PENGGUNAAN MATRIKS RANCANGAN TERPARTISI DALAM ANALISIS RANCANGAN PERCOBAAN TIGA FAKTOR

Sigit Nugroho
[1]Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Bengkulu
snugroho@unib.ac.id.

ABSTRACT

Using classical sigma notation in calculating sum of squares for each source of variation could be difficult. QR decomposition procedures for calculating them is limited to the number of observations in an experiment. In this paper, partitioning the design matrix for calculating sum of squares with respect to it's source of variation will be exhibited for the factorial experimental design. In addition, their degrees of freedom will be calculated accordingly. Example will be given in the case of experimental data using three factors.

Keywords: Partitioned Design Matrix, Sum of Squares, Degrees of freedom, Factorial Experiment.

PENDAHULUAN

Salah satu tahapan dalam analisis keragaman model rancangan percobaan adalah menghitung jumlah kuadrat masing-masing sumber keragaman. Jumlah kuadrat respon atau jumlah kuadrat total secara umum terdiri dari jumlah kuadrat model dan jumlah kuadrat galat percobaan [3].

Faktor merupakan aspek yang dipelajari dalam sebuah percobaan tunggal. Sedangkan kategori yang berbeda dalam suatu faktor disebut dengan taraf suatu faktor. Percobaan yang dirancang / dilakukan dengan menggunakan lebih dari satu faktor sekaligus disebut dengan Percobaan Berfaktor [5].

Banyaknya taraf perlakuan yang digunakan untuk satu kali ulangan merupakan hasil kali silang keseluruhan dari taraf-taraf semua faktor. Bila masing-masing taraf perlakuan diulang *r* kali maka banyaknya satuan percobaan yang digunakan adalah *r* kali banyaknya taraf perlakuan [2].

Formula klasik yang digunakan untuk menghitung jumlah kuadrat menggunakan notasi aljabar yaitu notasi jumlah yang kadang sampai beberapa kali tergantung banyaknya subskrip yang digunakan [6]. Notasi ini sudah tentu akan membutuhkan pemahaman terlebih dahulu agar tidak sampai terjadi kesalahan penghitungan. Notasi aljabar matriks sebagaimana pada model linier secara umum juga tidak dengan mudah bisa dioperasionalisasikan mengingat matriks rancangan pada model rancangan percobaan tidak berpangkat penuh [1].

Metode matriks rancangan terpartisi untuk penghitungan jumlah kuadrat pada Rancangan Acak Lengkap, Rancangan Acak Kelompok Lengkap dan Rancangan Persegi Latin telah diperkenalkan oleh Nugroho [7].

NOTASI

Model Rancangan Tiga Faktor pada rancangan acak lengkap adalah seperti berikut:

$$Y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \varepsilon_{ijkl}$$

$$i = 1,2,...,a \quad j = 1,2,...,b \quad k = 1,2,...,c \quad l = 1,2,...,r$$

dengan Y_{ijkl} adalah pengamatan ke-*l* yang memperoleh perlakuan A ke-*i* perlakuan B ke-*j* dan perlakuan C ke-*k*; μ adalah rata-rata umum; α_i pengaruh perlakuan A ke-*i*; β_j pengaruh perlakuan B ke-*j*; γ_k pengaruh perlakuan C ke-*k*; $(\alpha\beta)_{ij}$ pengaruh interaksi perlakuan A ke-*i* dan perlakuan B ke-*j*; $(\alpha\gamma)_{ik}$ pengaruh interaksi perlakuan A ke-*i* dan perlakuan C ke-*k*; $(\beta\gamma)_{jk}$ pengaruh interaksi perlakuan B ke-*j* dan perlakuan C ke-*k*; $(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$ pengaruh interaksi perlakuan A ke-*i* perlakuan B ke-*j* dan perlakuan C ke-*k*; ε_{ijkl} galat percobaan ke-*l* yang memperoleh perlakuan A ke-*i* perlakuan B ke-*j* dan perlakuan C ke-*k*.

