Penggunaan Dekomposisi QR Dalam Estimabilitas Parameter-Parameter Model Linier

Sigit Nugroho

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Bengkulu
E-mail: sigit.nugroho.1960@gmail.com

Abstrak. Artikel ini membahas peranan Dekomposisi QR dalam estimabilitas kombinasi linier parameter-parameter dalam Model Linier. Teladan estimabilitas parameter diberikan pada Model Regresi Linier Berganda, Model Rancangan Percobaan dan Model Linier Umum lainnya..

Kata Kunci. Estimabilitas, Dekomposisi QR, Model Linier.

PENDAHULUAN

Model Linier dapat dituliskan secara aljabar matriks dengan $\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$, dimana $\underline{\boldsymbol{Y}}$ merupakan vektor pengamatan berdimensi *n*x*1* atau vektor peubah tak bebas dan ***X*** merupakan matriks rancangan atau matriks peubah bebas berdimensi *n*x*p* bila terdapat *p* parameter yang ada dalam model dan $\underline{\varepsilon}$ adalah vektor galat pengamatan ke-*i* [1].

Persamaan normal dalam bentuk matriks dapat dituliskan dengan ***(X'X)*** $\hat{\underline{\boldsymbol{\beta}}}$ = ***X'***$\underline{\boldsymbol{Y}}$. Semakin banyak peubah bebas yang digunakan dalam model menjadikan semakin banyak parameter yang perlu diduga, yang juga berarti semakin besar ukuran matriks ***(X'X)*** yang digunakan dalam analisis. Dengan demikian juga akan semakin sulit jika harus dihitung secara manual. Bahkan bila terjadi *ill-condition* pada matris rancangannya, akan mempengaruhi tingkat keakuratan pendugaan, karena banyaknya *rounding error*.

Jika matriks ***X*** berukuran *m*x*n* dengan kolom-kolomnya yang saling bebas linier, maka matriks ***X*** dapat didekomposisi menjadi hasil perkalian dua matriks, yaitu ***X*** = ***QR***, dimana ***Q*** merupakan matriks berukuran *m*x*n* dengan kolom-kolomnya yang saling ortonormal dan ***R*** merupakan matriks segitiga atas yang nonsingular. Hal ini juga berimplikasi jika ***X*** matriks persegi, maka dimana ***Q***matriks yang ortogonal dan ***R*** matriks nonsingular segitiga atas. Hal ini dapat ditunjukkan dengan proses ortonormalisasi Gram-Schmidt terhadap kolom-kolom matris ***X***, yaitu x_1, ..., x_p untuk mendapatkan q_1, ..., q_p.

$$\underline{x}_1 = \|\underline{w}_1\| \underline{q}_1$$
$$\underline{x}_2 = (\underline{x}_2 \cdot \underline{q}_1)\underline{q}_1 + \|\underline{w}_2\| \underline{q}_2$$
$$\underline{x}_3 = (\underline{x}_3 \cdot \underline{q}_1)\underline{q}_1 + (\underline{x}_3 \cdot \underline{q}_2)\underline{q}_2 + \|\underline{w}_3\| \underline{q}_3$$
$$\vdots$$
$$\underline{x}_n = (\underline{x}_n \cdot \underline{q}_1)\underline{q}_1 + (\underline{x}_n \cdot \underline{q}_2)\underline{q}_2 + (\underline{x}_n \cdot \underline{q}_3)\underline{q}_3 + \ldots + \|\underline{w}_n\| \underline{q}_n$$

Atau secara matriks dapat dituliskan dengan

$$[\underline{x}_1 \vdots \underline{x}_2 \vdots \underline{x}_3 \vdots \cdots \vdots \underline{x}_n] = [\underline{q}_1 \vdots \underline{q}_2 \vdots \underline{q}_3 \vdots \cdots \vdots \underline{q}_n] \begin{bmatrix} \|\underline{w}_1\| & \underline{x}_2 \cdot \underline{q}_1 & \underline{x}_3 \cdot \underline{q}_1 & \cdots & \underline{x}_n \cdot \underline{q}_1 \\ & \|\underline{w}_2\| & \underline{x}_3 \cdot \underline{q}_2 & \cdots & \underline{x}_n \cdot \underline{q}_2 \\ & & \|\underline{w}_3\| & \cdots & \underline{x}_n \cdot \underline{q}_3 \\ & & & \ddots & \\ & & & & \|\underline{w}_n\| \end{bmatrix} \quad [2]$$

