Prosiding Semirata2015 bidang MIPA BKS-PTN Barat
Universitas Tanjungpura Pontianak
Hal 47 - 55

ANALISIS KERAGAMAN PERCOBAAN TERSARANG DENGAN MENGGUNAKAN MATRIKS RANCANGAN TERPARTISI

(ANALYSIS OF VARIANCE OF NESTED EXPERIMENTS USING PARTITIONED DESIGN MATRICES)

SigitNugroho

Prodi Magister Statistika, JurusanMatematika FMIPA Universitas Bengkulu, Bengkulu

sigit.nugroho.1960@gmail.com

ABSTRACT

This paper presents how to calculate the sums of squares, to determine the degrees of freedom, to calculate the means of squares, and to calculate the test statistics of the source of variation for the nested experiments using partitioned matrices. Using such matrices are easier to compute rather than using a full design matrix, since the partitioned design matrices are having full column rank.

Keywords: Partitioned Design Matrices, Nested Experiments, Analysis of Variance.

ABSTRAK

Artikel ini menyajikan bagaimana menghitung jumlah kuadrat, menentukan derajat bebas, menghitung kuadrat tengah dan menghitung statistik uji dari sumber keragaman percobaan tersarang dengan menggunakan matriks terpartisi. Penggunaan matriks semacam ini akan mempermudah perhitungan daripada menggunakan matriks rancangan penuh, karena matriks rancangan terpartisinya memiliki rank kolom penuh.

Katakunci:Matriks Rancangan Terpartisi, Percobaan Tersarang, Analisis Keragaman.

1. PENDAHULUAN

Dekomposisi QR tak dapat digunakan untuk penghitungan Jumlah Kuadrat komponen-komponen sumber keragaman suatu rancangan percobaan apabila banyaknya baris matriks rancangan yang juga menyatakan banyaknya amatan atau respon lebih kecil dari jumlah seluruh parameter yang digunakan. Metode matriks rancangan terpartisi berdasarkan komponen keragaman dapat menjadi solusi penghitungan Jumlah Kuadrat tersebut [5].

Dalam percobaan berfaktor atau percobaan faktorial, terminology faktorial ini merujuk pada kelas tertentu yang perlakuan-perlakuannya dibentuk dengan mengali silangkan taraf-taraf masing-masing faktor. Tiap taraf dari setiap factor muncul dengan setiap taraf factor lainnya. Interaksi dua atau lebih factor umumnya menjadi telaahan dalam penelitian. Sehingga untuk satu ulangan akan terdapat sejumlah hasil kali silang seluruh taraf perlakuan yang digunakan, yang juga menyatakan banyaknya satuan percobaan yang harus dipersiapkan untuk satu ulangan [4].

Jika tiap taraf faktor A mencakup beberapa taraf faktor B, maka didefinisikan bahwa faktor B tersarang didalam faktor A. Suatu percobaan dengan dua atau lebih faktor yang memenuhi definisi ini disebut dengan percobaan factor tersarang (*Nested Factor Experiment*). Taraf-taraf faktor tersarang tidak harus muncul dalam semua kombinasi, namun taraf-taraf faktor berubah untuk setiap kombinasi faktor-faktor lainnya. Dengan tidak mengalisilangkan taraf-taraf faktor yang digunakan, kita tidak dapat mengevaluasi interaksi antar faktor yang digunakan [4].

Dalam percobaan tersarang, faktor-faktor membentuk sebuah hirarki. Dari tiapfaktor yang dipilih pada tahap pertama, dipilih beberapa taraf factor tahap kedua, dan seterusnya.Oleh karenanya, percobaan tersarang juga sering disebut dengan percobaan hirarki atau percobaan sub-sampling. Misalkan A adalah factor pertama yang terdiri dari *a* taraf, faktor B terdiridari b taraf yang tersarang di dalam tiap taraf faktor A, dan sejumlah c sampel diambil pada tiap taraf faktor B. Percobaan ini sering disebut dengan percobaan tersarang 2 (dua) tahapdan model rancangan percobaan ini adalah [1] :

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{k(ij)} \quad ; \quad i = 1, \ldots, a \quad j = 1, \ldots, b \quad k = 1, \ldots, c$$

dimana Y_{ijk} adalah nilai pengamatan ke-*k* yang tersarang pada faktor *B* taraf ke-*j* dan faktor *A* taraf ke-*i*, μ adalah rataan umum, α_i adalah pengaruh faktor *A* taraf ke-*i*, $\beta_{j(i)}$ merupakan pengaruh faktor *B* taraf ke-*j* yang tersarang pada faktor *A* taraf ke-*i* dan $\varepsilon_{k(ij)}$ adalah komponen galat pengamatan ke-*(ijk)*.