Dengan menggunakan notasi aljabar matriks, model diatas dapat dituliskan menjadi $\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$ dengan $\underline{Y}$ adalah vektor amatan berukuran *abcr* x *1*, X adalah matriks rancangan berukuran *abcr* x *(1+a+b+c+ab+ac+bc+abc)* yang dipartisi menjadi

$$\left[X_\mu, X_\alpha, X_\beta, X_\gamma, X_{\alpha\beta}, X_{\alpha\gamma}, X_{\beta\gamma}, X_{\alpha\beta\gamma}\right]$$

dengan

$$X_\mu = \underline{1}_{a\times 1} \otimes \underline{1}_{b\times 1} \otimes \underline{1}_{c\times 1} \otimes \underline{1}_{r\times 1}$$

$$X_\alpha = I_{a\times a} \otimes \underline{1}_{b\times 1} \otimes \underline{1}_{c\times 1} \otimes \underline{1}_{r\times 1}$$

$$X_\beta = \underline{1}_{a\times 1} \otimes I_{b\times b} \otimes \underline{1}_{c\times 1} \otimes \underline{1}_{r\times 1}$$

$$X_\gamma = \underline{1}_{a\times 1} \otimes \underline{1}_{b\times 1} \otimes I_{c\times c} \otimes \underline{1}_{r\times 1}$$

$$X_{\alpha\beta} = I_{a\times a} \otimes I_{b\times b} \otimes \underline{1}_{c\times 1} \otimes \underline{1}_{r\times 1}$$

$$X_{\alpha\gamma} = I_{a\times a} \otimes \underline{1}_{b\times 1} \otimes I_{c\times c} \otimes \underline{1}_{r\times 1}$$

$$X_{\beta\gamma} = \underline{1}_{a\times 1} \otimes I_{b\times b} \otimes I_{c\times c} \otimes \underline{1}_{r\times 1}$$

$$X_{\alpha\beta\gamma} = I_{a\times 1} \otimes I_{b\times 1} \otimes I_{c\times 1} \otimes \underline{1}_{r\times 1}$$

serta $\underline{\beta}$ adalah vektor parameter model berukuran *(1+a+b+c+ab+ac+bc+abc) x 1,* dan $\underline{\varepsilon}$ vektor galat percobaan berukuran *abcr* x *1*

Selanjutnya dicari matriks proyeksi untuk tiap komponen sumber keragaman dengan menggunakan bentuk umum matriks proyeksi $M_* = X_*(X_*^t X_*)^{-1} X_*^t$, dan hasilnya seperti berikut

$$M_\mu = \frac{1}{rabc} J_{a\times a} \otimes J_{b\times b} \otimes J_{c\times c} \otimes J_{r\times r}$$

$$M_\alpha = \frac{1}{rbc} I_{a\times a} \otimes J_{b\times b} \otimes J_{c\times c} \otimes J_{r\times r}$$

$$M_\beta = \frac{1}{rac} J_{a\times a} \otimes I_{b\times b} \otimes J_{c\times c} \otimes J_{r\times r}$$

$$M_\gamma = \frac{1}{rab} J_{a\times a} \otimes J_{b\times b} \otimes I_{c\times c} \otimes J_{r\times r}$$

$$M_{\alpha\beta} = \frac{1}{rc} I_{a\times a} \otimes I_{b\times b} \otimes J_{c\times c} \otimes J_{r\times r}$$

$$M_{\alpha\gamma} = \frac{1}{rb} I_{a\times a} \otimes J_{b\times b} \otimes I_{c\times c} \otimes J_{r\times r}$$

$$M_{\beta\gamma} = \frac{1}{ra} J_{a\times a} \otimes I_{b\times b} \otimes I_{c\times c} \otimes J_{r\times r}$$

$$M_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{r} I_{a\times a} \otimes I_{b\times b} \otimes I_{c\times c} \otimes J_{r\times r}$$

Dengan menggunakan sifat-sifat *Kronecker Product*, dengan mudah dapat kita peroleh bentuk sederhana dari setiap kombinasi perkalian pasangan M_μ, M_α, M_β, M_γ, $M_{\alpha\beta}$, $M_{\alpha\gamma}$, $M_{\beta\gamma}$, dan $M_{\alpha\beta\gamma}$.

