UJI NONPARAMETRIK PERLAKUAN TETAP PADA RANCANGAN PERSEGI LATIN

Sigit Nugroho
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Bengkulu

ABSTRAK. Uji nonparametrik pengaruh perlakuan tetap pada berbagai jenis rancangan lapangan telah dilakukan diantaranya oleh Friedman, Cochran, Kruskall-Wallis, Durbin, dan Anderson. Tulisan ini membahas bagaimana uji peringkat pengaruh tetap perlakuan pada rancangan persegi latin dan sekaligus merupakan perbaikan dari teori yang sudah dipublikasikan.

Kata Kunci: *Rancangan Persegi Latin, pemeringkatan baris, pemeringkatan kolom, pengaruh perlakuan tetap*

1. PENDAHULUAN

Uji pengaruh perlakuan tetap nonparametric pada rancangan acak kelompok lengkap dasar telah dipublikasikan oleh Friedman [5] dan Anderson [1]. Friedman menggunakan konsep perankingan / pemeringkatan pengaruh perlakuan pada tiap kelompok. Sedangkan Anderson menggunakan prosedur penghitungan banyaknya kelompok (blok) dimana suatu perlakuan memperoleh ranking / peringkat tertentu. Sementara itu untuk respon biner, Cochran [2] telah mengusulkan uji serupa.

Apa yang dilakukan Friedman kemudian dikembangkan oleh Durbin [4] untuk menguji pengaruh perlakuan tetap nonparametrik pada rancangan acak kelompok tak lengkap seimbang (*Balanced Incomplete Block Design*). Uji nonparametrik serupa pada rancangan acak lengkap diusulkan oleh Kruskal dan Wallis [6].

Secara umum, prosedur nonparametrik untuk menganalisis rancangan percobaan yang kompleks kadang canggung dan membosankan. Sampai metode yang lebih baik tersedia untuk itu, peneliti terpaksa menggunakan prosedur parametrik dengan asumsi yang terkadang tidak realistik (Conover [3]).

Model Rancangan Persegi Latin Dasar dapat dituliskan sebagai

$$X_{ij}^{(k)} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\gamma}_j + \boldsymbol{\tau}_{(k)} + \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{(k)},\ i, j, k = 1, 2, ..., t$$

dengan $X_{ij}^{(k)}$ adalah pengamatan blok baris ke *i* dan blok kolom ke *j* dan menerima perlakuan ke *k*; $\boldsymbol{\mu}$ adalah rata-rata umum, $\boldsymbol{\beta}_i$ adalah pengaruh blok baris ke *i*, $\boldsymbol{\gamma}_j$ adalah pengaruh blok kolom ke *j*, $\boldsymbol{\tau}_{(k)}$ pengaruh perlakuan ke *k* yang nilainya sama dengan $\boldsymbol{\tau}_k$ jika perlakuan ke *k* berada pada blok baris ke *i* dan blok kolom ke *j* dan sama dengan 0 bilamana perlakuan tersebut tak ada; dan $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{(k)}$ adalah galat percobaan pengamatan pengaruh blok baris ke *i*, pengaruh blok kolom ke *j*, dan pengaruh perlakuan ke *k*. Hipotesis yang akan diuji adalah $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = ... = \tau_t$ lawan $H_a : \tau_i \neq \tau_j$ untuk beberapa $i \neq j$.

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Misalkan $R(X_{ij}^{(k)})$ adalah jumlah peringkat sel ke *(i,j)* yaitu jumlah peringkat berdasarkan pemblokan baris ke *i* dan pemblokan kolom ke *j*. Metode ini mengikuti cara pengacakan pada rancangan persegi latin. Pada persegi latin berukuran *t x t*, dimana tiap perlakuan diaplikasikan sekali pada setiap pemblokan baris dan pemblokan kolom, yang masing-masing dapat bernilai *1, 2, ..., t*; sehingga jumlah peringkat $R(X_{ij}^{(k)})$ dapat bervariasi mulai dari *2, 3, ..., 2t*. Sebagaimana diketahui bahwa distribusi ranking / peringkat ini baik menurut pemblokan baris maupun kolom adalah sebaran seragam diskrit. Pemblokan baris bebas terhadap pemblokan kolom.