Asumsi untuk model diatas dengan faktor *A* bersifat tetap : (1) jumlah semua pengaruh perlakuan sama dengan nol, $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_a = 0$; (2) faktor B berdistribusi Normal dengan rata-rata nol dan varian tertentu, $\beta_{j(i)} \sim \mathrm{N}(0, \sigma_\beta^2)$; (3) galat pengamatan juga berdistribusi normal dengan rata-rata nol dan varian tertentu, $\varepsilon_{k(ij)} \sim \mathrm{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$; (4) faktor *B* dan galat pengamatan saling bebas. Bila factor *A* bersifat acak, asumsi pertama diganti dengan $\alpha_i \sim N(0, \sigma_\alpha^2)$, serta faktor *A* saling bebas terhadap faktor *B* dan galat pengamatan.

Sedangkan untuk percobaan tersarang 3 (tiga) tahap, sebagai pengembangan dari percobaan tersarang 2 (dua) tahap, notasi aljabar biasa penghitungan jumlah kuadratnya adalah seperti berikut[1]:

$$Y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \gamma_{k(ij)} + \varepsilon_{l(ijk)} \quad i = 1, 2, \ldots a \quad j = 1, 2, \ldots b \quad k = 1, 2, \ldots, c \quad l = 1, 2, \ldots, r$$

Y_{ijkl}pengamatan ke-l pada faktor C taraf ke- k yang tersarang pada faktor B taraf ke-j dan faktor A taraf ke-i, μ rataan umum, α_i pengaruh faktor A taraf ke-i, $\beta_{j(i)}$ pengaruh faktor B taraf ke-j yang tersarang pada faktor A taraf ke-i, $\gamma_{k(ij)}$ pengaruh faktor C taraf ke- k yang tersarang pada faktor A taraf ke- i dan faktor B taraf ke- j, $\varepsilon_{l(ijk)}$ komponen galat pengamatan ke-$(ijkl)$. Asumsi modelnya juga mirip dan merupakan pengembangan dari percobaan tersarang dua tahap.

Generalisasi model diatas atau sering disebut dengan Percobaan Tersarang Multi-tahap seimbang (*balanced multi-stage nested experiment*) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$Y_{ij\ldots tu} = \mu + \beta_{1i} + \beta_{2j(i)} + \ldots + \beta_{pt(ij\ldots)} + \varepsilon_{u(ij\ldots t)}$$
$$i = 1,2,\ldots,k_1;\ j = 1,2,\ldots,k_2;\ ;\ldots;\ u = 1,2,\ldots,n;\ N = n\prod_{i=1}^{p} k_i$$

Dengan derajat bebas sumber keragaman (perlakuan) pada tahap ke-*i* adalah $k_1k_2\ldots(k_i-1)$. Nilai Harapan Kuadrat Tengah (*Expected Mean Square*) untuk percobaan tersarang multi-tahap memiliki bentuk umum seperti berikut :untuk tahapan ke-*i* nilai harapan kuadrat tengahnya adalah $\sigma_\varepsilon^2 + \sum_{m=i}^{p}\left(\frac{N}{\prod_{l=1}^{m} k_l}\right)\sigma_m^2$

2. NOTASI ALJABAR BIASA

Jumlah kuadrat merupakan suatu ukuran yang proporsional dengan keragaman dari suatu sumber keragaman. Untuk percobaan tersarang dua tahap, sumber keragaman Total atau sumber keragaman respon dipilah menjadi sumber keragaman faktor A, sumber keragaman faktor B yang tersarang didalam A, dan sumber keragaman Galat pengamatan. Secara geometri sumber keragaman total merupakan resultan dari jumlah kuadrat faktor-faktor A, B yang tersarang didalam A, dan galat pengamatan dimana mereka saling ortogonal satu sama lain.