Tabel 1.
Perkalian Antar Matriks Proyeksi

	M_μ	M_α	M_β	M_γ	$M_{\alpha\beta}$	$M_{\alpha\gamma}$	$M_{\beta\gamma}$	$M_{\alpha\beta\gamma}$
M_μ	M_μ	M_μ	M_μ	M_μ	M_μ	M_μ	M_μ	M_μ
M_α	M_μ	M_α	M_μ	M_α	M_α	M_α	M_μ	M_α
M_β	M_μ	M_μ	M_β	M_μ	M_β	M_μ	M_β	M_β
M_γ	M_μ	M_α	M_μ	M_γ	M_μ	M_γ	M_γ	M_γ
$M_{\alpha\beta}$	M_μ	M_α	M_β	M_μ	$M_{\alpha\beta}$	M_α	M_β	$M_{\alpha\beta}$
$M_{\alpha\gamma}$	M_μ	M_α	M_μ	M_γ	M_α	$M_{\alpha\gamma}$	M_γ	$M_{\alpha\gamma}$
$M_{\beta\gamma}$	M_μ	M_μ	M_β	M_γ	M_β	M_γ	$M_{\beta\gamma}$	$M_{\beta\gamma}$
$M_{\alpha\beta\gamma}$	M_μ	M_α	M_β	M_γ	$M_{\alpha\beta}$	$M_{\alpha\gamma}$	$M_{\beta\gamma}$	$M_{\alpha\beta\gamma}$

FORMULA JUMLAH KUADRAT

Berikut adalah formula aljabar yang digunakan untuk menghitung jumlah kuadrat pada percobaan tiga faktor.

Faktor Koreksi

$$FK = \left(\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{c} \sum_{l=1}^{r} Y_{ijkl} \right)^2 \Big/ rabc$$

Jumlah Kuadrat Total $JK[Total] = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{c} \sum_{l=1}^{r} Y_{ijkl}^2 - FK$

Jumlah Kuadrat A $JK[A] = \sum_{i=1}^{a} \frac{Y_{i...}^2}{rbc} - FK$

Jumlah Kuadrat B $JK[B] = \sum_{j=1}^{b} \frac{Y_{.j..}^2}{rac} - FK$

Jumlah Kuadrat C $JK[C] = \sum_{k=1}^{c} \frac{Y_{..k.}^2}{rab} - FK$

Jumlah Kuadrat interaksi AB $JK[AB] = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \frac{Y_{ij..}^2}{rc} - FK - JK[A] - JK[B]$

Jumlah Kuadrat interaksi AC $JK[AC] = \sum_{i=1}^{a} \sum_{k=1}^{c} \frac{Y_{i.k.}^2}{rb} - FK - JK[A] - JK[C]$

Jumlah Kuadrat interaksi BC $JK[BC] = \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{c} \frac{Y_{.jk.}^2}{ra} - FK - JK[B] - JK[C]$

Jumlah Kuadrat interaksi ABC

$$JK[ABC] = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\frac{Y_{ijk.}^2}{r} - FK - JK[A]$$
$$- JK[B] - JK[C] - JK[AB]$$
$$- JK[AC] - JK[BC]$$

Notasi formula jumlah kuadrat diatas dapat dituliskan dalam bentuk aljabar matriks seperti berikut:

$$JK[A] = \underline{Y}^t (M_\alpha - M_\mu)\underline{Y}$$
$$JK[B] = \underline{Y}^t (M_\beta - M_\mu)\underline{Y}$$
$$JK[C] = \underline{Y}^t (M_\gamma - M_\mu)\underline{Y}$$
$$JK[AB] = \underline{Y}^t (M_{\alpha\beta} - M_\alpha - M_\beta + M_\mu)\underline{Y} \quad JK[AC] = \underline{Y}^t (M_{\alpha\gamma} - M_\alpha - M_\gamma + M_\mu)\underline{Y}$$
$$JK[BC] = \underline{Y}^t (M_{\beta\gamma} - M_\beta - M_\gamma + M_\mu)\underline{Y} \quad JK[ABC] = \underline{Y}^t (M_{\alpha\beta\gamma} + M_\alpha + M_\beta + M_\gamma - M_{\alpha\beta} - M_{\alpha\gamma} - M_{\beta\gamma} - M_\mu)\underline{Y}$$
$$JK[Total] = \underline{Y}^t (I - M_\mu)\underline{Y}$$

dan dengan demikian

$$JK[Galat] = \underline{Y}^t (I - M_{\alpha\beta\gamma})\underline{Y}$$

Dapat diverifikasi dengan mudah bahwa $M_\alpha - M_\mu$, $M_\beta - M_\mu$, $M_\gamma - M_\mu$, $M_{\alpha\beta} - M_\alpha - M_\beta + M_\mu$, $M_{\alpha\gamma} - M_\alpha - M_\gamma + M_\mu$, $M_{\beta\gamma} - M_\beta - M_\gamma + M_\mu$, $M_{\alpha\beta\gamma} + M_\alpha + M_\beta + M_\gamma - M_{\alpha\beta} - M_{\alpha\gamma} - M_{\beta\gamma} - M_\mu$, dan $I - M_{\alpha\beta\gamma}$ merupakan matriks-matriks yang simetris dan idempoten.