2.1. Fungsi Kepekatan Peluang, Nilai Harapan dan Varian Jumlah Peringkat Sel ke (*i,j*). Dapat diverifikasi dengan mudah bahwa peluang sel ke *(i,j)* yang mendapatkan perlakuan ke *k* memiliki jumlah peringkat *m* adalah (Nugroho, [7])

$$P(R(X_{ij}^{(k)})=m)=\frac{\min(m,t+1)-\max(m,t+1)+t}{t^2}$$

untuk *m = 2, 3, ..., 2t.*, dan 0, selainnya.

Setelah memperoleh fungsi kepekatan peluang jumlah peringkat sel ke *(i,j)*, yang tergantung pada ukuran persegi latin tersebut, selanjutnya dapat diturunkan formula nilai harapan dan varian jumlah peringkat sel ke *(i,j)*. Berdasarkan definisi nilai harapan peubah acak diskrit dapat dituliskan sebagai

$$E(R(X_{ij}^{(k)}))=\sum_{m=2}^{2t} m\cdot P(R(X_{ij}^{(k)})=m)$$

Secara umum, melalui verifikasi, nilai harapan sebagaimana pada persamaan diatas dapat dituliskan seperti di bawah ini (Nugroho, [7])

$$E(R(X_{ij}^{(k)}))=t+1$$

Nilai harapan tersebut tergantung hanya pada *t* yang juga merupakan taraf perlakuan ataupun ukuran blok baris atau blok kolom. Sementara itu, varian jumlah peringkat sel ke *(i,j)*, secara definisi, dan menggunakan informasi tersebut adalah

$$\mathrm{var}(R(X_{ij}^{(k)}))=\sum_{m=2}^{2t}(m-(t+1))^2\cdot P(R(X_{ij}^{(k)})=m)$$

Dengan demikian, secara umum, bilamana taraf perlakuan atau ukuran pemblokan baris atau kolom sama dengan *t*, varian jumlah peringkat sel ke *(i,j)*-th adalah (Nugroho, [7]) :

$$\mathrm{var}(R(X_{ij}^{(k)}))=\frac{t^2-1}{6}$$

Dapat disimpulkan bahwa variannya juga hanya tergantung pada taraf perlakuan yang digunakan dalam percobaan atau ukuran pemblokan baris atau kolom yaitu *t*.

2.2. Jumlah Peringkat Perlakuan, $R(X^{(k)})$. Jumlah peringkat perlakuan seluruh sel yang memperoleh perlakuan ke *k* dinotasikan dengan $R(X^{(k)})$. Perlu dicatat bahwa independensi terjadi antar perlakuan, antar pemblokan serta antara perlakuan dan pemblokan.

Selanjutnya dapat dibuktikan bahwa Nilai Harapan Jumlah Peringkat Perlakuan :

$$E(R(X^{(k)}))=\mathrm{t(t+1)}$$

Sedangkan varian Jumlah Peringkat Perlakuan dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\mathrm{var}(R(X^{(k)}))=\frac{t(t^2-1)}{6}$$

2.3. Statistik S. Statistik yang diusulkan untuk menguji hipotesis tak ada pengaruh perlakuan tetap dalam rancangan persegi latin dengan menggunakan konsep jumlah peringkat sel adalah :

$$S = \frac{6\sum_{k=1}^{t}(R(X^{(k)}) - t(t+1))^2}{t(t^2-1)}$$

Tabel pasti untuk t = 2 dapat dengan mudah dibentuk, karena memerlukan $(2!)^2(2!)^2 = 16$ kemungkinan komposisi peringkat. Banyaknya, Fungsi Kepekatan Peluang, Fungsi Kumulatif Peluang dan Nilai Peluang S pada Tabel 1. $t = 3$, terdapat $(3!)^6 = 46656$ kemungkinan posisi dalam penyusunan peringkat. Tabel 2 merupakan tabel pasti untuk t = 3. Perlu diketahui bahwa $P(S = s) = \frac{\# s}{(t!)^{2t}}$.