Dalam notasi aljabar biasa,untuk percobaan tersarang 2 (dua) faktor, jumlah kuadrat jumlah kuadrat tersebut dapat dituliskan seperti berikut [1][4]:

$$JK[Total] = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c} Y_{ijk}^2 - \frac{Y_{\ldots}^2}{abc}$$
$$JK[A] = \frac{1}{bc}\sum_{i=1}^{a} Y_{i..}^2 - \frac{Y_{\ldots}^2}{abc} \qquad (1)$$
$$JK[B(A)] = \frac{1}{c}\sum_{i=1}^{a} Y_{ij.}^2 - \frac{Y_{\ldots}^2}{abc} - JK[A]$$
$$JK[Galat] = JK[Total] - JK[A] - JK[B(A)]$$

Sedangkan untuk percobaan tersarang 3 (tiga) tahap, perhitungan jumlah kuadratnya menggunakan formula berikut[1][4]:

$$JK[Total] = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{l=1}^{n} Y_{ijkl}^2 - \frac{Y_{....}^2}{abcn}$$

$$JK[A] = \frac{1}{bcn}\sum_{i=1}^{a} Y_{i...}^2 - \frac{Y_{....}^2}{abcn}$$

$$JK[B(A)] = \frac{1}{cn}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{ij..}^2 - \frac{1}{bcn}\sum_{i=1}^{a} Y_{i...}^2 \qquad (2)$$

$$JK[C(B(A))] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c} Y_{ijk.}^2 - \frac{1}{cn}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{ij..}^2$$

$$JK[Galat] = JK[Total] - JK[A] - JK[B(A)] - JK[C(B(A))]$$

Selanjutnya, dapat dibuat generalisasi formula Jumlah Kuadrat untuk percobaan tersarang multi-tahap.

Pengujian hipotesis adanya pengaruh tahap ke-*i* dapat dilakukan dengan menggunakan statistic uji $F = \frac{KT[Tahap\,ke - i]}{KT[Tahap\,ke - (i+1)]}$ yang menyebar menurut sebaran *F* dengan derajat bebas $k_1k_2...(k_i-1)$ dan $k_1k_2...k_i(k_{i+1}-1)$. Untuk tahapan ke-*p* nilai k_{p+1} = n.

3. PENGGUNAAN NOTASI ALJABAR MATRIKS

Dengan menggunakan notasi aljabar matriks, model percobaan tersarang **dua tahap,** yang merupakan salah satu model linier, dapat dituliskan menjadi:

$$\boldsymbol{Y}_{abn\times 1} = \boldsymbol{X}_{abn\times(1+a+ab)}\boldsymbol{\beta}_{(1+a+ab)\times 1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{abn\times 1}$$

Dengan $\boldsymbol{Y}_{abn\times 1}$ adalah vektor amatan berukuran $abn \times 1$, $\boldsymbol{X}_{abn\times(1+a+ab)}$ adalah matriks rancangan berukuran $abn \times (1 + a + ab)$ yang dipartisi menjadi $[\mathbf{1}_\mu|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}]$ dengan $\mathbf{1}_\mu$adalah vektor 1 yang berukuran $abn \times 1$, $\boldsymbol{A}$adalah matriks $\boldsymbol{A}_{abn\times a} = \mathbf{1}_{n\times 1} \otimes (\boldsymbol{I}_{a\times a} \otimes \mathbf{1}_{b\times 1})$**,** $\boldsymbol{B}$adalah matriks $\boldsymbol{B}_{abn\times ab} = \mathbf{1}_{n\times 1} \otimes \boldsymbol{I}_{ab\times ab}$, serta $\boldsymbol{\beta}_{(1+a+ab)\times 1}$ adalah vektor parameter model berukuran $(1 + a + ab) \times 1$, sedangkan $\boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{t}}_{1\times(1+a+ab)} = (\mu, \alpha_1, \dots, \alpha_a, \beta_{1(1)}, \dots, \beta_{1(a)}, \beta_{2(1)}, \dots, \beta_{2(a)}, \dots, \beta_{b(a)})$ dan $\boldsymbol{\varepsilon}_{abn\times 1}$ adalah vektor galat percobaan berukuran $abn \times 1$.