Suatu fungsi linier dari vektor parameter $\underline{\beta}$ atau dapat dituliskan dengan $\underline{\lambda}'\underline{\beta}$, dengan λ adalah vektor konstanta, dikatakan estimabel jika menghasilkan nilai dugaan linier yang tak bias. Atau dapat didefinisikan $\underline{\lambda}'\underline{\beta}$ dikatakan estimabel jika terdapat vektor konstanta $\underline{\rho}$ sedemikian rupa sehingga E($\underline{\rho}'\underline{Y}$) =$\underline{\lambda}'\underline{\beta}$untuk sebarang vektor $\underline{\beta}$. Estimabilitas $\underline{\lambda}'\underline{\beta}$ dengan demikian dapat diperiksa dengan cara mencari $\underline{\rho}$ sedemikian rupa sehingga $\underline{\rho}'X = \underline{\lambda}'$ [3].

Definisi suatu parameter atau fungsi parameter dikatakan estimabel lebih dipertegas dengan pernyataan jika dan hanya jika nilai estimasi parameter atau fungsi parameter invarian berdasarkan pilihan jawaban yang mungkin; atau dengan perkataanlain bahwa apapun metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan normalnya akan menghasilkan jawaban yang sama [4].

METODE PENELITIAN

Artikel ini ditulis dengan menggunakan studi literatur yang mendasari konsep estimabilitas, serta pengolahan matriks rancangan sebagaimana disebutkan pada akhir bagian Pendahuluan diatas.

Dengan menggunakan salah satu Add-Ins Microsoft Excel yaitu PopTools, matriks X dengan jumlah baris (jauh) lebih besar dari jumlah kolomnya akan didekomposisi dengan mudah menjadi perkalian matriks QR.

Dari hubungan $\underline{\rho}'X = \underline{\lambda}'$ yang dipergunakan untuk memeriksa estimabilitas kombinasi linier parameter, dan pendekomposisian matriks rancangan X menjadi QR, dapat digunakan untuk memeriksa estimabilitas diatas cukup dengan memperlihatkan $\underline{\xi}'R = \underline{\lambda}'$ dengan $\underline{\xi}' = \underline{\rho}'Q$.

Selanjutnya adalah mencari $\underline{\xi}'$ bila diketahui $\underline{\lambda}'$ yaitu koeffisien kombinasi linier parameter yang dicari. Catatan bahwa R disini hanya diambil pada baris dan kolom pengolahan dekomposisi yang bersesuaian dengan kolom-kolom parameter dimaksud.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Model Regresi Linier

Untukmodel Regresi Linier (Berganda), bilamana asumsi-asumsi klasik *Ordinary Least Squares* terpenuhi, akan ada jaminan bahwa matriks rancangan X_{nxp} (n>p) berpangkat penuh, sehingga $X'X$ adalah matriks non-singular. Dengan demikian $\hat{\underline{\beta}} = (X'X)^{-1}(X'\underline{Y})$ dan nilai estimasi kombinasi linier parameter bersifat khas.

Misalkan diberikan data seperti berikut ini mengikuti model linier

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i \quad i = 1, 2, \ldots, 9$$

X_1	X_2	Y
10	2	11
12	5	8
13	6	2
22	3	12
20	4	12
24	6	8
30	2	16
28	4	12
31	7	10

Bila X_0 adalah vektor 1_{nx1}, kita susun Matriks$X$ = $[X_0 X_1 X_2 Y]$ diatas selanjutnya dengan bantuan PopTools dengan mudah dapat diperoleh matriks Q seperti berikut :

0.333	-0.494	-0.402	0.114
0.333	-0.405	0.180	0.423
0.333	-0.360	0.372	-0.694
0.333	0.039	-0.268	-0.135
0.333	-0.049	-0.060	0.403
0.333	0.128	0.314	-0.065
0.333	0.395	-0.508	-0.155
0.333	0.306	-0.103	-0.183
0.333	0.439	0.474	0.292

dan matriks R

3.000	63.333	13.000	30.333
0.000	22.514	0.607	5.902
0.000	0.000	5.063	-8.279
0.000	0.000	0.000	4.184