Dari sifat simetris dan idempoten, bisa diperlihatkan dengan Tabel 1, maka matriks-matriks tersebut memiliki rank yang sama dengan nilai teras (*trace*) nya.

$$tr(M_\alpha - M_\mu) = a - 1$$
$$tr(M_\beta - M_\mu) = b - 1$$
$$tr(M_\gamma - M_\mu) = c - 1$$
$$tr(M_{\alpha\beta} - M_\alpha - M_\beta + M_\mu) = (a-1)(b-1)$$
$$tr(M_{\alpha\gamma} - M_\alpha - M_\gamma + M_\mu) = (a-1)(c-1)$$
$$tr(M_{\beta\gamma} - M_\beta - M_\gamma + M_\mu) = (b-1)(c-1)$$
$$tr(M_{\alpha\beta\gamma} + M_\alpha + M_\beta + M_\gamma - M_{\alpha\beta} - M_{\alpha\gamma} - M_{\beta\gamma} - M_\mu) = (a-1)(b-1)(c-1) \quad tr(I - M_{\alpha\beta\gamma}) = abc(r-1)$$

Berdasarkan teorema [1], jika vektor peubah acak berukuran *n x 1* yang menyebar N(y; □, I), maka peubah acak $U = Y^t AY$ memiliki sebaran $\chi^2(u; K, \lambda)$ dengan $\lambda = \underline{\mu}^t A \underline{\mu} / 2$ adalah parameter ketidaksen-tralan, jika dan hanya jika A matriks idempoten dengan rank K. Tanpa mengurangi sifat umum, dapat dimisalkan bahwa $\underline{\mu} = \underline{0}$.

Dengan demikian,

$$JK[A] \sim \chi^2_{a-1}$$
$$JK[B] \sim \chi^2_{b-1}$$
$$JK[C] \sim \chi^2_{c-1}$$
$$JK[AB] \sim \chi^2_{(a-1)(b-1)}$$

$$JK[AC] \sim \chi^2_{(a-1)(c-1)}$$
$$JK[BC] \sim \chi^2_{(b-1)(c-1)}$$
$$JK[ABC] \sim \chi^2_{(a-1)(b-1)(c-1)}$$
$$JK[Galat] \sim \chi^2_{abc(r-1)}$$

Untuk keperluan pengujian hipotesis, dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa setiap matriks berikut :
$M_\alpha - M_\mu$, $M_\beta - M_\mu$, $M_\gamma - M_\mu$, $M_{\alpha\beta} - M_\alpha - M_\beta + M_\mu$, $M_{\alpha\gamma} - M_\alpha - M_\gamma + M_\mu$, $M_{\beta\gamma} - M_\beta - M_\gamma + M_\mu$, dan $M_{\alpha\beta\gamma} + M_\alpha + M_\beta + M_\gamma - M_{\alpha\beta} - M_{\alpha\gamma} - M_{\beta\gamma} - M_\mu$
bebas terhadap $I - M_{\alpha\beta\gamma}$. Dengan perkataan lain bahwa setiap perkalian matriks-matriks tersebut dengan $I - M_{\alpha\beta\gamma}$ menghasilkan matriks nol.

Selanjutnya diketahui jika A berdistribusi kai-kuadrat dengan derajat bebas *a*, dan B berdistribusi kai-kuadrat dengan derajat bebas *b*, serta A dan B saling bebas, maka (A/*a*)/(B/*b*) menyebar menurut sebaran F dengan derajat bebas *a* dan *b* [1].

Dengan demikian, untuk model tetap, diperoleh hasil sebagai berikut :