Untuk model percobaan tersarang **tiga tahap**, notasi dalam bentuk aljabar matriksnya adalah:

$$\boldsymbol{Y}_{abcn\times 1} = \boldsymbol{X}_{abcn\times(1+a+ab+abc)}\boldsymbol{\beta}_{(1+a+ab+abc)\times 1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{abcn\times 1}$$

Dengan $\boldsymbol{Y}_{abcn\times 1}$ adalah vektor amatan berukuran $abcn \times 1$, $\boldsymbol{X}_{abcn\times(1+a+ab+abc)}$ adalah matriks rancangan berukuran $abcn \times (1+a+ab+abc)$ yang dipartisi menjadi $[\boldsymbol{1}_{\mu}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{C}]$ dengan $\boldsymbol{1}_{\mu}$adalah vektor 1 yang berukuran $abcn \times 1$, $\boldsymbol{A}$ adalah matriks $\boldsymbol{A}_{abcn\times a} = \boldsymbol{1}_{n\times 1} \otimes (\boldsymbol{I}_{a\times a} \otimes \boldsymbol{1}_{bc\times 1})$, $\boldsymbol{B}$adalah matriks $\boldsymbol{B}_{abcn\times ab} = \boldsymbol{1}_{n\times 1} \otimes (\boldsymbol{I}_{ab\times ab} \otimes \boldsymbol{1}_{c\times 1})$, $\boldsymbol{C}$adalah matriks $\boldsymbol{C}_{abcn\times abc} = \boldsymbol{1}_{n\times 1} \otimes \boldsymbol{I}_{abc\times abc}$ serta $\boldsymbol{\beta}_{(1+a+ab+abc)\times 1}$adalah vektor parameter model berukuran $(1+a+ab+abc)\times 1$, serta vector $\boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{t}}_{1\times(1+a+ab+abc)} = (\mu, \alpha_1, \dots, \alpha_a, \beta_{1(1)}, \dots, \beta_{b(a)}, \gamma_{1(11)}, \dots, \gamma_{k(ij)})$ dan $\boldsymbol{\varepsilon}_{abcn\times 1}$ adalah vektor galat percobaan berukuran $abcn \times 1$.

Berikut ini adalah teorema-teorema yang berkaitan dengan distribusi bentuk kuadrat:

Teorema1

Andaikan vector acak $\boldsymbol{Y}_{n\times 1} \sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})$, dan misalkan $U = \boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{Y}$. Maka U berdistribusi kai-kuadrat dengan derajat bebas *n*[2].

Teorema2

Andaikan vector acak $\boldsymbol{Y}_{n\times 1} \sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})$. Bentuk kuadrat $\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}$ berdistribusi kai-kuadrat dengan derajat bebas K jika hanya jika $\boldsymbol{A}$ adalah matriks simetrik idempoten dengan rank $(\boldsymbol{A}) = K$. [2]

Teorema3

Andaikan vektor acak $\boldsymbol{Y}_{n\times 1} \sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, dimana $\boldsymbol{\Sigma}$ menpunyai rank n. Jika $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B} = \boldsymbol{0}$, maka kedua bentuk kuadrat $\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}$ dan $\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}$ saling bebas [2].

Secara umum, rank maksimum dari matriks $\boldsymbol{A}$ berukuran $n \times p$ adalah $\min(n, p)$ [6]. Sehingga dapat dikatakan bahwa rank dari sebuah vector berukuran $n \times 1$ adalah $\min(n, 1) = 1$. Menurut Harville [3], matriks $\boldsymbol{A}$ berukuran $n \times n$ dikatakan *nonsingular* jika hanya jika rank$(\boldsymbol{A}) = n$. Salah satu sifat umum dari *kronecker product* adalah $rank(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}) = rank(\boldsymbol{A})rank(\boldsymbol{B})$[6]. Berikut ini beberapa teorema dan lemma yang berkaitan dengan rank:

Teorema4

rank$\boldsymbol{A}'$ =rank $\boldsymbol{A} = r$ sehingga rank baris sama dengan rank kolom [7].

