | | 7.7440 | 0.011 |
| | | | 5.6571 | 0.049 |
| | | | 5.6176 | 0.050 |
| | | | 4.6187 | 0.100 |
| | | | 4.5527 | 0.102 |
| 5 | 5 | 1 | 7.3091 | 0.009 |
| | | | 6.8364 | 0.011 |
| | | | 5.1273 | 0.046 |
| | | | 4.9091 | 0.053 |
| | | | 4.1091 | 0.086 |
| | | | 4.0364 | 0.105 |
| 5 | 5 | 2 | 7.3385 | 0.010 |
| | | | 7.2692 | 0.010 |
| | | | 5.3385 | 0.047 |
| | | | 5.2462 | 0.051 |
| | | | 4.6231 | 0.097 |
| | | | 4.5077 | 0.100 |
| 5 | 5 | 3 | 7.5780 | 0.010 |
| | | | 7.5429 | 0.010 |
| | | | 5.7055 | 0.046 |
| | | | 5.6264 | 0.051 |
| | | | 4.5451 | 0.100 |
| | | | 4.5363 | 0.102 |
| 5 | 5 | 4 | 7.8229 | 0.010 |
| | | | 7.7914 | 0.010 |
| | | | 5.6657 | 0.049 |
| | | | 5.6429 | 0.050 |
| | | | 4.5229 | 0.100 |
| | | | 4.5200 | 0.101 |
| 5 | 5 | 5 | 8.0000 | 0.009 |
| | | | 7.9800 | 0.011 |
| | | | 5.7800 | 0.049 |
| | | | 5.6600 | 0.051 |
| | | | 4.5600 | 0.100 |
| | | | 4.5000 | 0.102 |

**Sumber**: Kruskal dan Wallis *dalam* Conover (1971).

## Tabel 10. Nilai Kritis Statistik Jonckheere (J)

| $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | $\alpha$ 0.100 | 0.050 | 0.010 | 0.005 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 2 | 10 | 11 | 12 | |
| 2 | 2 | 3 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 2 | 2 | 4 | 16 | 17 | 19 | 20 |
| 2 | 2 | 5 | 18 | 20 | 22 | 23 |
| 2 | 2 | 6 | 21 | 23 | 25 | 27 |
| 2 | 2 | 7 | 24 | 26 | 29 | 30 |
| 2 | 2 | 8 | 27 | 29 | 32 | 33 |
| 2 | 3 | 3 | 16 | 18 | 19 | 20 |
| 2 | 3 | 4 | 20 | 21 | 23 | 25 |
| 2 | 3 | 5 | 23 | 25 | 27 | 29 |
| 2 | 3 | 6 | 26 | 28 | 31 | 33 |
| 2 | 3 | 7 | 30 | 32 | 35 | 37 |
| 2 | 3 | 8 | 33 | 35 | 39 | 41 |
| 2 | 4 | 4 | 24 | 25 | 28 | 29 |
| 2 | 4 | 5 | 27 | 29 | 33 | 34 |
| 2 | 4 | 6 | 31 | 34 | 37 | 39 |
| 2 | 4 | 7 | 35 | 38 | 42 | 44 |
| 2 | 4 | 8 | 39 | 42 | 46 | 49 |
| 2 | 5 | 5 | 32 | 34 | 38 | 40 |
| 2 | 5 | 6 | 36 | 39 | 43 | 45 |
| 2 | 5 | 7 | 41 | 44 | 48 | 51 |
| 2 | 5 | 8 | 45 | 48 | 53 | 56 |
| 2 | 6 | 6 | 42 | 44 | 49 | 51 |
| 2 | 6 | 7 | 47 | 50 | 55 | 57 |
| 2 | 6 | 8 | 52 | 55 | 61 | 64 |
| 2 | 7 | 7 | 52 | 56 | 61 | 64 |
| 2 | 7 | 8 | 58 | 62 | 68 | 71 |
| 2 | 8 | 8 | 64 | 68 | 75 | 78 |
| 3 | 3 | 3 | 20 | 22 | 24 | 25 |
| 3 | 3 | 4 | 24 | 26 | 29 | 30 |
| 3 | 3 | 5 | 28 | 30 | 33 | 35 |
| 3 | 3 | 6 | 32 | 34 | 38 | 40 |
| 3 | 3 | 7 | 36 | 38 | 42 | 44 |
| 3 | 3 | 8 | 40 | 42 | 47 | 49 |
| 3 | 4 | 4 | 29 | 31 | 34 | 36 |
| 3 | 4 | 5 | 33 | 35 | 39 | 41 |
| 3 | 4 | 6 | 38 | 40 | 44 | 46 |
| 3 | 4 | 7 | 42 | 45 | 49 | 52 |
| 3 | 4 | 8 | 47 | 50 | 55 | 57 |

| $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | $\alpha$ 0.100 | 0.050 | 0.010 | 0.005 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 5 | 5 | 38 | 41 | 45 | 47 |
| 3 | 5 | 6 | 43 | 46 | 51 | 53 |
| 3 | 5 | 7 | 48 | 51 | 57 | 59 |
| 3 | 5 | 8 | 53 | 57 | 63 | 65 |
| 3 | 6 | 6 | 49 | 52 | 57 | 60 |
| 3 | 6 | 7 | 54 | 58 | 64 | 67 |
| 3 | 6 | 8 | 60 | 64 | 70 | 73 |
| 3 | 7 | 7 | 61 | 64 | 71 | 74 |
| 3 | 7 | 8 | 67 | 71 | 78 | 81 |
| 3 | 8 | 8 | 74 | 78 | 86 | 89 |
| 4 | 4 | 4 | 34 | 36 | 40 | 42 |
| 4 | 4 | 5 | 39 | 41 | 45 | 48 |
| 4 | 4 | 6 | 44 | 47 | 51 | 54 |
| 4 | 4 | 7 | 49 | 52 | 57 | 60 |
| 4 | 4 | 8 | 54 | 57 | 63 | 66 |
| 4 | 5 | 5 | 44 | 47 | 52 | 55 |
| 4 | 5 | 6 | 50 | 53 | 58 | 61 |
| 4 | 5 | 7 | 56 | 59 | 65 | 68 |
| 4 | 5 | 8 | 61 | 65 | 71 | 75 |
| 4 | 6 | 6 | 56 | 60 | 66 | 69 |
| 4 | 6 | 7 | 62 | 66 | 73 | 76 |
| 4 | 6 | 8 | 68 | 73 | 80 | 83 |
| 4 | 7 | 7 | 69 | 73 | 81 | 84 |
| 4 | 7 | 8 | 76 | 80 | 88 | 92 |
| 4 | 8 | 8 | 83 | 88 | 97 | 100 |
| 5 | 5 | 5 | 50 | 54 | 59 | 62 |
| 5 | 5 | 6 | 57 | 60 | 66 | 69 |
| 5 | 5 | 7 | 63 | 67 | 73 | 76 |
| 5 | 5 | 8 | 69 | 73 | 80 | 84 |
| 5 | 6 | 6 | 63 | 67 | 74 | 77 |
| 5 | 6 | 7 | 70 | 74 | 82 | 85 |
| 5 | 6 | 8 | 77 | 81 | 89 | 93 |
| 5 | 7 | 7 | 77 | 82 | 90 | 94 |
| 5 | 7 | 8 | 85 | 89 | 98 | 102 |
| 5 | 8 | 8 | 92 | 98 | 107 | 111 |

| $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | $\alpha$ 0.100 | 0.050 | 0.010 | 0.005 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 6 | 6 | 71 | 75 | 82 | 86 |
| 6 | 6 | 7 | 78 | 82 | 91 | 94 |
| 6 | 6 | 8 | 85 | 90 | 99 | 103 |
| 6 | 7 | 7 | 86 | 91 | 100 | 103 |
| 6 | 7 | 8 | 94 | 99 | 109 | 113 |
| 6 | 8 | 8 | 102 | 108 | 118 | 122 |
| 7 | 7 | 7 | 94 | 99 | 109 | 113 |
| 7 | 7 | 8 | 102 | 108 | 119 | 123 |
| 7 | 8 | 8 | 111 | 117 | 129 | 133 |
| 8 | 8 | 8 | 121 | 127 | 139 | 144 |