Hipotesis nol ditolak bilamana S cukup besar nilainya, atau bilamana nilai-p (*p-value*) = **P(S≥s)** lebih kecil dari taraf nyata pengujian (α).

Secara umum, untuk persegi latin berukuran t x t, banyaknya kemungkinan posisi peringkat adalah $(t!)^{2t}$. Untuk $t>3$, membuat tabel seperti diatas sangatlah membosankan karena memakan waktu yang cukup lama. Banyaknya kemungkinan susunan kombinasi peringkat untuk $t=4$ saja adalah 110.075.314.176 (Seratus sepuluh milyar tujuh puluh lima juta tiga ratus empat belas ribu seratus tujuh puluh enam).

Tabel 1. Kemungkinan nilai *s*, frekuensi, peluang, peluang kumulatif, dan nilai-p statistik *S* bilamana *t = 2*.

s	# s	P(S=s)	P(S≤s)	P(S≥s)
0	6	0.375	0.375	1.000
2	8	0.500	0.875	0.625
8	2	0.125	1.000	0.125

Tabel 2. Kemungkinan nilai *s*, frekuensi, peluang, peluang kumulatif,dan nilai-p statistik *S* bilamana *t = 3*.

S	# s	P(S=s)	P(S≤s)	P(S≥s)
0.0	2040	0.0437	0.0437	1.0000
0.5	10080	0.2160	0.2598	0.9563
1.5	7920	0.1698	0.4295	0.7402
2.0	6570	0.1408	0.5703	0.5705
3.5	8280	0.1775	0.7478	0.4297
4.5	3180	0.0682	0.8160	0.2522
6.0	1980	0.0424	0.8584	0.1840
6.5	3240	0.0694	0.9279	0.1416
8.0	936	0.0201	0.9479	0.0721
9.5	1080	0.0231	0.9711	0.0521
10.5	792	0.0170	0.9880	0.0289
12.5	180	0.0039	0.9919	0.0120
13.5	120	0.0026	0.9945	0.0081
14.0	180	0.0039	0.9983	0.0055
15.5	72	0.0015	0.9999	0.0017
18.0	6	0.0001	1.0000	0.0001

2.4. Teladan. Sebagai ilustrasi dalam penggunaan statistik S, pertama, gunakan data seperti dibawah ini

C 23	A 27	B 22
A 21	B 19	C 24
B 29	C 21	A 23

Perankingan data tersebut menurut pemblokan baris adalah

C 2	A 3	B 1
A 2	B 1	C 3
B 3	C 1	A 2

Sedangkan perankingan data tersebut menurut pemblokan kolom diperoleh

C 2	A 3	B 1
A 1	B 1	C 3
B 3	C 2	A 2

Dengan demikian jumlah peringkat sel dari data tersebut adalah

C 4	A 6	B 2
A 3	B 2	C 6
B 6	C 3	A 4

Akhirnya, jumlah peringkat masing-masing perlakuan adalah A = 6+3+4 = 13; B = 2+2+6 = 10; dan C = 4+6+3 = 13.
Dengan demikian diperoleh nilai S = 1.5. Dari Tabel 2 diperoleh *nilai-p = 0.7402* . Jika digunakan taraf nyata pengujian 5% untuk pengujian hipotesis, maka hipotesis nol tidak ditolak, karena *nilai-p = 0.7402 > 0.05*. Dapat disimpulkan bahwa perlakuan A, B, dan C memiliki pengaruh perlakuan yang sama.

Teladan kedua menggunakan data berikut

C 28	A 7	B 17
A 6	B 16	C 34
B 18	C 26	A 8

Statistik S-*hitung* = 18, akan menghasilkan *nilai-p = 0.0001* sesuai dengan Tabel 7 yang mengakibatkan penolakan hipotesis nol; dengan demikian, perlakuan A, B, dan C memiliki pengaruh perlakuan yang berbeda. Sedikitnya terdapat dua perlakuan yang memiliki pengaruh berbeda. Semua perhitungan valid hanya jika hipotesis nol nya benar.