Teorema5

Jika $\boldsymbol{A}$ merupakan matriks berukuran $n \times n$, maka $\det(\boldsymbol{A}) = 0$ jika hanya jika $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) < n$. [7]

Teorema6

Jika $\boldsymbol{A}$ merupakan matriks berukuran $m \times n$ dengan rank m, maka $\boldsymbol{A}^- = \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}')^{-1}$dan $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^- = \boldsymbol{I}.$ Jika rank dari matriks $\boldsymbol{A}$ adalah n, maka $\boldsymbol{A}^- = (\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}'$dan $\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$[2].

Teorema7

Jika matriks $\boldsymbol{A}$ simetris dan idempotent dengan rank r, maka $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = r$[6].

Lemma 8

Satu-satunya matriks idempotent berukuran $n \times n$ dengan rank n adalah matriks identitas $\boldsymbol{I}_n$[3].

Formula Jumlah Kuadrat dalam notasi aljabar matriks sebagaimana pada persamaan (1) untuk percobaan tersarang dua tahap dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} JK[Total] &= \boldsymbol{Y^tY} - \boldsymbol{Y^t1_\mu}\left(\boldsymbol{1_\mu^t1_\mu}\right)^{-1}\boldsymbol{1_\mu^tY} \\ JK[A] &= \boldsymbol{Y^tA}(\boldsymbol{A^tA})^{-1}\boldsymbol{A^tY} - \boldsymbol{Y^t1_\mu}\left(\boldsymbol{1_\mu^t1_\mu}\right)^{-1}\boldsymbol{1_\mu^tY} \\ JK[B(A)] &= \boldsymbol{Y^tB}(\boldsymbol{B^tB})^{-1}\boldsymbol{B^tY} - \boldsymbol{Y^tA}(\boldsymbol{A^tA})^{-1}\boldsymbol{A^tY} \\ JK[Galat] &= \boldsymbol{Y^tY} - \boldsymbol{Y^tB}(\boldsymbol{B^tB})^{-1}\boldsymbol{B^tY} \end{aligned} \tag{3}$$

Dengan $\boldsymbol{A}$ adalah matriks $\boldsymbol{A}_{abn\times a} = \boldsymbol{1}_{n\times 1} \otimes (\boldsymbol{I}_{a\times a} \otimes \boldsymbol{1}_{b\times 1})$ dan $\boldsymbol{B}$ adalah matriks $\boldsymbol{B}_{abn\times ab} = \boldsymbol{1}_{n\times 1} \otimes \boldsymbol{I}_{ab\times ab}$.

Misalkan $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{1_\mu}\left(\boldsymbol{1_\mu^t1_\mu}\right)^{-1}\boldsymbol{1_\mu^t}$, $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A^tA})^{-1}\boldsymbol{A^t}$, dan $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{B^tB})^{-1}\boldsymbol{B^t}$, dimana matriks-matriks $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{M},$ dan $\boldsymbol{N}$ berukuran $abn \times abn$, dapat ditunjukkan dengan mudah bahwa matriks-matriks $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{M},$dan $\boldsymbol{N}$adalah matriks-matriks yang simetris dan idempoten. Juga dapat diperlihatkan bahwa matriks-matriks $\boldsymbol{ML} = \boldsymbol{LM} = \boldsymbol{L},$ $\boldsymbol{MN} = \boldsymbol{NM} = \boldsymbol{M},$ dan $\boldsymbol{LN} = \boldsymbol{NL} = \boldsymbol{L}$ yang selanjutnya berakibat bahwa $\boldsymbol{M} - \boldsymbol{L}$,$\boldsymbol{N} - \boldsymbol{M}$ dan $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{N}$ juga simetris dan idempoten. Dengan demikian $rank(\boldsymbol{M} - \boldsymbol{L}) = a - 1$, $rank(\boldsymbol{N} - \boldsymbol{M}) = a(b-1)$, dan $rank(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{N}) = ab(n-1)$.