**Sumber**: Odeh *dalam* Conover (1971).

## Tabel 11. Fungsi Sebaran Statistik Friedman.

| *n* | *k* | *S* | *F* | *p* |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 8 | 4.000 | 0.167 |
| | | 6 | 3.000 | 0.500 |
| | 3 | 18 | 6.000 | 0.028 |
| | | 14 | 4.667 | 0.194 |
| | | 8 | 2.667 | 0.361 |
| | 4 | 32 | 8.000 | 0.005 |
| | | 26 | 6.500 | 0.042 |
| | | 24 | 6.000 | 0.069 |
| | | 18 | 4.500 | 0.125 |
| | | 14 | 3.500 | 0.273 |
| | | 8 | 2.000 | 0.431 |
| | 5 | 50 | 10.000 | 0.001 |
| | | 42 | 8.400 | 0.008 |
| | | 38 | 7.600 | 0.024 |
| | | 32 | 6.400 | 0.039 |
| | | 26 | 5.200 | 0.093 |
| | | 24 | 4.800 | 0.124 |
| | | 18 | 3.600 | 0.182 |
| | | 14 | 2.800 | 0.367 |
| | 6 | 72 | 12.000 | 0.000 |
| | | 62 | 10.333 | 0.002 |
| | | 56 | 9.333 | 0.006 |
| | | 54 | 9.000 | 0.008 |
| | | 50 | 8.333 | 0.012 |
| | | 42 | 7.000 | 0.029 |
| | | 38 | 6.333 | 0.052 |
| | | 32 | 5.333 | 0.072 |
| | | 26 | 4.333 | 0.142 |
| | | 24 | 4.000 | 0.184 |
| | | 18 | 3.000 | 0.252 |
| | | 14 | 2.333 | 0.430 |

| *n* | *k* | *S* | *F* | *p* |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 7 | 98 | 14.000 | 0.000 |
| | | 96 | 13.714 | 0.000 |
| | | 86 | 12.286 | 0.000 |
| | | 78 | 11.143 | 0.001 |
| | | 74 | 10.571 | 0.003 |
| | | 72 | 10.286 | 0.004 |
| | | 62 | 8.857 | 0.008 |
| | | 56 | 8.000 | 0.016 |
| | | 54 | 7.714 | 0.021 |
| | | 50 | 7.143 | 0.027 |
| | | 42 | 6.000 | 0.051 |
| | | 38 | 5.429 | 0.085 |
| | | 32 | 4.571 | 0.112 |
| | | 26 | 3.714 | 0.192 |
| | | 24 | 3.429 | 0.237 |
| | | 18 | 2.571 | 0.305 |
| | | 14 | 2.000 | 0.486 |
| | 8 | 128 | 16.000 | 0.000 |
| | | 126 | 15.750 | 0.000 |
| | | 122 | 15.250 | 0.000 |
| | | 114 | 14.250 | 0.000 |
| | | 104 | 13.000 | 0.000 |
| | | 98 | 12.250 | 0.001 |
| | | 96 | 12.000 | 0.001 |
| | | 86 | 10.750 | 0.002 |
| | | 78 | 9.750 | 0.005 |
| | | 74 | 9.250 | 0.008 |
| | | 72 | 9.000 | 0.010 |
| | | 62 | 7.750 | 0.018 |
| | | 56 | 7.000 | 0.030 |
| | | 54 | 6.750 | 0.038 |
| | | 50 | 6.250 | 0.047 |
| | | 42 | 5.250 | 0.079 |
| | | 38 | 4.750 | 0.120 |
| | | 32 | 4.000 | 0.149 |
| | | 26 | 3.250 | 0.236 |
| | | 24 | 3.000 | 0.285 |
| | | 18 | 2.250 | 0.355 |

| *n* | *k* | *S* | *F* | *p* |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 2 | 20 | 6.000 | 0.042 |
| | | 18 | 5.400 | 0.167 |
| | | 16 | 4.800 | 0.208 |
| | | 14 | 4.200 | 0.375 |
| | | 12 | 3.600 | 0.458 |
| | 3 | 45 | 9.000 | 0.002 |
| | | 43 | 8.600 | 0.002 |
| | | 41 | 8.200 | 0.017 |
| | | 37 | 7.400 | 0.033 |
| | | 35 | 7.000 | 0.054 |
| | | 33 | 6.600 | 0.075 |
| | | 29 | 5.800 | 0.148 |
| | | 27 | 5.400 | 0.175 |
| | | 25 | 5.000 | 0.207 |
| | | 21 | 4.200 | 0.3 |
| | | 19 | 3.800 | 0.342 |
| | | 17 | 3.400 | 0.446 |

| *n* | *k* | *S* | *F* | *p* |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 4 | 80 | 12.000 | 0.000 |
| | | 78 | 11.700 | 0.001 |
| | | 76 | 11.400 | 0.001 |
| | | 74 | 11.100 | 0.001 |
| | | 72 | 10.800 | 0.002 |
| | | 70 | 10.500 | 0.003 |
| | | 68 | 10.200 | 0.003 |
| | | 66 | 9.900 | 0.006 |
| | | 64 | 9.600 | 0.007 |
| | | 62 | 9.300 | 0.012 |
| | | 58 | 8.700 | 0.014 |
| | | 56 | 8.400 | 0.019 |
| | | 54 | 8.100 | 0.033 |
| | | 52 | 7.800 | 0.036 |
| | | 50 | 7.500 | 0.052 |
| | | 48 | 7.200 | 0.054 |
| | | 46 | 6.900 | 0.068 |
| | | 44 | 6.600 | 0.077 |
| | | 42 | 6.300 | 0.094 |
| | | 40 | 6.000 | 0.105 |
| | | 38 | 5.700 | 0.141 |
| | | 36 | 5.400 | 0.158 |
| | | 34 | 5.100 | 0.190 |
| | | 32 | 4.800 | 0.200 |
| | | 30 | 4.500 | 0.242 |
| | | 26 | 3.900 | 0.324 |
| | | 24 | 3.600 | 0.355 |
| | | 22 | 3.300 | 0.389 |
| | | 20 | 3.000 | 0.432 |

## Tabel 12. Nilai Kritis Statistik Friedman

| *k* | *N* | $\alpha \le 0.100$ | $\alpha \le 0.050$ | $\alpha \le 0.010$ |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 6.00 | 6.00 | |
| | 4 | 6.00 | 6.50 | 8.00 |
| | 5 | 5.20 | 6.40 | 8.40 |
| | 6 | 5.33 | 7.00 | 9.00 |
| | 7 | 5.43 | 7.14 | 8.86 |
| | 8 | 5.25 | 6.25 | 9.00 |
| | 9 | 5.56 | 6.22 | 8.67 |
| | 10 | 5.00 | 6.20 | 9.60 |
| | 11 | 4.91 | 6.54 | 8.91 |
| | 12 | 5.17 | 6.17 | 8.67 |
| | 13 | 4.77 | 6.00 | 9.39 |
| | ∞ | 4.61 | 5.99 | 9.21 |
| 4 | 2 | 6.00 | 6.00 | |
| | 3 | 6.60 | 7.40 | 8.60 |
| | 4 | 6.30 | 7.80 | 9.60 |
| | 5 | 6.36 | 7.80 | 9.96 |
| | 6 | 6.40 | 7.60 | 10.00 |
| | 7 | 6.26 | 7.80 | 10.37 |
| | 8 | 6.30 | 7.50 | 10.35 |
| | ∞ | 6.25 | 7.82 | 11.34 |
| 5 | 3 | 7.47 | 8.53 | 10.13 |
| | 4 | 7.60 | 8.80 | 11.00 |
| | 5 | 7.68 | 8.96 | 11.52 |
| | ∞ | 7.78 | 9.49 | 13.28 |

# Tabel 13. Kuantil Statistik Uji Kolmogorov

| | *Peluang uji satu arah* | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | *0.900* | *0.950* | *0.975* | *0.990* | *0.995* |
| | *Peluang uji dua arah* | | | | |
| *n* | *0.800* | *0.900* | *0.950* | *0.980* | *0.990* |
| *1* | 0.900 | 0.950 | 0.975 | 0.990 | 0.995 |
| *2* | 0.684 | 0.776 | 0.842 | 0.900 | 0.929 |
| *3* | 0.565 | 0.636 | 0.708 | 0.785 | 0.829 |
| *4* | 0.493 | 0.565 | 0.624 | 0.689 | 0.734 |
| *5* | 0.447 | 0.509 | 0.563 | 0.627 | 0.669 |
| *6* | 0.410 | 0.468 | 0.519 | 0.577 | 0.617 |
| *7* | 0.381 | 0.436 | 0.483 | 0.538 | 0.576 |
| *8* | 0.358 | 0.410 | 0.454 | 0.507 | 0.542 |
| *9* | 0.339 | 0.387 | 0.430 | 0.408 | 0.513 |
| *10* | 0.323 | 0.369 | 0.409 | 0.457 | 0.489 |
| *11* | 0.308 | 0.352 | 0.391 | 0.437 | 0.468 |
| *12* | 0.296 | 0.338 | 0.375 | 0.419 | 0.449 |
| *13* | 0.285 | 0.325 | 0.361 | 0.404 | 0.432 |
| *14* | 0.275 | 0.314 | 0.349 | 0.390 | 0.418 |
| *15* | 0.266 | 0.304 | 0.338 | 0.377 | 0.404 |
| *16* | 0.258 | 0.295 | 0.327 | 0.366 | 0.392 |
| *17* | 0.250 | 0.286 | 0.318 | 0.355 | 0.381 |
| *18* | 0.244 | 0.279 | 0.309 | 0.346 | 0.371 |
| *19* | 0.237 | 0.271 | 0.301 | 0.337 | 0.361 |
| *20* | 0.232 | 0.265 | 0.294 | 0.329 | 0.352 |