Tiga baris pertama matriks R ini menunjukkan sistem persamaan linier untuk mencari parameter-parameter regresi dimaksud.

$$3.000\hat{\beta}_0 + 63.333\hat{\beta}_1 + 13.000\hat{\beta}_2 = 30.333$$
$$22.514\hat{\beta}_1 + 0.607\hat{\beta}_2 = 5.902$$
$$5.063\hat{\beta}_2 = -8.279$$

Dengan menggunakan substitusi balik, kita dapat peroleh $\hat{\beta}_2$ = *-1.635*, $\hat{\beta}_1$ = *0.306* dan $\hat{\beta}_0$ = *10.732.*

Sedangkan nilai-nilai pada kolom terakhir matriks *R* diatas bila dikuadratkan berturut-turut akan sama dengan Jumlah Kuadrat β_0 (Faktor koreksi), Jumlah Kuadrat $\beta_1|\beta_0$, Jumlah Kuadrat $\beta_2|\beta_0,\beta_1$ dan Jumlah Kuadrat Galat.

Untuk melihat estimabilitas tiap parameter kita dapat gunakan matriks *R* dan menyusunnya secara umum dalam format seperti berikut :

$\underset{\sim}{\xi}$	R_β	$\underset{\sim}{R}_y$
	$\underset{\sim}{\lambda}'$	
	$\underset{\sim}{\delta}'$	$-\underset{\sim}{\lambda}'\underset{\sim}{\hat{\beta}}$

dimana R_β adalah bagian matriks *R* yang bersesuaian dengan parameter-parameter model linier, yaitu matriks *R* tanpa kolom terakhir. $\underset{\sim}{R}_y$ adalah vektor yang dibentuk dari kolom terakhir matriks *R*. $\underset{\sim}{\lambda}'$ adalah vektor baris koeffisien kombinasi parameter model linier. $\underset{\sim}{\xi}$ adalah vektor yang berisikan nilai-nilai yang dicari sehingga bila mungkin $\underset{\sim}{\delta}' = \underset{\sim}{\xi}' R_\beta - \underset{\sim}{\lambda}'$ merupakan vektor nol. Apabila $\underset{\sim}{\delta}' = \underset{\sim}{0}'$ maka dikatakan bahwa kombinasi linier parameter model linier tersebut estimabel, jika $\underset{\sim}{\delta}' \neq \underset{\sim}{0}'$ kombinasi liniernya dikatakan tidak estimabel. Jika estimabel, maka nilai kombinasi liniernya adalah $-\underset{\sim}{\lambda}'\underset{\sim}{\hat{\beta}}$

Untuk model regresi linier dengan data diatas, kita dapatkan matriks R_β

3.000	63.333	13.000
0.000	22.514	0.607
0.000	0.000	5.063

matriks $\underset{\sim}{R}_y$

30.333
5.902
-8.279

Untuk memperlihatkan β_0 estimabel, dapat dilihat tampilan berikut :

0.333	3.000	63.333	13.000	30.333
-0.938	0.000	22.514	0.607	5.902
-0.743	0.000	0.000	5.063	-8.279
	1	0	0	
	0.000	0.000	0.000	-10.732

Misalkan $\underset{\sim}{\beta}'$ = $(\beta_0\beta_1\beta_2)$ dan perhatikan bahwa (1 0 0) adalah vektor $\underset{\sim}{\lambda}'$, maka tujuan kita adalah mencari $\underset{\sim}{\xi}'$ dan diperoleh $\underset{\sim}{\xi}'$ = (0.333 -0.938 -0.743). Karena $\underset{\sim}{\delta}' = \underset{\sim}{0}'$ maka β_0 estimabel, dengan nilai $\hat{\beta}_0$ = *10.732*.

Untuk memperlihatkan β_1 estimabel, dapat dilihat tampilan berikut :

0.000	3.000	63.333	13.000	30.333
0.044	0.000	22.514	0.607	5.902
-0.005	0.000	0.000	5.063	-8.279
	0	1	0	
	0.000	0.000	0.000	-0.306

Terlihat bahwa karena $\underset{\sim}{\delta}' = \underset{\sim}{0}'$ maka β_1 estimabel dengan nilai 0.306.