Dari argumentasi diatas, menurut Teorema 2, distribusi dari $\boldsymbol{Y^t}(\boldsymbol{M} - \boldsymbol{L})\boldsymbol{Y}$ adalah kai-kuadrat dengan derajat bebas $a - 1$, distribusi dari $\boldsymbol{Y^t}(\boldsymbol{N} - \boldsymbol{M})\boldsymbol{Y}$ adalah kai-kuadrat dengan derajat bebas $a(b-1)$, dan distribusi dari $\boldsymbol{Y^t}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{N})\boldsymbol{Y}$ adalah kai-kuadrat dengan derajat bebas $ab(n-1)$.

Selanjutnya dapat dengan mudah diperlihatkan bahwa $(\boldsymbol{N} - \boldsymbol{M})\boldsymbol{I}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{N}) = \boldsymbol{0}$dan $(\boldsymbol{M} - \boldsymbol{L})\boldsymbol{I}(\boldsymbol{N} - \boldsymbol{M}) = \boldsymbol{0}.$ Menurut Teorema 3, $(\boldsymbol{Y^t}(\boldsymbol{N} - \boldsymbol{M})\boldsymbol{Y})$ dan $(\boldsymbol{Y^t}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{N})\boldsymbol{Y})$ saling bebas, maka distribusi rasio $(\boldsymbol{Y^t}(\boldsymbol{N}-\boldsymbol{M})\boldsymbol{Y})/(a(b-1))$ terhadap $(\boldsymbol{Y^t}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{N})\boldsymbol{Y})/(ab(n-1))$ adalah *F* dengan derajat bebas $a(b-1)$ dan $ab(n-1)$, dan $(\boldsymbol{Y^t}(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{L})\boldsymbol{Y})$ dan $(\boldsymbol{Y^t}(\boldsymbol{N}-\boldsymbol{M})\boldsymbol{Y})$ saling bebas, sehingga distribusi rasio $(\boldsymbol{Y^t}(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{L})\boldsymbol{Y})/(a-1)$ terhadap $(\boldsymbol{Y^t}(\boldsymbol{N}-\boldsymbol{M})\boldsymbol{Y})/(a(b-1))$ adalah *F* dengan derajat bebas$a-1$ dan $a(b-1)$.

Formula Jumlah Kuadrat dalam notasi aljabar matriks sebagaimana pada persamaan (2) untuk percobaan tersarang tiga tahap dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
JK[Total] &= \boldsymbol{Y^tY} - \boldsymbol{Y^t1_\mu}\left(\boldsymbol{1_\mu^t1_\mu}\right)^{-1}\boldsymbol{1_\mu^tY}\\
JK[A] &= \boldsymbol{Y^tA}(\boldsymbol{A^tA})^{-1}\boldsymbol{A^tY} - \boldsymbol{Y^t1_\mu}\left(\boldsymbol{1_\mu^t1_\mu}\right)^{-1}\boldsymbol{1_\mu^tY}\\
JK[B(A)] &= \boldsymbol{Y^tB}(\boldsymbol{B^tB})^{-1}\boldsymbol{B^tY} - \boldsymbol{Y^tA}(\boldsymbol{A^tA})^{-1}\boldsymbol{A^tY}\\
JK[C(B(A))] &= \boldsymbol{Y^tC}(\boldsymbol{C^tC})^{-1}\boldsymbol{C^tY} - \boldsymbol{Y^tB}(\boldsymbol{B^tB})^{-1}\boldsymbol{B^tY}\\
JK[Galat] &= \boldsymbol{Y^tY} - \boldsymbol{Y^tC}(\boldsymbol{C^tC})^{-1}\boldsymbol{C^tY}
\end{aligned} \tag{4}$$

Dengan $\boldsymbol{A}$ adalah matriks $\boldsymbol{A}_{abcn\times a} = \boldsymbol{1}_{n\times1}\otimes(\boldsymbol{I}_{a\times a}\otimes\boldsymbol{1}_{bc\times1})$, $\boldsymbol{B}$ adalah matriks $\boldsymbol{B}_{abcn\times ab} = \boldsymbol{1}_{n\times1}\otimes(\boldsymbol{I}_{ab\times ab}\otimes\boldsymbol{1}_{c\times1})$, $\boldsymbol{C}$ adalah matriks $\boldsymbol{C}_{abcn\times abc} = \boldsymbol{1}_{n\times1}\otimes\boldsymbol{I}_{abc\times abc}$.