| | *Peluang uji satu arah* | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | *0.900* | *0.950* | *0.975* | *0.990* | *0.995* |
| | *Peluang uji dua arah* | | | | |
| *n* | *0.800* | *0.900* | *0.950* | *0.980* | *0.990* |
| *21* | 0.226 | 0.259 | 0.287 | 0.321 | 0.344 |
| *22* | 0.221 | 0.253 | 0.281 | 0.314 | 0.337 |
| *23* | 0.216 | 0.247 | 0.275 | 0.307 | 0.330 |
| *24* | 0.212 | 0.242 | 0.269 | 0.301 | 0.323 |
| *25* | 0.208 | 0.238 | 0.264 | 0.295 | 0.317 |
| *26* | 0.204 | 0.233 | 0.259 | 0.290 | 0.311 |
| *27* | 0.200 | 0.229 | 0.254 | 0.284 | 0.305 |
| *28* | 0.197 | 0.225 | 0.250 | 0.279 | 0.300 |
| *29* | 0.193 | 0.221 | 0.246 | 0.275 | 0.295 |
| *30* | 0.190 | 0.218 | 0.242 | 0.270 | 0.290 |
| *31* | 0.187 | 0.214 | 0.238 | 0.266 | 0.285 |
| *32* | 0.184 | 0.211 | 0.234 | 0.262 | 0.281 |
| *33* | 0.182 | 0.208 | 0.231 | 0.258 | 0.277 |
| *34* | 0.179 | 0.205 | 0.227 | 0.254 | 0.273 |
| *35* | 0.177 | 0.202 | 0.224 | 0.251 | 0.269 |
| *36* | 0.174 | 0.199 | 0.221 | 0.247 | 0.265 |
| *37* | 0.172 | 0.196 | 0.218 | 0.244 | 0.262 |
| *38* | 0.170 | 0.194 | 0.215 | 0.241 | 0.258 |
| *39* | 0.168 | 0.191 | 0.213 | 0.238 | 0.255 |
| *40* | 0.165 | 0.189 | 0.210 | 0.235 | 0.252 |
| *>40* | $\frac{1.07}{\sqrt{n}}$ | $\frac{1.22}{\sqrt{n}}$ | $\frac{1.36}{\sqrt{n}}$ | $\frac{1.52}{\sqrt{n}}$ | $\frac{1.63}{\sqrt{n}}$ |

**Sumber**: Miller *dalam* Conover (1971).

Entri dalam tabel adalah kuantil-kuantil atas pilihan untuk statistik-statistik Kolmogorov $T$, $T_1^+$, dan $T_1^-$ seperti yang didefinisikan untuk pengujian dua dan satu arah. Tolak hipotesis nol jika nilai statistik melebihi kuantil atas $1-\alpha$ dari tabel ini. Kuantil-kuantil ini pasti (eksak) untuk ukuran contoh berkuruan $n \le 20$ dalam uji dua arah.

## Tabel 14. Kuantil Statistik Uji Lilliefors

| *Ukuran contoh* | *Nilai peluang (p)* 0.80 | 0.85 | 0.90 | 0.95 | 0.99 |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 0.300 | 0.319 | 0.352 | 0.381 | 0.417 |
| 5 | 0.285 | 0.299 | 0.315 | 0.337 | 0.405 |
| 6 | 0.265 | 0.277 | 0.294 | 0.319 | 0.364 |
| 7 | 0.247 | 0.258 | 0.276 | 0.300 | 0.348 |
| 8 | 0.233 | 0.244 | 0.261 | 0.285 | 0.331 |
| 9 | 0.223 | 0.233 | 0.249 | 0.271 | 0.311 |
| 10 | 0.215 | 0.224 | 0.239 | 0.258 | 0.294 |
| 11 | 0.206 | 0.217 | 0.230 | 0.249 | 0.284 |
| 12 | 0.199 | 0.212 | 0.223 | 0.242 | 0.275 |
| 13 | 0.190 | 0.202 | 0.214 | 0.234 | 0.268 |
| 14 | 0.183 | 0.194 | 0.207 | 0.227 | 0.261 |
| 15 | 0.177 | 0.187 | 0.201 | 0.220 | 0.257 |
| 16 | 0.173 | 0.182 | 0.195 | 0.213 | 0.250 |
| 17 | 0.169 | 0.177 | 0.189 | 0.206 | 0.245 |
| 18 | 0.166 | 0.173 | 0.184 | 0.200 | 0.239 |
| 19 | 0.163 | 0.169 | 0.179 | 0.195 | 0.235 |
| 20 | 0.160 | 0.166 | 0.174 | 0.190 | 0.231 |
| 25 | 0.142 | 0.147 | 0.158 | 0.173 | 0.200 |
| 30 | 0.131 | 0.136 | 0.144 | 0.161 | 0.187 |
| >30 | $\frac{0.736}{\sqrt{n}}$ | $\frac{0.768}{\sqrt{n}}$ | $\frac{0.805}{\sqrt{n}}$ | $\frac{0.886}{\sqrt{n}}$ | $\frac{1.031}{\sqrt{n}}$ |

**Sumber**: Lilliefors *dalam* Conover (1971).

Catatan: Entri tabel ini adalah pendekatan nilai kuantil statistik uji Lilliefors. Tolak hipotesis nol pada taraf nyata pengujian $\alpha$, jika nilai statistik uji Lilliefors berdasarkan data contoh lebih besar dari kuantil atas statistik Lilliefors pada tabel ini untuk ukuran contoh tertentu.

## Tabel 15. Kuantil Statistik Uji Smirnov untuk Dua Contoh Acak berukuran sama *n*.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | *Uji Satu Arah* | | | | |
| | *0.900* | *0.950* | *0.975* | *0.990* | *0.995* |
| | *Uji Dua Arah* | | | | |
| *n* | *0.800* | *0.900* | *0.950* | *0.980* | *0.990* |
| *3* | 2 / 3 | 2 / 3 | | | |
| *4* | 3 / 4 | 3 / 4 | 3 / 4 | | |
| *5* | 3 / 5 | 3 / 5 | 4 / 5 | 4 / 5 | 4 / 5 |
| *6* | 3 / 6 | 4 / 6 | 4 / 6 | 5 / 6 | 5 / 6 |
| *7* | 4 / 7 | 4 / 7 | 5 / 7 | 5 / 7 | 5 / 7 |
| *8* | 4 / 8 | 4 / 8 | 5 / 8 | 5 / 8 | 6 / 8 |
| *9* | 4 / 9 | 5 / 9 | 5 / 9 | 6 / 9 | 6 / 9 |
| *10* | 4 /10 | 5 /10 | 6 /10 | 6 /10 | 7 /10 |
| *11* | 5 /11 | 5 /11 | 6 /11 | 7 /11 | 7 /11 |
| *12* | 5 /12 | 5 /12 | 6 /12 | 7 /12 | 7 /12 |
| *13* | 5 /13 | 6 /13 | 6 /13 | 7 /13 | 8 /13 |
| *14* | 5 /14 | 6 /14 | 7 /14 | 7 /14 | 8 /14 |
| *15* | 5 /15 | 6 /15 | 7 /15 | 8 /15 | 8 /15 |
| *16* | 6 /16 | 6 /16 | 7 /16 | 8 /16 | 9 /16 |
| *17* | 6 /17 | 7 /17 | 7 /17 | 8 /17 | 9 /17 |
| *18* | 6 /18 | 7 /18 | 8 /18 | 9 /18 | 9 /19 |
| *19* | 6 /19 | 7 /19 | 8 /19 | 9 /19 | 9 /19 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | *Uji Satu Arah* | | | | |
| | *0.900* | *0.950* | *0.975* | *0.990* | *0.995* |
| | *Uji Dua Arah* | | | | |
| | *0.800* | *0.900* | *0.950* | *0.980* | *0.990* |
| *20* | 6/20 | 7/20 | 8/20 | 9/20 | 10/20 |
| *21* | 6/21 | 7/21 | 8/21 | 9/21 | 10/21 |
| *22* | 7/22 | 8/22 | 8/22 | 10/22 | 10/22 |
| *23* | 7/23 | 8/23 | 9/23 | 10/23 | 10/23 |
| *24* | 7/24 | 8/24 | 9/24 | 10/24 | 11/24 |
| *25* | 7/25 | 8/25 | 9/25 | 10/25 | 11/25 |
| *26* | 7/26 | 8/26 | 9/26 | 10/26 | 11/26 |
| *27* | 7/27 | 8/27 | 9/27 | 11/27 | 11/27 |
| *28* | 8/28 | 9/28 | 10/28 | 11/28 | 12/28 |
| *29* | 8/29 | 9/29 | 10/29 | 11/29 | 12/29 |
| *30* | 8/30 | 9/30 | 10/30 | 11/30 | 12/30 |
| *31* | 8/31 | 9/31 | 10/31 | 11/31 | 12/31 |
| *32* | 8/32 | 9/32 | 10/32 | 12/32 | 12/32 |
| *34* | 8/34 | 10/34 | 11/34 | 12/34 | 13/34 |
| *36* | 9/36 | 10/36 | 11/36 | 12/36 | 13/36 |
| *38* | 9/38 | 10/38 | 11/38 | 13/38 | 14/38 |
| *40* | 9/40 | 10/40 | 12/40 | 13/40 | 14/40 |
| *n>40* | $\frac{1.52}{\sqrt{n}}$ | $\frac{1.73}{\sqrt{n}}$ | $\frac{1.92}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.15}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.30}{\sqrt{n}}$ |