Dengan cara yang sama untuk menunjukkan bahwa β_2 estimabel dapat dilihat tampilan berikut

0.000	3.000	63.333	13.000	30.333
0.000	0.000	22.514	0.607	5.902
0.198	0.000	0.000	5.063	-8.279
	0	0	1	0
	0.000	0.000	0.000	1.635

Terlihat bahwa β_2 estimabel dengan nilai -1.635 karena $\underset{\sim}{\delta}' = \underset{\sim}{0}'$. Untuk memperlihatkan estimabilitas $3\beta_0 + 2\beta_1 - 5\beta_2$, dapatdiperhatikan tampilan berikut

1.000	3.000	63.333	13.000	30.333
-2.724	0.000	22.514	0.607	5.902
-3.229	0.000	0.000	5.063	-8.279
	3	2	-5	0
	0.000	0.000	0.000	-40.986

Terlihat bahwa $3\beta_0 + 2\beta_1 - 5\beta_2$ estimabel dengan nilai 40.986 karena $\underset{\sim}{\delta}' = \underset{\sim}{0}'$.

Pada Model Regresi Linier Berganda terlihat bahwa apabila setiap parameternya estimabel, maka kombinasi linier dari parameter-parameter regresinya yang estimabel tersebut, juga estimabel. Nilai estimasi yang diperoleh dengan metode estimabilitas ini sama dengan nilai yang diperoleh dengan menggunakan *Ordinary Least Squares Method.*

Model Rancangan Percobaan

Diawali dengan memberikan teladan Perlakuan Faktor Tunggal dalam Rancangan Acak Lengkap.Misalkan diberikan data pengamatan percobaan dengan 3 perlakuan yang masing-masing diamati dengan ulangan sebanyak 5 pengamatan.

A	B	C
19.4	17.7	17.0
32.6	24.8	19.4
27.0	27.9	9.1
32.1	25.2	11.9
33.0	24.3	15.8

Model liniernya dapat dituliskan sebagai berikut :

$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{j(i)} \quad i = 1,2,3 \;\; j = 1,2,...,5$ se cara notasi aljabar matriks, matriks X yang akan didekomposisi dapat dituliskan sebagai berikut :

1	1	0	0	19.4
1	1	0	0	32.6
1	1	0	0	27.0
1	1	0	0	32.1
1	1	0	0	33.0
1	0	1	0	17.7
1	0	1	0	24.8
1	0	1	0	27.9
1	0	1	0	25.2
1	0	1	0	24.3
1	0	0	1	17.0
1	0	0	1	19.4
1	0	0	1	9.1
1	0	0	1	11.9
1	0	0	1	15.8

Matriks rancangan model ini berukuran 15 x 4, namun memiliki rank = 3 sehingga matriks $X'X$ singular dan tidak memiliki invers atau kebalikan, sehingga perlu digunakan matriks kebalikan umum untuk mendapatkan vektor penduga parameter.

Hasil dekomposisi terdiri dari matriks Q

0.258	0.365	0.000	0.432	-0.585
0.258	0.365	0.000	0.432	0.235
0.258	0.365	0.000	0.432	-0.113
0.258	0.365	0.000	0.432	0.204
0.258	0.365	0.000	0.432	0.260
0.258	-0.183	0.316	-0.108	-0.390
0.258	-0.183	0.316	-0.108	0.051
0.258	-0.183	0.316	-0.108	0.243
0.258	-0.183	0.316	-0.108	0.076
0.258	-0.183	0.316	-0.108	0.020
0.258	-0.183	-0.316	-0.036	0.147
0.258	-0.183	-0.316	-0.036	0.296
0.258	-0.183	-0.316	-0.036	-0.344
0.258	-0.183	-0.316	-0.036	-0.170
0.258	-0.183	-0.316	-0.036	0.072

dan matriks R

3.873	1.291	1.291	1.291	87.065
0.000	1.826	-0.913	-0.913	17.363
0.000	0.000	1.581	-1.581	14.768
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	16.106

$$\underline{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\tau}_1 \\ \hat{\tau}_2 \\ \hat{\tau}_3 \end{bmatrix} = (X'X)^{-} X'\underline{Y}$$

Untuk memeriksa apakah μ estimabel kita gunakan cara serupa dalam Model Regresi Linier Berganda, dengan $\underline{\lambda}' = (1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0)$

0.258	3.873	1.291	1.291	1.291	87.065
-0.183	0.000	1.826	-0.913	-0.913	17.363
-0.316	0.000	0.000	1.581	-1.581	14.768
	1	0	0	0	0
	0.000	0.000	0.000	-1.000	-14.640

Karena $\underline{\delta}' \neq \underline{0}'$, maka μ **tidak** estimabel.