Misalkan $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{1_\mu}\left(\boldsymbol{1_\mu^t1_\mu}\right)^{-1}\boldsymbol{1_\mu^t}$, $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A^tA})^{-1}\boldsymbol{A^t}$, $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{B^tB})^{-1}\boldsymbol{B^t}dan\boldsymbol{P} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{C^tC})^{-1}\boldsymbol{C^t}$, dimana matriks-matriks $\boldsymbol{L},\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}$ dan $\boldsymbol{P}$ berukuran $abcn\times abcn$, dapat ditunjukkan dengan mudah bahwa matriks-matriks $\boldsymbol{L},\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}$ dan $\boldsymbol{P}$ adalah matriks-matriks yang simetris dan idempoten. Juga dapat diperlihatkan bahwa matriks-matriks $\boldsymbol{ML} = \boldsymbol{LM} = \boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{MN} = \boldsymbol{NM} = \boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{PN} = \boldsymbol{NP} = \boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{MP} = \boldsymbol{PM} = \boldsymbol{M}$ dan $\boldsymbol{LN} = \boldsymbol{NL} = \boldsymbol{L}$ yang selanjutnya berakibat bahwa $\boldsymbol{M}-\boldsymbol{L}$,$\boldsymbol{N}-\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{N}$ dan $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}$ juga simetris dan idempoten. Dengan demikian $rank(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{L}) = a-1$, $rank(\boldsymbol{N}-\boldsymbol{M}) = a(b-1)$, $rank(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{N}) = ab(c-1)$ dan $rank(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}) = abc(n-1)$.

Dari argumentasi diatas, menurut Teorema 2, distribusi dari $\boldsymbol{Y^t}(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{L})\boldsymbol{Y}$ adalah kai-kuadrat dengan derajat bebas $a-1$, distribusi dari $\boldsymbol{Y^t}(\boldsymbol{N}-\boldsymbol{M})\boldsymbol{Y}$ adalah kai-kuadrat dengan derajat bebas $a(b-1)$, distribusi dari $\boldsymbol{Y^t}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{N})\boldsymbol{Y}$ adalah kai-kuadrat dengan derajat bebas $ab(c-1)$ dan distribusi dari $\boldsymbol{Y^t}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})\boldsymbol{Y}$ adalah kai-kuadrat dengan derajat bebas $abc(n-1)$.

Selanjutnya dapat dengan mudah diperlihatkan bahwa $(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{N})\boldsymbol{I}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{0}(\boldsymbol{N}-\boldsymbol{M})\boldsymbol{I}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{N}) = \boldsymbol{0}$ dan $(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{L})\boldsymbol{I}(\boldsymbol{N}-\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{0}.$ Menurut Teorema 3, $(\boldsymbol{Y^t}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{N})\boldsymbol{Y})$dan $(\boldsymbol{Y^t}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})\boldsymbol{Y})$ saling bebas, maka distribusi rasio $(\boldsymbol{Y^t}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{N})\boldsymbol{Y})/(ab(c-1))$ terhadap $(\boldsymbol{Y^t}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})\boldsymbol{Y})/(abc(n-1))$ adalah *F* dengan derajat bebas $ab(c-1)$ dan $abc(n-1)$,$(\boldsymbol{Y^t}(\boldsymbol{N}-\boldsymbol{M})\boldsymbol{Y})$ dan $(\boldsymbol{Y^t}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{N})\boldsymbol{Y})$ saling bebas, maka distribusi rasio $(\boldsymbol{Y^t}(\boldsymbol{N}-\boldsymbol{M})\boldsymbol{Y})/(a(b-1))$ terhadap $(\boldsymbol{Y^t}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{N})\boldsymbol{Y})/(ab(c-1))$ adalah *F* dengan derajat bebas $a(b-1)$ dan $ab(c-1)$, dan $(\boldsymbol{Y^t}(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{L})\boldsymbol{Y})$ dan $(\boldsymbol{Y^t}(\boldsymbol{N}-\boldsymbol{M})\boldsymbol{Y})$ saling bebas, sehingga distribusi rasio $(\boldsymbol{Y^t}(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{L})\boldsymbol{Y})/(a-1)$ terhadap $(\boldsymbol{Y^t}(\boldsymbol{N}-\boldsymbol{M})\boldsymbol{Y})/(a(b-1))$ adalah *F* dengan derajat bebas$a-1$ dan $a(b-1)$.