a. Untuk menguji adanya pengaruh utama A, tolak hipotesis nol apabila (JK A/(*a-1*))/(JK Galat/(*abc*(*r-1*))) besar nilainya. (JK A/(*a-1*))/(JK Galat/(*abc*(*r-1*))) berdistribusi F dengan derajat bebas *a-1* dan *abc*(*r-1*).
b. Untuk menguji adanya pengaruh utama B, tolak hipotesis nol apabila (JK B/(*b-1*))/(JK Galat/(*abc*(*r-1*))) besar nilainya. (JK B/(*b-1*))/(JK Galat/(*abc*(*r-1*))) berdistribusi F dengan derajat bebas *b-1* dan *abc*(*r-1*).
c. Untuk menguji adanya pengaruh utama C, tolak hipotesis nol apabila (JK C/(*c-1*))/(JK Galat/(*abc*(*r-1*))) besar nilainya. (JK C/(*c-1*))/(JK Galat/(*abc*(*r-1*))) berdistribusi F dengan derajat bebas *c-1* dan *abc*(*r-1*).
d. Untuk menguji adanya pengaruh interaksi AB, tolak hipotesis nol apabila (JK AB/((*a-1*)(*b-1*))/(JK Galat/(*abc*(*r-1*))) besar nilainya. (JK AB/((*a-1*)(*b-1*))/(JK Galat/(*abc*(*r-1*))) berdistribusi F dengan derajat bebas (*a-1*)(*b-1*) dan *abc*(*r-1*).
e. Untuk menguji adanya pengaruh interaksi AC, tolak hipotesis nol apabila (JK AC/((*a-1*)(*c-1*))/(JK Galat/(*abc*(*r-1*))) besar nilainya. (JK AC/((*a-1*)(*c-1*))/(JK Galat/(*abc*(*r-1*))) berdistribusi F dengan derajat bebas (*a-1*)(*c-1*) dan *abc*(*r-1*).
f. Untuk menguji adanya pengaruh interaksi BC, tolak hipotesis nol apabila (JK BC/((*b-1*)(*c-1*))/(JK Galat/(*abc*(*r-1*))) besar nilainya. (JK BC/((*b-1*)(*c-1*))/(JK Galat/(*abc*(*r-1*))) berdistribusi F dengan derajat bebas (*b-1*)(*c-1*) dan *abc*(*r-1*).
g. Untuk menguji adanya pengaruh interaksi ABC, tolak hipotesis nol apabila (JK ABC/((*a-1*)(*b-1*)(*c-1*))/(JK Galat/(*abc*(*r-1*))) besar nilainya. (JK ABC/((*a-1*)(*b-1*)(*c-1*))/(JK Galat/(*abc*(*r-1*))) berdistribusi F dengan derajat bebas (*a-1*)(*b-1*)(*c-1*) dan *abc*(*r-1*).

TELADAN

Teladan diambil dari Hicks [4], untuk percobaan tiga faktor dengan masing-masing faktor terdiri dari tiga taraf dengan ulangan sama sebanyak 3 ulangan untuk tiap kombinasi taraf perlakuan yang mungkin. Respon berupa hasil yang telah dikoding dengan pengurangan 20, faktor *Hari* dan *Operator* merupakan faktor kualitatif, sedangkan *Konsentrasi* merupakan faktor kuantitatif. Meskipun jarak taraf tidak sama, namun logaritmanya berjarak sama.

Semua taraf dari semua faktor bersifat tetap yang dilakukan dalam rancangan acak lengkap. Data pengamatan disajikan pada tabel berikut.

Tabel 2. Data Pengamatan Percobaan Tiga Faktor dari Hicks[4].

		Hari								
		Pertama			*Kedua*			*Ketiga*		
		Operator								
		A	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*
Konsentrasi	0,5	1,0	0,2	0,2	1,0	1,0	1,2	1,7	0,2	0,5
		1,2	0,5	0,0	0,0	0,0	0,0	1,2	0,7	1,0
		1,7	0,7	-0,3	0,5	0,0	0,5	1,2	1,0	1,7
	1,0	5,0	3,2	3,5	4,0	3,2	3,7	4,5	3,7	3,7
		4,7	3,7	3,5	3,5	3,0	4,0	5,0	4,0	4,5
		4,2	3,5	3,2	3,5	4,0	4,2	4,7	4,2	3,7
	2,0	7,5	6,0	7,2	6,5	5,2	7,0	6,7	7,5	6,2
		6,5	6,2	6,5	6,0	5,7	6,7	7,5	6,0	6,5
		7,7	6,2	6,7	6,2	6,5	6,8	7,0	6,0	7,0