2.5. Distribusi Asimtotik. Bilamana banyaknya perlakuan *t* cukup besar, Dalil Limit Pusat dapat digunakan untuk aproksimasi distribusi peubah acak berikut

$$\frac{R(X^{(k)})-E(R(X^{(k)}))}{\sqrt{\operatorname{var}(R(X^{(k)}))}}.$$

Dengan demikian, dapat digunakan distribusi kai-kuadrat dengan derajat bebas *t* sebagai aproksimasi distribusi peubah acak berikut

$$S=\sum_{k=1}^{t}\frac{(R(X^{(k)})-E(R(X^{(k)})))^2}{\operatorname{var}(R(X^{(k)}))}$$

jika $R(X^{(k)})$ saling bebas. Namun demikian, peubah acak $R(X^{(k)})$ terkendala secara linier, yaitu $\sum_{k=1}^{t} R(X^{(k)}) = t^2(t+1)$. Dengan hanya mengetahui sebanyak *t-1* nilai peubah acak $R(X^{(k)})$ pertama, kita dapat mencari nilai peubah acak $R(X^{(k)})$ yang ke-*t* secara otomatis karena nilai totalnya sudah diketahui. Dengan demikian, statistik S akan mendekati distribusi kai-kuadrat dengan derajat bebas *t – 1* bilamana *t* semakin besar. Mulai seberapa besar *t* sehingga kita dapat menggunakan distribusi pendekatan kai-kuadrat juga dapat merupakan suatu kajian sendiri mengingat pertumbuhan ukuran semua kemungkinan adalah faktorial-berpangkat.

3. KESIMPULAN DAN SARAN

Statistik uji pengaruh perlakuan tetap dengan menggunakan konsep peringkat pada rancangan persegi latin dasar telah diperoleh, yaitu $S=\frac{6\sum_{k=1}^{t}(R(X^{(k)})-t(t+1))^2}{t(t^2-1)}$. Tolak hipotesis nol yang menyatakan bahwa semua perlakuan berpengaruh sama apabila nilai S cukup besar atau apabila nilai-p lebih kecil dari taraf nyata pengujian. Dari uraian diatas, terdapat beberapa hal yang dapat merupakan kajian yang dapat diteliti lebih lanjut, yaitu : pembuatan algoritma tabel pasti statistik uji S, simulasi tabel S untuk nilai *t = 4* atau *5*, kemungkinan adanya nilai kembar dalam pengamatan pada pemblokan baris dan/atau pada pemblokan kolom, serta analisis data bilamana ada pengamatan yang hilang.

4. UCAPAN TERIMA KASIH

Ucapan terima kasih saya haturkan kepada rekan-rekan di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Bengkulu yang telah memberikan bantuan moril dan spirituil dalam penyelesaian karya ilmiah ini; juga Prof. Zakkula Govindarajulu (alm.) yang telah memberikan kritik dan masukan yang berarti.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anderson, R.L. Use of contingency tables in the analysis of consumer preference studies. *Biometrics.* 15, 582-590. 1959.
[2] Cochran, W.G. The comparison of percentages in matched samples. *Biometrika,* 37, 256-266. 1950.
[3] Conover, W.J.. *Practical Nonparametric Statistics*. John Wiley & Sons. New York. 462p. 1971
[4] Durbin, J. Incomplete blocks in ranking experiments. *British Journal of Psychology. Statistical Section,* 4, 85-90. 1951.
[5] Friedman, M. The use of ranks to avoid the assumption of normality implicit in the analysis of variance. *Journal of the American Statistical Association,* 32, 675-701. 1937.
[6] Kruskal, W.H. and W.A. Wallis. Use of ranks on one-criterion variance analysis. *Journal of the American Statistical Association*, 47, 583-621. 1952.
[7] Nugroho, S. Use of Ranks for Testing Fixed Treatment Effects in Basic Latin Square Design. *Journal of Quantitative Methods.* 5 (2). 61-68. 2009.