**Sumber**: Birnbaum dan Hall *dalam* Conover (1971).

## Tabel 16. Kuantil Statistik Uji Smirnov untuk Dua Contoh Acak berukuran berbeda (*n* dan *m*)

| | | | | Peluang | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | *Satu Arah* | *0.900* | *0.950* | *0.975* | *0.990* | *0.995* |
| | *Dua Arah* | *0.800* | *0.900* | *0.950* | *0.980* | *0.990* |
| $n_1$ | $n_2$ | | | | | |
| 1 | 9 | 17/18 | | | | |
| | 10 | 9/10 | | | | |
| 2 | 3 | 5 /6 | | | | |
| | 4 | 3 /4 | | | | |
| | 5 | 4 /5 | 4 /5 | | | |
| | 6 | 5 /6 | 5 /6 | | | |
| | 7 | 5 /7 | 6 /7 | | | |
| | 8 | 3 /4 | 7 /8 | 7 /8 | | |
| | 9 | 7 /9 | 8 /9 | 8 /9 | | |
| | 10 | 7/10 | 4 /5 | 9/10 | | |
| 3 | 4 | 3 /4 | 3 /4 | | | |
| | 5 | 2 /3 | 4 /5 | 4 /5 | | |
| | 6 | 2 /3 | 2 /3 | 5 /6 | | |
| | 7 | 2 /3 | 5 /7 | 6 /7 | 6 /7 | |
| | 8 | 5 /8 | 3 /4 | 3 /4 | 7 /8 | |
| | 9 | 2 /3 | 2 /3 | 7 /9 | 8 /9 | 8 /9 |
| | 10 | 3 /5 | 7 /10 | 4 /5 | 9 /10 | 9 /10 |
| | 12 | 7 /12 | 2 /3 | 3 /4 | 5 /6 | 11/12 |
| 4 | 5 | 3 /5 | 3 /4 | 4 /5 | 4 /5 | |
| | 6 | 7 /12 | 2 /3 | 3 /4 | 5 /6 | 5 /6 |
| | 7 | 17/28 | 5 /7 | 3 /4 | 6 /7 | 6 /7 |
| | 8 | 5 /8 | 5 /8 | 3 /4 | 7 /8 | 7 /8 |
| | 9 | 5 /9 | 2 /3 | 3 /4 | 7 /9 | 8 /9 |
| | 10 | 11/20 | 13/20 | 7 /10 | 4 /5 | 4 /5 |
| | 12 | 7 /12 | 2 /3 | 2 /3 | 3 /4 | 5 /6 |
| | 16 | 9 /16 | 5 /8 | 11/16 | 3 /4 | 13/16 |
| 5 | 6 | 3 /5 | 2 /3 | 2 /3 | 5 /6 | 5 /6 |
| | 7 | 4 /7 | 23/35 | 5 /7 | 29/35 | 6 /7 |
| | 8 | 11/20 | 5 /8 | 27/40 | 4 /5 | 4 /5 |
| | 9 | 5 /9 | 3 /5 | 31/45 | 7 /9 | 4 /5 |
| | 10 | 1 /2 | 3 /5 | 7 /10 | 7 /10 | 4 /5 |
| | 15 | 8 /15 | 3 /5 | 2 /3 | 11/15 | 11/15 |
| | 20 | 1 /2 | 11/20 | 3 /5 | 7 /10 | 3 /4 |
| 6 | 7 | 23/42 | 4 /7 | 29/42 | 5 /7 | 5 /6 |
| | 8 | 1 /2 | 7 /12 | 2 /3 | 3 /4 | 3 /4 |
| | 9 | 1 /2 | 5 /9 | 2 /3 | 13/18 | 7 /9 |
| | 10 | 1 /2 | 17/30 | 19/30 | 7 /10 | 11/15 |
| | 12 | 1 /2 | 7 /12 | 7 /12 | 2 /3 | 3 /4 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 18 | 4 /9 | 5 /9 | 11/18 | 2 /3 | 13/18 |
| | 24 | 11/24 | 1 /2 | 7/12 | 5 /8 | 2 /3 |
| 7 | 8 | 27/56 | 33/56 | 5 /8 | 41/56 | 3 /4 |
| | 9 | 31/63 | 5 /9 | 40/63 | 5 /7 | 47/63 |
| | 10 | 33/70 | 39/70 | 43/70 | 7 /10 | 5 /7 |
| | 14 | 3 /7 | 1 /2 | 4 /7 | 9 /14 | 5 /7 |
| | 28 | 3 /7 | 13/28 | 15/28 | 17/28 | 9/14 |
| 8 | 9 | 4 /9 | 13/24 | 5 /8 | 2 /3 | 3 /4 |
| | 10 | 19/40 | 21/40 | 23/40 | 27/40 | 7 /10 |
| | 12 | 11/24 | 1 /2 | 7/12 | 5 /8 | 2 /3 |
| | 16 | 7 /16 | 1 /2 | 9/16 | 5 /8 | 5 /8 |
| | 32 | 13/32 | 7/16 | 1 /2 | 9/16 | 19/32 |
| 9 | 10 | 7 /15 | 1 /2 | 26/45 | 2 /3 | 31/45 |
| | 12 | 4 /9 | 1 /2 | 5 /9 | 11/18 | 2 /3 |
| | 15 | 19/45 | 22/45 | 8/15 | 3 /5 | 29/45 |
| | 18 | 7 /18 | 4 /9 | 1 /2 | 5 /9 | 11/18 |
| | 36 | 13/36 | 5 /12 | 17/36 | 19/36 | 5 /9 |
| 10 | 15 | 2 /5 | 7 /15 | 1 /2 | 17/30 | 19/30 |
| | 20 | 2 /5 | 9 /20 | 1 /2 | 11/20 | 3 /5 |
| | 40 | 7/20 | 2 /5 | 9 /20 | 1 /2 | |
| 12 | 15 | 23/60 | 9 /20 | 1 /2 | 11/20 | 7 /12 |
| | 16 | 3 /8 | 7 /16 | 23/48 | 13/24 | 7 /12 |
| | 18 | 13/36 | 5 /12 | 17/36 | 19/36 | 5 /9 |
| | 20 | 11/30 | 5 /12 | 7 /15 | 31/60 | 17/30 |
| 15 | 20 | 7 /20 | 2 /5 | 13/30 | 29/60 | 31/60 |
| 16 | 20 | 27/80 | 31/80 | 17/40 | 19/40 | 41/80 |
| | | $1.07\sqrt{\frac{m+n}{mn}}$ | $1.22\sqrt{\frac{m+n}{mn}}$ | $1.36\sqrt{\frac{m+n}{mn}}$ | $1.52\sqrt{\frac{m+n}{mn}}$ | $1.63\sqrt{\frac{m+n}{mn}}$ |

**Sumber**: Massey *dalam* Conover (1971).

Entri diatas adalah kuantil $w_p$ dari statistik uji Smirnov dua-contoh. $N_1$ adalah contoh dengan ukuran yang lebih kecil dan $N_2$ adalah contoh dengan ukuran lebih besar. Tolak hipotesis nol dengan taraf nyata $\alpha$ jika statistik uji lebih besar dari kuantil atas $w_{1-\alpha}$ pada tabel diatas.

## Tabel 17. Kuantil Statistik uji Birnbaum-Hall

| | Peluang | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ***n*** | ***0.80*** | ***0.90*** | ***0.95*** | ***0.98*** | ***0.99*** |
| ***4*** | 3/4 | 3/4 | | | |
| ***5*** | 3/5 | 4/5 | 4/5 | | |
| ***6*** | 4/6 | 4/6 | 5/6 | 5/6 | 5/6 |
| ***7*** | 4/7 | 5/7 | 5/7 | 6/7 | 6/7 |
| ***8*** | 5/8 | 5/8 | 5/8 | 6/8 | 6/8 |
| ***9*** | 5/9 | 5/9 | 6/9 | 6/9 | 7/9 |
| ***10*** | 5/10 | 6/10 | 6/10 | 7/10 | 7/10 |
| ***11*** | 5/11 | 6/11 | 7/11 | 7/11 | 8/11 |
| ***12*** | 6/12 | 6/12 | 7/12 | 8/12 | 8/12 |
| ***13*** | 6/13 | 7/13 | 7/13 | 8/13 | 8/13 |
| ***14*** | 6/14 | 7/14 | 8/14 | 8/14 | 9/14 |
| ***15*** | 6/15 | 7/15 | 8/15 | 9/15 | 9/15 |
| ***16*** | 7/16 | 7/16 | 8/16 | 9/16 | 9/16 |
| ***17*** | 7/17 | 8/17 | 8/17 | 9/17 | 10/17 |
| ***18*** | 7/18 | 8/18 | 9/18 | 9/18 | 10/18 |
| ***19*** | 7/19 | 8/19 | 9/19 | 10/19 | 10/19 |
| ***20*** | 7/20 | 8/20 | 9/20 | 10/20 | 11/20 |
| ***22*** | 8/22 | 9/22 | 10/22 | 11/22 | 11/22 |
| ***24*** | 8/24 | 9/24 | 10/24 | 11/24 | 12/24 |
| ***26*** | 9/26 | 10/26 | 10/26 | 11/26 | 12/26 |
| ***28*** | 9/28 | 10/28 | 11/28 | 12/28 | 13/28 |
| ***30*** | 9/30 | 10/30 | 11/30 | 12/30 | 13/30 |
| ***32*** | 10/32 | 11/32 | 12/32 | 13/32 | 14/32 |
| ***34*** | 10/34 | 11/34 | 12/34 | 13/34 | 14/34 |
| ***36*** | 10/36 | 11/36 | 12/36 | 14/36 | 14/36 |
| ***38*** | 10/38 | 12/38 | 13/38 | 14/38 | 15/38 |
| ***40*** | 11/40 | 12/40 | 13/40 | 14/40 | 15/40 |
| ***n>40*** | $\frac{2.02}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.18}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.34}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.53}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.66}{\sqrt{n}}$ |

**Sumber**: Birnbaum dan Hall *dalam* Conover (1971).

Entri tabel adalah $w_p$ dari statistik uji Smirnov tiga-contoh. Ketiga contoh berukuran sama $n$. Tolak hipotesis nol pada taraf $\alpha$ jika statistik uji melebihi kuantil atas $w_{1-\alpha}$ pada tabel.