Untuk memeriksa apakah τ_1 estimabel, maka $\underline{\lambda}' = (0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0)$ dan perhatikan tabel berikut

0.000	3.873	1.291	1.291	1.291	87.065
0.548	0.000	1.826	-0.913	-0.913	17.363
0.316	0.000	0.000	1.581	-1.581	14.768
	0	1	0	0	0
	0.000	0.000	0.000	1.000	-14.180

Karena $\underline{\delta}' \neq \underline{0}'$, maka τ_1 **tidak** estimabel.

Untuk memeriksa apakah τ_2 estimabel, maka $\underline{\lambda}' = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)$ dan perhatikan tabel berikut

0.000	3.873	1.291	1.291	1.291	87.065
0.000	0.000	1.826	-0.913	-0.913	17.363
0.632	0.000	0.000	1.581	-1.581	14.768
	0	0	1	0	0
	0.000	0.000	0.000	1.000	-9.340

Karena $\underline{\delta}' \neq \underline{0}'$, maka τ_2 **tidak** estimabel.

Untuk memeriksa apakah τ_3 estimabel, maka $\underline{\lambda}' = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$ dan perhatikan tabel berikut

0.000	3.873	1.291	1.291	1.291	87.065
0.000	0.000	1.826	-0.913	-0.913	17.363
0.000	0.000	0.000	1.581	-1.581	14.768
	0	0	0	1	0
	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000

Karena $\underline{\delta}' \neq \underline{0}'$, maka τ_3 **tidak** estimabel.

Untuk memeriksa apakah $\mu + \tau_1$ estimabel,maka $\underline{\lambda}' = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 0)$ dan perhatikan tabel berikut

0.258	3.873	1.291	1.291	1.291	87.065
0.365	0.000	1.826	-0.913	-0.913	17.363
0.000	0.000	0.000	1.581	-1.581	14.768
	1	1	0	0	0
	0.000	0.000	0.000	0.000	-28.820

Karena $\underline{\delta}' = \underline{0}'$, maka $\mu + \tau_1$ estimabel dan nilainya 28.820. Untuk memeriksa apakah $\mu + \tau_2$ estimabel, maka $\underline{\lambda}' = (1 \quad 0 \quad 1 \quad 0)$ dan perhatikan tabel berikut

0.258	3.873	1.291	1.291	1.291	87.065
-0.183	0.000	1.826	-0.913	-0.913	17.363
0.316	0.000	0.000	1.581	-1.581	14.768
	1	0	1	0	0
	0.000	0.000	0.000	0.000	-23.980

Karena $\underline{\delta}' = \underline{0}'$, maka $\mu + \tau_2$ estimabel dan nilainya 23.980.

Untuk memeriksa apakah $\mu + \tau_3$ estimabel, maka $\underline{\lambda}' = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$ dan perhatikan tabel berikut

0.258	3.873	1.291	1.291	1.291	87.065
-0.183	0.000	1.826	-0.913	-0.913	17.363
-0.316	0.000	0.000	1.581	-1.581	14.768
	1	0	0	1	0
	0.000	0.000	0.000	0.000	-14.640

Karena $\underline{\delta}' = \underline{0}'$, maka $\mu + \tau_3$ estimabel dan nilainya 14.640. Untuk memeriksa apakah $\tau_1 - \tau_2$ estimabel, maka $\underline{\lambda}' = (0 \quad 1 \quad -1 \quad 0)$ dan perhatikan tabel berikut

0.000	3.873	1.291	1.291	1.291	87.065
0.548	0.000	1.826	-0.913	-0.913	17.363
-0.316	0.000	0.000	1.581	-1.581	14.768
	0	1	-1	0	0
	0.000	0.000	0.000	0.000	-4.840

Karena $\underline{\delta}' = \underline{0}'$, maka $\tau_1 - \tau_2$ estimabel dan nilainya 4.840. Untuk memeriksa apakah $\tau_1 - \tau_3$ estimabel, maka $\underline{\lambda}' = (0 \quad 1 \quad 0 \quad -1)$ dan perhatikan tabel berikut