4. PENUTUP

Penggunaan Matriks Rancangan Terpartisi secara operasional mempermudah perhitungan jumlah kuadrat komponen sumber keragaman karena rank matriks partisi sumber keragamannya berpangkat penuh, sehingga cukup digunakan invers matriks biasa.

Komponen formula perhitungan jumlah kuadrat memiliki bentuk umum $\boldsymbol{Y^tZ}(\boldsymbol{Z^tZ})^{-1}\boldsymbol{Z^tY}$ dengan $\boldsymbol{Z}$ adalah elemen partisi matriks rancangan yang berkaitan dengan tahapan penyarangan.$\boldsymbol{Z}$ untuk penyerangan tahap pertama, kedua, ketiga dan seterusnya menggunakan notasi $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ dan seterusnya. Untuk faktor koreksi $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{1_\mu}\left(\boldsymbol{1_\mu^t 1_\mu}\right)^{-1}\boldsymbol{1_\mu^t}$.

Untuk percobaan tersarang dua tahap, $\boldsymbol{A}_{abn\times a} = \boldsymbol{1}_{n\times 1} \otimes (\boldsymbol{I}_{a\times a} \otimes \boldsymbol{1}_{b\times 1})$ dan $\boldsymbol{B}_{abn\times ab} = \boldsymbol{1}_{n\times 1} \otimes \boldsymbol{I}_{ab\times ab}$dengan pengaturan elemen vektor pengamatan $\boldsymbol{Y}$ disesuaikan. Sedangkan untuk percobaan tersarang tiga tahap, $\boldsymbol{A}_{abcn\times a} = \boldsymbol{1}_{n\times 1} \otimes (\boldsymbol{I}_{a\times a} \otimes \boldsymbol{1}_{bc\times 1})$, $\boldsymbol{B}_{abcn\times ab} = \boldsymbol{1}_{n\times 1} \otimes (\boldsymbol{I}_{ab\times ab} \otimes \boldsymbol{1}_{c\times 1})$, dan $\boldsymbol{C}_{abcn\times abc} = \boldsymbol{1}_{n\times 1} \otimes \boldsymbol{I}_{abc\times abc}$ dengan pengaturan elemen vektor pengamatan $\boldsymbol{Y}$ disesuaikan.

5. UCAPAN TERIMAKASIH

Terimakasih saya ucapkan kepada Renny Alvionita yang telah membantu dalam mencari bahan referensi serta menguji beberapa persyaratan tentang kesimetrisan dan keidempotenan matriks yang dipakai sehingga dapat dipergunakan didalam skripsinya. Terimakasih juga diucapkan kepada Pepi Novianti yang juga telah membantu memeriksa apa yang telah dilakukan Renny Alvionita sebagai bagian dari skripsinya.

6. PUSTAKA

[1]. Dean A, Voss D. *Design and Analysis of Experiments*. New York: Springer; 1999.

[2]. Graybill, FA. *Theory and Application of The Linear Model*. California: Wadsworth Publishing Company; 1976.

[3]. Harville, DA. *Matrix Algebra From a Statistician's Perspective*. New York: Springer; 2008.

[4]. Lentner M, Bishop T. *Experimental Design and Analysis.*Blacksburg: Valley Book Company; 1986.

[5]. Nugroho, S. *Metode Matriks Rancangan Terpartisi Untuk Penghitungan Jumlah Kuadrat Percobaan Tiga Faktor.*Surabaya: Konferensi Nasional Matematika XVII ITS; 2014.

[6]. Rencher AC, SchaaljeGB. *Linear Models in Statistics*. Second Edition. New Jersey: John Wiley & Sons;2008.

[7]. **Seber, GAF**. *A Matrix Handbook for Statisticians.* John Wiley & Sons. New Jersey. 2008.