## Tabel 18. Kuantil Statistik Uji Smirnov *k*-Contoh Satu Arah

| *n* | | | *k=2* | | | | | *k=3* | | | | | *k=4* | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *0.900* | *0.950* | *0.975* | *0.990* | *0.995* | *0.900* | *0.950* | *0.975* | *0.990* | *0.995* | *0.900* | *0.950* | *0.975* | *0.990* | *0.995* |
| *3* | 2 | 2 | | | | 2 | | | | | | | | | |
| *4* | 3 | 3 | 3 | | | 3 | 3 | | | | 3 | 3 | | | |
| *5* | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 3 | 4 | 4 | 4 | | 4 | 4 | 4 | | |
| *6* | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 |
| *7* | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 |
| *8* | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 |
| *9* | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 5 | 6 | 6 | 6 | 7 |
| *10* | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 |
| *12* | 5 | 5 | 6 | 7 | 7 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 6 | 6 | 7 | 8 | 8 |
| *14* | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 6 | 7 | 8 | 8 | 9 |
| *16* | 6 | 6 | 7 | 8 | 9 | 6 | 7 | 8 | 9 | 9 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 |
| *18* | 6 | 7 | 8 | 9 | 9 | 7 | 8 | 8 | 9 | 10 | 7 | 8 | 9 | 9 | 10 |
| *20* | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 7 | 8 | 9 | 10 | 10 | 8 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| *25* | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 9 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| *30* | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 10 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| *35* | 8 | 10 | 11 | 12 | 13 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 10 | 10 | 12 | 14 | 14 |
| *40* | 9 | 10 | 12 | 13 | 14 | 10 | 12 | 13 | 14 | 15 | 11 | 11 | 13 | 15 | 15 |
| *45* | 10 | 11 | 12 | 14 | 15 | 11 | 12 | 14 | 15 | 16 | 12 | 12 | 14 | 15 | 16 |
| *50* | 10 | 12 | 13 | 15 | 16 | 12 | 13 | 14 | 16 | 17 | 13 | 13 | 15 | 16 | 17 |
| *n>50* | $\frac{1.52}{\sqrt{n}}$ | $\frac{1.73}{\sqrt{n}}$ | $\frac{1.92}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.15}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.30}{\sqrt{n}}$ | $\frac{1.73}{\sqrt{n}}$ | $\frac{1.92}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.09}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.30}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.45}{\sqrt{n}}$ | $\frac{1.85}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.02}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.19}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.39}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.53}{\sqrt{n}}$ |

| *n* | *k=5* | | | | | *k=6* | | | | | *k=7* | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *0.900* | *0.950* | *0.975* | *0.990* | *0.995* | *0.900* | *0.950* | *0.975* | *0.990* | *0.995* | *0.900* | *0.950* | *0.975* | *0.990* | *0.995* |
| *3* | | | | | | | | | | | | | | | |
| *4* | 3 | | | | | 3 | | | | | 3 | | | | |
| *5* | 4 | 4 | 4 | | | 4 | 4 | 4 | | | 4 | 4 | 4 | | |
| *6* | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 5 | 5 | 5 | | 4 | 5 | 5 | 5 | |
| *7* | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 |
| *8* | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 5 | 6 | 6 | 6 | 7 |
| *9* | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 |
| *10* | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 |
| *12* | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 |
| *14* | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 | 7 | 7 | 8 | 9 | 9 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 |
| *16* | 7 | 8 | 8 | 9 | 10 | 7 | 8 | 9 | 9 | 10 | 8 | 8 | 9 | 9 | 10 |
| *18* | 8 | 8 | 9 | 10 | 10 | 8 | 9 | 9 | 10 | 10 | 8 | 9 | 9 | 10 | 11 |
| *20* | 8 | 9 | 9 | 10 | 11 | 8 | 9 | 10 | 10 | 11 | 8 | 9 | 10 | 11 | 11 |
| *25* | 9 | 10 | 11 | 12 | 12 | 9 | 10 | 11 | 12 | 12 | 10 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| *30* | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 11 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| *35* | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| *40* | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| *45* | 12 | 13 | 15 | 16 | 17 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| *50* | 13 | 14 | 15 | 17 | 18 | 13 | 15 | 16 | 17 | 18 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| *n>50* | $\frac{1.92}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.09}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.25}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.45}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.59}{\sqrt{n}}$ | $\frac{1.97}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.14}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.30}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.49}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.63}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.02}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.18}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.34}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.53}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.66}{\sqrt{n}}$ |

| *n* | | | *k=8* | | | | | *k=9* | | | | | *k=10* | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *0.900* | *0.950* | *0.975* | *0.990* | *0.995* | *0.900* | *0.950* | *0.975* | *0.990* | *0.995* | *0.900* | *0.950* | *0.975* | *0.990* | *0.995* |
| *3* | | | | | | | | | | | | | | | |
| *4* | 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| *5* | 4 | 4 | | | | 4 | 4 | | | | 4 | 4 | | | |
| *6* | 4 | 5 | 5 | 5 | | 5 | 5 | 5 | 5 | | 5 | 5 | 5 | 5 | |
| *7* | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 |
| *8* | 5 | 6 | 6 | 6 | 7 | 5 | 6 | 6 | 6 | 7 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 |
| *9* | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 |
| *10* | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 6 | 7 | 7 | 7 | 8 |
| *12* | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 |
| *14* | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 |
| *16* | 8 | 8 | 9 | 10 | 10 | 8 | 8 | 9 | 10 | 10 | 8 | 8 | 9 | 10 | 10 |
| *18* | 8 | 9 | 9 | 10 | 11 | 8 | 9 | 10 | 10 | 11 | 8 | 9 | 10 | 10 | 11 |
| *20* | 9 | 9 | 10 | 11 | 11 | 9 | 9 | 10 | 11 | 11 | 9 | 10 | 10 | 11 | 12 |
| *25* | 10 | 11 | 11 | 12 | 13 | 10 | 11 | 11 | 12 | 13 | 10 | 11 | 12 | 12 | 13 |
| *30* | 11 | 12 | 12 | 13 | 14 | 11 | 12 | 13 | 14 | 14 | 11 | 12 | 13 | 14 | 14 |
| *35* | 12 | 13 | 13 | 15 | 15 | 12 | 13 | 14 | 15 | 15 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| *40* | 12 | 13 | 14 | 16 | 16 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| *45* | 13 | 14 | 15 | 17 | 17 | 13 | 15 | 16 | 17 | 18 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| *50* | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 14 | 15 | 16 | 18 | 19 | 14 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| *n>50* | $\frac{2.05}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.22}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.37}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.55}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.69}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.09}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.25}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.40}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.58}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.72}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.11}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.27}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.42}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.61}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.74}{\sqrt{n}}$ |

**Sumber**: Conover (1971). Entri tabel diatas dibagi dengan *n* merupakan kuantil statistik Smirnov *k*-contoh satu arah dan ukuran contoh *n*. Tolak hipotesis nol jika statistik ujinya melebihi kuantil *q=1-p*.

## Tabel 19. Kuantil Statistik Uji Smirnov *k*-contoh Dua Arah

| *n* | *0.900* | *0.950* | *0.975* | *0.990* | *0.995* |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 (k=2) | | | | |
| 4 | 3 (2≤k≤6) | 3 (k=2) | | | |
| 5 | 3 (k=2) | 4 (2≤k≤10) | 4 (2≤k≤4) | 4 (k=2) | |
| | 4 (3≤k≤10) | | | | |
| 6 | 4 (2≤k≤8) | 4 (k=2,3) | 4 (k=2) | 5 (2≤k≤6) | 5 (k=2,3) |
| | 5 (k=9,10) | 5 (4≤k≤10) | 5 (3≤k≤10) | | |
| 7 | 4 (2≤k≤4) | 4 (k=2) | 5 (2≤k≤5) | 5 (k=2) | 6 (2≤k≤10) |
| | 5 (5≤k≤10) | 5 (3≤k≤10) | 6 (6≤k≤10) | 6 (3≤k≤10) | |
| 8 | 4 (k=2) | 5 (k=2,3) | 5 (k=2) | 6 (2≤k≤7) | 6 (k=2,3) |
| | 5 (3≤k≤10) | 6 (7≤k≤10) | 6 (3≤k≤10) | 7 (8≤k≤10) | 7 (4≤k≤10) |
| 9 | 4 (k=2) | 5 (k=2,3) | 6 (2≤k≤9) | 6 (k=2,3) | 7 (2≤k≤10) |
| | 5 (3≤k≤10) | 6 (4≤k≤10) | 7 (k=10) | 7 (4≤k≤10) | |
| 10 | 5 (2≤k≤6) | 5 (k=2) | 6 (2≤k≤5) | 7 (2≤k≤10) | 7 (2≤k≤4) |
| | 6 (7≤k≤10) | 6 (3≤k≤10) | 7 (6≤k≤10) | | 8 (5≤k≤10) |
| 12 | 5 (k=2,3) | 6 (2≤k≤4) | 6 (k=2) | 7 (k=2,3) | 8 (2≤k≤7) |
| | 6 (4≤k≤10) | 7 (5≤k≤10) | 7 (3≤k≤10) | 8 (4≤k≤10) | 9 (8≤k≤10) |
| 14 | 6 (2≤k≤7) | 6 (k=2) | 7 (k=2,3) | 8 (2≤k≤5) | 8 (k=2) |
| | 7 (8≤k≤10) | 7 (3≤k≤10) | 8 (4≤k≤10) | 9 (6≤k≤10) | 9 (3≤k≤10) |
| 16 | 6 (k=2,3) | 7 (2≤k≤5) | 8 (2≤k≤8) | 8 (k=2) | 9 (2≤k≤4) |
| | 7 (4≤k≤10) | 8 (6≤k≤10) | 9 (k=9,10) | 9 (3≤k≤10) | 10 (5≤k≤10) |