0.000	3.873	1.291	1.291	1.291	87.065
0.000	0.000	1.826	-0.913	-0.913	17.363
0.632	0.000	0.000	1.581	-1.581	14.768
	0	0	1	-1	0
	0.000	0.000	0.000	0.000	-9.340

Karena $\underline{\delta}' = \underline{0}'$, maka $\tau_1 - \tau_3$ estimabel dan nilainya 9.340. Untuk memeriksa apakah $\mu + \tau_1 + \tau_2 - \tau_3$ estimabel, maka $\underline{\lambda}' = (1 \quad 1 \quad 1 \quad -1)$ dan perhatikan tabel berikut

0.258	3.873	1.291	1.291	1.291	87.065
0.365	0.000	1.826	-0.913	-0.913	17.363
0.632	0.000	0.000	1.581	-1.581	14.768
	1	1	1	-1	0
	0.000	0.000	0.000	0.000	-38.160

Karena $\underline{\delta}' = \underline{0}'$, maka $\mu + \tau_1 + \tau_2 - \tau_3$ estimabel dan nilainya 38.160.Gabungan dua kombinasi linier yang masing-masing estimabel, juga estimabel.

MODEL LINIER UMUM LAINNYA

Bila kita ingin mengetahui apakah kekuatan tim bola basket di sebuah liga yang menggunakan sistem kompetisi penuh lebih superior dari yang lain, kita dapat modelkan dengan hanya melihat perbedaan poin atau gol saja.

Misalkan kita gunakan model $Y_{ij} = \mu + \tau_i - \tau_j + \varepsilon_{ij}$

Y_{ij} adalah perbedaan poin atau gol dari tim ke-*i* terhadap tim ke-*j* yang dimainkan di kandang tim ke-*i*. μadalah rata-rata umum (boleh tanpa paramater ini), τ_i adalah kekuatan tim ke-i, dan ε_{ij} adalah galat pengamatan.Koeffisien bertanda+1 berarti bermaindi kandang sendiri, sedangkan -1 berarti bermain di kandang lawan. Misalkan, untuk ilustrasi diberikan data seperti berikut

μ	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	*GD*
1	1	-1	0	0	4
1	-1	1	0	0	-2
1	1	0	-1	0	4
1	-1	0	1	0	-3
1	1	0	0	-1	8
1	-1	0	0	1	-5
1	0	1	-1	0	4
1	0	-1	1	0	-2
1	0	1	0	-1	3
1	0	-1	0	1	0
1	0	0	1	-1	2
1	0	0	-1	1	5

Melalui proses dekomposisi *QR*akan dihasilkan matriks *Q* dan *R* berturut-turut adalah

0.289	0.408	-0.289	0.000	-0.408	-0.073
0.289	-0.408	0.289	0.000	0.408	-0.122
0.289	0.408	0.144	-0.250	0.000	-0.537
0.289	-0.408	-0.144	0.250	0.000	0.146
0.289	0.408	0.144	0.250	0.000	0.317
0.289	-0.408	-0.144	-0.250	0.000	-0.317
0.289	0.000	0.433	-0.250	0.408	0.024
0.289	0.000	-0.433	0.250	-0.408	-0.220
0.289	0.000	0.433	0.250	0.408	-0.098
0.289	0.000	-0.433	-0.250	-0.408	0.098
0.289	0.000	0.000	0.500	0.000	0.171
0.289	0.000	0.000	-0.500	0.000	0.610

dan

3.464	0.000	0.000	0.000	0.000	5.196
0.000	2.449	-0.816	-0.816	-0.816	10.614
0.000	0.000	2.309	-1.155	-1.155	5.052
0.000	0.000	0.000	2.000	-2.000	-0.750
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	5.123

Untuk menguji $H_o : \tau_i - \tau_j = 0$ vs $H_1 : \tau_i - \tau_j \neq 0$, dapat digunakan uji F yang nilainya $(10.614^2 + 5.052^2 + 0.750^2)/3$ dibagi dengan $5.123^2/8$ yang hasilnya adalah 14.095 dan menghasilkan nilai peluang 0.001 yang berarti hipotesis nol ditolak atau kekuatan tim bola basket tidak sama. Estimabilitas akan diperlihatkan untuk tiap pasangan tim seperti berikut

Tim 1 vs Tim 2

0.408	2.449	-0.816	-0.816	-0.816	10.614
-0.289	0.000	2.309	-1.155	-1.155	5.052
0.000	0.000	0.000	2.000	-2.000	-0.750
	1	-1	0	0	0.000
	0.000	0.000	0.000	0.000	-2.875

Hasilnya estimabel dengan perbedaan nilai 2.875 artinya tim 1 lebih kuat dari tim 2.