| *n* | *0.900* | *0.950* | *0.975* | *0.990* | *0.995* |
|---|---|---|---|---|---|
| 18 | 6 (k=2) | 7 (k=2) | 8 (2≤k≤4) | 9 (2≤k≤4) | 10 (2≤k≤9) |
| | 7 (3≤k≤10) | 8 (3≤k≤10) | 9 (5≤k≤10) | 10 (5≤k≤10) | 11 (k=10) |
| 20 | 7 (2≤k≤6) | 8 (2≤k≤7) | 8 (k=2) | 9 (k=2) | 10 (k=2,3) |
| | 8 (7≤k≤10) | 9 (8≤k≤10) | 9 (3≤k≤10) | 10 (3≤k≤10) | 11 (4≤k≤10) |
| 25 | 8 (2≤k≤8) | 9 (2≤k≤8) | 9 (k=2) | 11 (2≤k≤8) | 11 (k=2) |
| | | | 10 (3≤k≤9) | | |
| | 9 (k=9,10) | 10 (k=9,10) | 11 (k=10) | 12 (k=9,10) | 12 (3≤k≤10) |
| 30 | 8 (k=2) | 9 (k=2) | 10 (k=2) | 12 (2≤k≤8) | 12 (k=2) |
| | 9 (3≤k≤10) | 10 (3≤k≤10) | 11 (3≤k≤10) | 13 (k=9,10) | 13 (3≤k≤10) |
| 35 | 9 (2≤k≤4) | 10 (k=2,3) | 11 (k=2) | 13 (2≤k≤8) | 13 (k=2) |
| | 10 (5≤k≤10) | 11 (4≤k≤10) | 12 (3≤k≤10) | 14 (k=9,10) | 14 (3≤k≤10) |
| 40 | 10 (2≤k≤8) | 11 (2≤k≤5) | 12 (k=2,3) | 13 (k=2) | 14 (k=2) |
| | 11 (k=9,10) | 12 (6≤k≤10) | 13 (4≤k≤10) | 14 (3≤k≤10) | 15 (3≤k≤10) |
| 45 | 10 (k=2,3) | 12 (2≤k≤8) | 13 (2≤k≤5) | 14 (k=2) | 15 (k=2) |
| | 11 (4≤k≤10) | 13 (k=9,10) | 14 (6≤k≤10) | 15 (3≤k≤10) | 16 (3≤k≤10) |
| 50 | 11 (2≤k≤6) | 12 (k=2,3) | 14 (2≤k≤9) | 15 (k=2,3) | 16 (k=2,3) |
| | 12 (7≤k≤10) | 13 (4≤k≤10) | 15 (k=10) | 16 (4≤k≤10) | 17 (4≤k≤10) |
| $n>50 \approx$ | $\frac{1.52}{\sqrt{n}}$ | $\frac{1.73}{\sqrt{n}}$ | $\frac{1.92}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.15}{\sqrt{n}}$ | $\frac{2.30}{\sqrt{n}}$ |

**Sumber**: Conover (1971).

Entri tabel ini dibagi dengan *n* merupakan kuantil statistik uji Smirnov *k*-contoh dua arah. Tolak hipotesis nol jika statistik uji Smirnov $T_3$ melebihi kuantil ke-*p*.

# Tabel 20. Nilai Kritis Statistik uji Tukey

| *Satu-arah* | | *0.025 – 0.005 – 0.0005* |
|---|---|---|
| *Dua-arah* | | *0.050 – 0.010 – 0.001* |
| *$N_2$-$N_1$* | *$N_1$* | |
| 0 | 4-8 | 7/9/13 |
| | 9-21 | 7/10/13 |
| | 22-24 | 7/10/14 |
| | 25- | 8/10/14 |
| 1 | 3-4 | 7/-/- |
| | 5-6 | 7/9/- |
| | 7 | 7/9/13 |
| | 8-20 | 7/10/13 |
| | 21-23 | 7/10/14 |
| | 24 | 8/10/14 |
| 2 | 3-4 | 7/9/- |
| | 5 | 7/10/- |
| | 6-18 | 7/10/13 |
| | 19-21 | 7/10/14 |
| | 22- | 8/10/14 |
| 3 | 3-5 | 7/10/- |
| | 6-14 | 7/10/13 |
| | 15-17 | 7/10/14 |
| | 18- | 8/10/14 |
| 4 | 3 | 8/-/- |
| | 4-7 | 8/10/13 |
| | 8- | 8/10/14 |
| 5 | 3-4 | 9/11/- |
| | 5-6 | 8/11/14 |
| | 7- | 8/10/14 |
| 6 | 3-4 | 9/11/- |
| | 5-11 | 8/11/14 |
| | 12- | 8/10/14 |
| 7 | 3-4 | 9/12/- |
| | 5 | 9/12/15 |
| | 6-8 | 8/11/15 |
| | 9-17 | 8/11/14 |
| | 18- | 8/10/14 |
| 8 | 3 | 10/13/- |
| | 4 | 9/12/- |
| | 5-6 | 9/12/15 |
| | 7-14 | 8/11/15 |
| | 15-24 | 8/11/14 |
| | 25- | 8/10/14 |

| *Satu-arah* | | *0.025 – 0.005 – 0.0005* |
|---|---|---|
| *Dua-arah* | | *0.050 – 0.010 – 0.001* |
| *$N_2$-$N_1$* | *$N_1$* | |
| 9 | 3 | 10/13/- |
| | 4 | 10/13/16 |
| | 5-7 | 9/12/16 |
| | 8 | 8/12/15 |
| | 9-18 | 8/11/15 |
| | 19-31 | 8/11/14 |
| | 32- | 8/10/14 |
| 10 | 3 | 11/14/- |
| | 4 | 10/13/17 |
| | 5 | 9/13/17 |
| | 6 | 9/13/16 |
| | 7-9 | 9/12/16 |
| | 10 | 8/12/15 |
| | 11-22 | 8/11/15 |
| | 23-42 | 8/11/14 |
| | 43- | 8/10/14 |
| 11 | 2 | 12/-/- |
| | 3 | 11/15/- |
| | 4 | 10/14/18 |
| | 5 | 10/13/17 |
| | 6-7 | 9/12/17 |
| | 8-10 | 9/12/16 |
| | 11-12 | 8/12/16 |
| | 13-19 | 8/11/15 |
| 12 | 2 | 12/-/- |
| | 3 | 12/15/- |
| | 4 | 11/15/18 |
| | 5 | 10/14/18 |
| | 6 | 10/13/17 |
| | 7-8 | 9/12/17 |
| | 9-10 | 9/12/16 |
| | 11-13 | 8/12/16 |
| | 14 | 8/11/16 |
| | 15-18 | 8/11/15 |
| 13 | 2 | 13/-/- |
| | 3 | 12/16/- |
| | 4 | 11/15/19 |
| | 5-6 | 10/14/18 |
| | 7 | 9/13/18 |
| | 8-9 | 9/13/17 |
| | 10 | 9/12/17 |
| | 11 | 9/12/16 |
| | 12-15 | 8/12/16 |
| | 16-17 | 8/11/16 |

| *Satu-arah* | *0.025 – 0.005 – 0.0005* | |
|---|---|---|
| *Dua-arah* | *0.050 – 0.010 – 0.001* | |
| $N_2$-$N_1$ | $N_1$ | |
| 14 | 2 | 13/-/- |
| | 3 | 13/17/- |
| | 4 | 11/16/19 |
| | 5 | 11/15/19 |
| | 6 | 10/14/19 |
| | 7 | 10/14/18 |
| | 8 | 9/13/18 |
| | 9-10 | 9/13/17 |
| | 11-12 | 9/12/17 |
| | 13 | 9/12/16 |
| | 14-16 | 8/12/16 |
| 15 | 2 | 14/-/- |
| | 3 | 13/18/- |
| | 4 | 12/16/20 |
| | 5 | 11/15/20 |
| | 6 | 10/15/19 |
| | 7 | 10/14/19 |
| | 8 | 10/14/18 |
| | 9 | 9/13/18 |
| | 10-11 | 9/13/17 |
| | 12-13 | 9/12/17 |
| | 14 | 9/12/16 |
| | 15 | 8/12/16 |
| 16 | 2 | 16/-/- |
| | 3 | 13/18/- |
| | 4 | 12/17/- |
| | 5 | 11/16/20 |
| | 6 | 10/15/20 |
| | 7-8 | 10/14/19 |
| | 9 | 9/14/18 |
| | 10-11 | 9/13/18 |
| | 12 | 9/13/17 |
| | 13-14 | 9/12/17 |
| 17 | 2 | 16/-/- |
| | 3 | 14/19/- |
| | 4 | 12/18/- |
| | 5 | 11/16/21 |
| | 6 | 11/16/20 |

| *Satu-arah* | *0.025 – 0.005 – 0.0005* | |
|---|---|---|
| *Dua-arah* | *0.050 – 0.010 – 0.001* | |
| $N_2$-$N_1$ | $N_1$ | |
| 17 | 7 | 10/15/20 |
| | 8-9 | 10/14/19 |
| | 10-12 | 9/13/18 |
| | 13 | 9/13/17 |
| 18 | 2 | 17/-/- |
| | 3 | 14/20/- |
| | 4 | 13/18/- |
| | 5 | 11/17/22 |
| | 6 | 11/16/21 |
| | 7-8 | 10/15/20 |
| | 9 | 10/14/19 |
| | 10 | 9/14/19 |
| | 11-12 | 9/13/18 |
| 19 | 2 | 17/-/- |
| | 3 | 14/20/- |
| | 4 | 13/19/23 |
| | 5 | 12/17/22 |
| | 6 | 11/16/22 |
| | 7 | 11/16/21 |
| | 8 | 10/15/20 |
| | 9 | 10/14/20 |
| | 10 | 10/14/19 |
| | 11 | 9/14/19 |
| 20 | 2 | 18/-/- |
| | 3 | 15/21/- |
| | 4 | 13/19/24 |
| | 5 | 12/18/23 |
| | 6 | 11/17/22 |
| | 7 | 11/16/21 |
| | 8 | 10/15/21 |
| | 9 | 10/15/20 |
| | 10 | 10/14/20 |

**Sumber**: Tukey *dalam* Conover (1971).

Untuk ukuran contoh diluar jangkauan tabel diatas, digunakan pendekatan, bilamana $\lambda = N_2/N_1$ maka untuk uji dua arah $\Pr(T_3 \geq h) \cong \frac{2\lambda}{\lambda^2 - 1}\left(\frac{\lambda^h - 1}{(\lambda+1)^h}\right)$

dan untuk uji satu arah memiliki peluang separuhnya.

## Tabel 21. Kuantil Statistik uji Spearman- *rho* ($\rho$)

| ***n*** | ***α*** **0.999** | ***0.995*** | ***0.990*** | ***0.975*** | ***0.950*** | ***0.900*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **4** | | | | | 0.8000 | 0.8000 |
| **5** | | | 0.9000 | 0.9000 | 0.8000 | 0.7000 |
| **6** | | 0.9429 | 0.8857 | 0.8286 | 0.7714 | 0.6000 |
| **7** | 0.9643 | 0.8929 | 0.8571 | 0.7450 | 0.6786 | 0.5357 |
| **8** | 0.9286 | 0.8571 | 0.8095 | 0.7143 | 0.6190 | 0.5000 |
| **9** | 0.9000 | 0.8167 | 0.7667 | 0.6833 | 0.5833 | 0.4667 |
| **10** | 0.8667 | 0.7818 | 0.7333 | 0.6364 | 0.5515 | 0.4424 |
| **11** | 0.8364 | 0.7545 | 0.7000 | 0.6091 | 0.5273 | 0.4182 |
| **12** | 0.8182 | 0.7273 | 0.6713 | 0.5804 | 0.4965 | 0.3986 |
| **13** | 0.7912 | 0.6978 | 0.6429 | 0.5549 | 0.4780 | 0.3791 |
| **14** | 0.7670 | 0.6747 | 0.6220 | 0.5341 | 0.4593 | 0.3626 |
| **15** | 0.7464 | 0.6536 | 0.6000 | 0.5179 | 0.4429 | 0.3500 |
| **16** | 0.7265 | 0.6324 | 0.5824 | 0.5000 | 0.4265 | 0.3382 |
| **17** | 0.7083 | 0.6152 | 0.5637 | 0.4853 | 0.4118 | 0.3260 |
| **18** | 0.6904 | 0.5975 | 0.5480 | 0.4716 | 0.3994 | 0.3148 |
| **19** | 0.6737 | 0.5825 | 0.5333 | 0.4579 | 0.3895 | 0.3070 |
| **20** | 0.6586 | 0.5684 | 0.5203 | 0.4451 | 0.3789 | 0.2977 |
| **21** | 0.6455 | 0.5545 | 0.5078 | 0.4351 | 0.3688 | 0.2909 |
| **22** | 0.6318 | 0.5426 | 0.4963 | 0.4241 | 0.3597 | 0.2829 |
| **23** | 0.6186 | 0.5306 | 0.4852 | 0.4150 | 0.3518 | 0.2767 |
| **24** | 0.6070 | 0.5200 | 0.4748 | 0.4061 | 0.3435 | 0.2704 |
| **25** | 0.5962 | 0.5100 | 0.4654 | 0.3977 | 0.3362 | 0.2646 |
| **26** | 0.5856 | 0.5002 | 0.4564 | 0.3894 | 0.3299 | 0.2588 |
| **27** | 0.5757 | 0.4915 | 0.4481 | 0.3822 | 0.3236 | 0.2540 |
| **28** | 0.5660 | 0.4828 | 0.4401 | 0.3749 | 0.3175 | 0.2490 |
| **29** | 0.5567 | 0.4744 | 0.4320 | 0.3685 | 0.3113 | 0.2443 |
| **30** | 0.5479 | 0.4665 | 0.4251 | 0.3620 | 0.3059 | 0.2400 |

**Sumber**: Glasser dan Winter *dalam* Conover (1971).

Catatan:

Untuk nilai $n > 30$, gunakan dengan pendekatan sebaran normal baku

$$w_p \cong \frac{z_p}{\sqrt{n-1}} \text{ dan } w_{1-p} = -w_p$$

**Tabel 22.** Nilai kritis statistik uji *Kendall-tau* ($\tau$)

| ***n*** | $\alpha$ ***0.900*** | ***0.950*** | ***0.975*** | ***0.950*** | ***0.900*** |
|---|---|---|---|---|---|
| **4** | 4 | 4 | 6 | 6 | 6 |
| **5** | 6 | 6 | 8 | 8 | 10 |
| **6** | 7 | 9 | 11 | 11 | 13 |
| **7** | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 |
| **8** | 10 | 14 | 16 | 18 | 20 |
| **9** | 12 | 16 | 18 | 22 | 24 |
| **10** | 15 | 19 | 21 | 25 | 27 |
| **11** | 17 | 21 | 25 | 29 | 31 |
| **12** | 18 | 24 | 28 | 34 | 36 |
| **13** | 22 | 26 | 32 | 38 | 42 |
| **14** | 23 | 31 | 35 | 41 | 45 |
| **15** | 27 | 33 | 39 | 47 | 51 |
| **16** | 28 | 36 | 44 | 50 | 56 |
| **17** | 32 | 40 | 48 | 56 | 62 |
| **18** | 35 | 43 | 51 | 61 | 67 |
| **19** | 37 | 47 | 55 | 65 | 73 |
| **20** | 40 | 50 | 60 | 70 | 78 |
| **21** | 42 | 54 | 64 | 76 | 84 |
| **22** | 45 | 59 | 69 | 81 | 89 |
| **23** | 49 | 63 | 73 | 87 | 97 |
| **24** | 52 | 66 | 78 | 92 | 102 |
| **25** | 56 | 70 | 84 | 98 | 108 |
| **26** | 59 | 75 | 89 | 105 | 115 |
| **27** | 61 | 79 | 93 | 111 | 123 |
| **28** | 66 | 84 | 98 | 116 | 128 |
| **29** | 68 | 88 | 104 | 124 | 136 |
| **30** | 73 | 93 | 109 | 129 | 143 |

| *n* | *α* 0.900 | 0.950 | 0.975 | 0.950 | 0.900 |
|---|---|---|---|---|---|
| **31** | 75 | 97 | 115 | 135 | 149 |
| **32** | 80 | 102 | 120 | 142 | 158 |
| **33** | 84 | 106 | 126 | 150 | 164 |
| **34** | 87 | 111 | 131 | 155 | 173 |
| **35** | 91 | 115 | 137 | 163 | 179 |
| **36** | 94 | 120 | 144 | 170 | 188 |
| **37** | 98 | 126 | 150 | 176 | 196 |
| **38** | 103 | 131 | 155 | 183 | 203 |
| **39** | 107 | 137 | 161 | 191 | 211 |
| **40** | 110 | 142 | 168 | 198 | 220 |

**Sumber**: Kaarsemaker dan van Wijngaarden *dalam* Conover (1971).

Untuk $n > 40$ pendekatan kuantil *T* dapat diperoleh dengan menggunakan formula

$$w_p \cong z_p \sqrt{\frac{n(n-1)(2n+5)}{18}}$$

dimana $z_p$ adalah kuantil ke-*p* dari sebaran Normal Baku.