Tim 1 vs Tim 3

0.408	2.449	-0.816	-0.816	-0.816	10.614
0.144	0.000	2.309	-1.155	-1.155	5.052
-0.250	0.000	0.000	2.000	-2.000	-0.750
	1	0	-1	0	0.000
	0.000	0.000	0.000	0.000	-5.250

Hasilnya estimabel dengan perbedaan nilai 5.250 artinya tim 1 lebih kuat dari tim 3.

Tim 1 vs Tim 4

0.408	2.449	-0.816	-0.816	-0.816	10.614
0.144	0.000	2.309	-1.155	-1.155	5.052
0.250	0.000	0.000	2.000	-2.000	-0.750
	1	0	0	-1	0.000
	0.000	0.000	0.000	0.000	-4.875

Hasilnya estimabel dengan perbedaan nilai 4.875 artinya tim 1 lebih kuat dari tim 4.

Tim 2 vs Tim 3

0.000	2.449	-0.816	-0.816	-0.816	10.614
0.433	0.000	2.309	-1.155	-1.155	5.052
-0.250	0.000	0.000	2.000	-2.000	-0.750
	0	1	-1	0	0.000
	0.000	0.000	0.000	0.000	-2.375

Hasilnya estimabel dengan perbedaan nilai 2.375 artinya tim 2 lebih kuat dari tim 3.

Tim2 vs Tim 4

0.000	2.449	-0.816	-0.816	-0.816	10.614
0.433	0.000	2.309	-1.155	-1.155	5.052
0.250	0.000	0.000	2.000	-2.000	-0.750
	0	1	0	-1	0.000
	0.000	0.000	0.000	0.000	-2.000

Hasilnya estimabel dengan perbedaan nilai 2.000 artinya tim 2 lebih kuat dari tim 4.

Tim 3 vs Tim 4

0.000	2.449	-0.816	-0.816	-0.816	10.614
0.000	0.000	2.309	-1.155	-1.155	5.052
0.500	0.000	0.000	2.000	-2.000	-0.750
	0	0	1	-1	0.000
	0.000	0.000	0.000	0.000	0.375

Hasilnya estimabel dengan perbedaan nilai -0.375 artinya tim 3 lebih lemah dari tim 4.

KESIMPULAN

Estimabilitas kombinasi linier parameter-parameter Model Linier $\underline{\lambda}'\underline{\beta}$secara operasional dapat ditunjukkan dengan mudah melalui dekomposisi *QR* matriks rancangan yang digabung dengan vektor pengamatan. Dengan menggunakan bagian matriks R perolehan dekomposisi yang berkenaan dengan parameter yang akan diperiksa estimabilitasnya, kita cari vektor konstanta $\underline{\xi}$ yang memenuhi $\underline{\xi}'R = \underline{\lambda}'$.Bila ada yang memenuhi, maka dikatakan bahwa kombinasi linier parameter model linier tersebut **estimabel**.

Model Regresi Linier Berganda memiliki kekhususan yaitu bahwa setiap parameter yang sekaligus juga koeffisien regresi secara individu semuanya estimabel.Namun demikian tidak setiap parameter yang ada dalam Model Rancangan Percobaan dan Model Linier Umum lainnya. Gabungan dua kombinasi linier parameter yang estimabel, juga bersifat estimabel.

DAFTAR PUSTAKA

F.A. Graybill. (1976). *Theory and Application of the Linear Model*.Wadsworth & Brooks/Cole.Advanced Books & Software. Pacific Groove, California. USA.

R.O. Hill, Jr. (1986). *Elementary Linear Algebra*. Academic Press College Division, New York. USA.

R. Christensen. (2001). *Plane Answer to Complex Questions : The Theory of Linear Models*. Springer-Verlag, New York. USA.

G.A. Milliken and D.E. Johnson.(1984). *Analysis of Messy Data. Volume I : Designed Experiments.* Van Nostrand Reinhold Company, New York. USA.