Catatan: Kuantil bawah dapat dicari dengan menggunakan hubungan berikut

$$w_p = -w_{1-p}$$

## Tabel 23. Kuantil Statistik Wald-Wolfowitz

| $n_1$ | $n_2$ | $w_{.005}$ | $w_{.010}$ | $w_{.025}$ | $w_{.050}$ | $w_{.010}$ | $w_{.900}$ | $w_{.950}$ | $w_{.975}$ | $w_{.990}$ | $w_{.995}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 5 | | | | | 3 | | | | | |
| | 8 | | | | 3 | 3 | | | | | |
| | 11 | | | | 3 | 3 | | | | | |
| | 14 | | | 3 | 3 | 3 | | | | | |
| | 17 | | | 3 | 3 | 3 | | | | | |
| | 20 | | 3 | 3 | 3 | 4 | | | | | |
| 5 | 5 | | 3 | 3 | 4 | 4 | 8 | 8 | 9 | 9 | |
| | 8 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 9 | 10 | 10 | | |
| | 11 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 10 | | | | |
| | 14 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 | | | | | |
| | 17 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | | | | | |
| | 20 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | | | | | |
| 8 | 8 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 12 | 12 | 13 | 13 | 14 |
| | 11 | 5 | 6 | 6 | 7 | 8 | 13 | 14 | 14 | 15 | 15 |
| | 14 | 6 | 6 | 7 | 8 | 8 | 14 | 15 | 15 | 16 | 16 |
| | 17 | 6 | 7 | 8 | 8 | 9 | 15 | 15 | 16 | | |
| | 20 | 7 | 7 | 8 | 9 | 10 | 15 | 16 | 16 | | |
| 11 | 11 | 6 | 7 | 8 | 8 | 9 | 15 | 16 | 16 | 17 | 18 |
| | 14 | 7 | 8 | 9 | 9 | 10 | 16 | 17 | 18 | 19 | 19 |
| | 17 | 8 | 9 | 10 | 10 | 11 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
| | 20 | 9 | 9 | 10 | 11 | 12 | 18 | 19 | 20 | 21 | 21 |
| 14 | 14 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |
| | 17 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 20 | 21 | 22 | 23 | 23 |
| | 20 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 21 | 22 | 23 | 24 | 24 |
| 17 | 17 | 11 | 11 | 12 | 13 | 14 | 22 | 23 | 24 | 25 | 25 |
| | 20 | 12 | 12 | 14 | 14 | 16 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
| 20 | 20 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |

**Sumber**: Swed dan Eisenhart *dalam* Conover (1971).

Untuk $n$ atau $m$ lebih besar dari 20, nilai kuantil statistik Wald-Wolfowitz dapat didekati dengan

$$w_p = \frac{2mn}{m+n} + 1 + z_p \sqrt{\frac{2mn(2mn - m - n)}{(m+n)^2 (m+n-1)}}$$

dimana $z_p$ adalah kuantil ke-$p$ dari sebaran Normal Baku.

# Daftar Pustaka

**Bain, L.J., and M. Engelhardt**. 1987 *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*. Duxbury Press. Boston.

**Bickel, P.J. and K.A. Doksum.** 1977. *Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics.* Holden-Day, Inc. Oakland.

**Blank, L.** 1982. *Statistical Procedures for Engineering, Management, and Science.* McGraw-Hill International Book Company. Singapore.

**Brunk, H.D.** 1965. *An Introduction to Mathematical Statistics.* Blaisdell Publishing Company. Waltham.

**Connover, W.J.** 1971. *Practical Nonparametric Statistics*. Wiley International Edition. John Wiley & Sons. New York.

**Dudewicz, E.J.** 1976. *Introduction to Statistics and Probability*. Holt, Rinehart, and Winston. New York.

**Gibbons, J.D.** 1985. *Nonparametric Statistical Inference. 2nd ed.* Marcel Dekker, Inc. New York.

**Mendenhall, W., E.L. Scheaffer, and D.D. Wackerly.** 1986. *Mathematical Statistics with Applications.* 3rd ed. Duxbury Press. Boston.

**Randles, R.H. and D.A. Wolfe.** 1979. *Introduction to The Theory of Nonparametric Statistics.* John Wiley & Sons. New York.

**Siegel, S. and N.J. Castellan, Jr**. 1988. *Nonparametric Statistics for the Behavioral Sciences.* 2nd ed. McGraw-Hill International edition. Statistics Series. McGraw-Hill Book Company. Singapore.

# Biodata Penulis

**SIGIT NUGROHO, Ph.D.** (University of Kentucky-USA, 1994) dilahirkan di Surakarta pada tanggal 30 Nopember 1960. Ia menyelesaikan Pendidikan Dasar dan Menengahnya di Yogyakarta. Setelah tamat **SMA Negeri III 'Padmanaba' Yogyakarta**, ia meneruskan studinya di Institut Pertanian Bogor pada tahun 1980 melalui jalur Proyek Perintis II. Lulus sebagai **Sarjana Statistika (Ir.)** tahun 1984 dari Jurusan Statistika – **Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam – Institut Pertanian Bogor (FMIPA-IPB)**. Sejak awal 1986 ia bekerja sebagai staf pengajar pada Fakultas Pertanian Universitas Bengkulu (Faperta UNIB), yang selanjutnya pada tahun 2000 pindah ke Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Bengkulu. Sampai buku ini ditulis, jabatan akademiknya adalah **Lektor Kepala** dalam bidang Statistika.

Pada tahun 1987 ia melanjutkan studinya di Department of Statistics, University of Kentucky, U.S.A. dan meraih gelar **Master of Science (M.Sc.)** dalam bidang Statistika pada tahun 1989. Setelah dua tahun kembali mengabdi di Universitas Bengkulu, ia kembali meneruskan studinya pada tahun 1991 ke jenjang yang lebih tinggi di tempat yang sama (Department of Statistics, University of Kentucky, U.S.A). Dibawah bimbingan **Zakkula Govindarajulu, Ph.D.** (University of Minnesota-USA, 1961), ia menyelesaikan disertasinya yang berjudul "*On the Locally Most Powerful Rank Test of the Two-way Experiment*" dan dinyatakan lulus pada tanggal 15 April 1994 dihadapan tim penguji yang terdiri dari: William S. Griffith, Ph.D., Henry Howard, Ph.D., William S. Rayens, Ph.D., Mokhtar Ali, Ph.D., Mai Zhou, Ph.D. dan mendapatkan gelar **Doctor of Philosophy (Ph.D.)** dalam bidang Statistika.

Pada tahun 1988 penulis mengikuti Kursus "*Analysis of Messy Data*" di Washington, D.C. yang diberikan langsung oleh penulis buku tentang analisis tersebut, yaitu: George M. Milliken, Ph.D. dan Dallas T. Johnson, Ph.D.

Selain sebagai staf pengajar Universitas Bengkulu, ia juga sebagai dosen tamu pada program doktor di Jurusan Statistika IPB (2003) dan beberapa pendidikan tinggi lainnya. Sebagai tambahan, ia juga sebagai konsultan *Data Analysis*. Pada tahun 2003-2006 penulis juga menjadi **Senior Instruktur** pada Divisi Pendidikan dan Pelatihan **PT. Bank Rakyat Indonesia (Persero) Tbk.** Sampai dengan tahun 1997 penulis juga menjadi anggota *American Statistical Association.* Berbagai kegiatan seminar dalam bidang statistika telah diikutinya baik lokal, nasional, regional, ataupun internasional.

Beberapa Publikasi Jurnal yang berhubungan dengan bidang ilmunya, diantaranya:

1. Uji Nonparametrik Perlakuan Acak dalam Rancangan Acak Kelompok Lengkap. *Forum Statistika dan Komputasi IPB* (1997) **2** (1), 10-14 ISSN 0853-8115 Tests
2. Tests for Random Effects in Two-way Experiment with One Observation per Cell. *Indian Journal of Mathematics* vol **41** No 1 January 1999. B.N. Prasad Birth Centenary Commemoration Volume. (*with* Dr. Z. Govindarajulu, Univ of Kentucky)
3. Nonparametric tests for random effects in the balanced incomplete block design. *Statistics & Probability Letters* **56**, 431-437 2002. (*with* Dr. Z. Govindarajulu, Univ of Kentucky)
4. Some Notes on Nonparametric Test of Random Treatment Effects in One-way and Two-way Experiments. ***Journal of Quantitative Methods*** nol **3** no 2. 2007 (*with* Dr. Z. Govindarajulu, Univ of Kentucky)

SIGIT NUGROHO, Ph.D.
Website: http://www.stasignug.cjb.net/
Email : snugroho@unib.ac.id., snsw1960@telkom.net dan sinugsta@yahoo.com

Bilamana data observasi kita memiliki skala nominal, ordinal, ataupun interval; atau bahkan data kita tergolong skala rasio sekalipun tetapi asumsi normalitas yang diperlukan pada uji-uji parametrik tak dipenuhi, maka Statistika Nonparametrika lebih cocok digunakan, dari pada harus memaksakan diri (*abusing*) memakai uji yang tidak valid. Beberapa pengujian lain seperti uji independensi dan kesesuaian model juga dibahas.

Diawali dengan penjelasan istilah yang sering dijumpai dalam statistika, buku ini mulai menjelaskan beberapa prosedur khususnya pengujian hipotesis statistika secara nonparametrik. Disertai dengan teladan dengan sampel berukuran kecil dan besar, buku ini juga dilengkapi dengan tabel-tabel yang sering dipakai dalam pengujian hipotesis statisika nonparametrika.

Selain diberikan penjelasan secara filosofi, dengan beberapa teori, buku ini juga memberikan teladan penggunaan SPSS dalam penyelesaian analisis statistika nonparametrika.

Buku ini dipakai di hampir semua bidang ilmu, karena buku ini sebagai pelengkap dari metode statistika yang pada umumnya juga dipelajari oleh semua mahasiswa di hampir semua jurusan/program studi.

UNIB Press
Jalan WR Supratman - Bengkulu
38371

ISBN 978-979-9431-35-6
9 789799 431356
Metode Statistika Nonpar