Program dalam bahasa R untuk menganalisa data diatas tertera seperti berikut :

```
##### Pengaturan Ukuran Data #####
#### a adalah taraf faktor A (Hari)
#### b adalah taraf faktor B (Operator)
#### c adalah taraf faktor C (Konsentrasi)
#### r adalah banyaknya ulangan
a <-3
b <-3
c <-3
r <-3

##### Data Observasi #####
y <-rbind(
        1.0, 1.2, 1.7, 5.0, 4.7, 4.2, 7.5, 6.5, 7.7,
        0.2, 0.5, 0.7, 3.2, 3.7, 3.5, 6.0, 6.2, 6.2,
        0.2, 0.0, -0.3, 3.5, 3.5, 3.2, 7.2, 6.5, 6.7,
        1.0, 0.0, 0.5, 4.0, 3.5, 3.5, 6.5, 6.0, 6.2,
        1.0, 0.0, 0.0, 3.2, 3.0, 4.0, 5.2, 5.7, 6.5,
        1.2, 0.0, 0.5, 3.7, 4.0, 4.2, 7.0, 6.7, 6.8,
        1.7, 1.2, 1.2, 4.5, 5.0, 4.7, 6.7, 7.5, 7.0,
        0.2, 0.7, 1.0, 3.7, 4.0, 4.2, 7.5, 6.0, 6.0,
        0.5, 1.0, 1.7, 3.7, 4.5, 3.7, 6.2, 6.5, 7.0)

##### Vektor2 dan Matriks2 Dasar #####
va <- matrix(1,a,1) #vektor 1a
vb <- matrix(1,b,1) #vektor 1b
```

```
vc <- matrix(1,c,1) #vektor 1c
vr <- matrix(1,r,1) #vektor 1r
Ia <- diag(1,a,a) #identitas a
Ib <- diag(1,b,b) #identitas b
Ic <- diag(1,c,c) #identitas c

##### Matriks2 Rancangan Terpartisi #####
Xmu <- kronecker(va,kronecker(vb,kronecker(vc,vr)))
Xa <- kronecker(Ia,kronecker(vb,kronecker(vc,vr)))
Xb <- kronecker(va,kronecker(Ib,kronecker(vc,vr)))
Xc <- kronecker(va,kronecker(vb,kronecker(Ic,vr)))
Xab <- kronecker(Ia,kronecker(Ib,kronecker(vc,vr)))
Xac <- kronecker(Ia,kronecker(vb,kronecker(Ic,vr)))
Xbc <- kronecker(va,kronecker(Ib,kronecker(Ic,vr)))
Xabc <- kronecker(Ia,kronecker(Ib,kronecker(Ic,vr)))

##### Matriks Proyeksi #####
Mmu <-(Xmu %*%(solve(t(Xmu)%*%Xmu)))%*% t(Xmu)
Ma <-(Xa %*%(solve(t(Xa)%*%Xa)))%*% t(Xa)
Mb <-(Xb %*%(solve(t(Xb)%*%Xb)))%*% t(Xb)
Mc <-(Xc %*%(solve(t(Xc)%*%Xc)))%*% t(Xc)
Mab <-(Xab %*%(solve(t(Xab)%*%Xab)))%*% t(Xab)
Mac <-(Xac %*%(solve(t(Xac)%*%Xac)))%*% t(Xac)
Mbc <-(Xbc %*%(solve(t(Xbc)%*%Xbc)))%*% t(Xbc)
Mabc <-(Xabc %*%(solve(t(Xabc)%*%Xabc)))%*% t(Xabc)

##### Penghitungan Jumlah Kuadrat #####
SSA <- round(t(y)%*%(Ma-Mmu)%*%y,digits=3)
SSB <- round(t(y)%*%(Mb-Mmu)%*%y,digits=3)
SSC <- round(t(y)%*%(Mc-Mmu)%*%y,digits=3)
SSAB <- round(t(y)%*%(Mab-Ma-Mb+Mmu)%*%y,digits=3)
SSAC <- round(t(y)%*%(Mac-Ma-Mc+Mmu)%*%y,digits=3)
SSBC <- round(t(y)%*%(Mbc-Mb-Mc+Mmu)%*%y,digits=3)
SSABC <- round(t(y)%*%(Mabc+Ma+Mb+Mc-Mab-Mac-Mbc-Mmu)%*%y,digits=3)
SSErr <- round(t(y)%*%(diag(1,a*b*c*r,a*b*c*r)-Mabc)%*%y,digits=3)
SSTotal <- round(t(y)%*%(diag(1,a*b*c*r,a*b*c*r)-Mmu)%*%y,digits=3)

##### Menghitung Kuadrat Tengah #####
library (psych)
MSA <- round(SSA/tr(Ma-Mmu),digits=3)
MSB <- round(SSB/tr(Mb-Mmu),digits=3)
MSC <- round(SSC/tr(Mc-Mmu),digits=3)
MSAB <- round(SSAB/tr(Mab-Ma-Mb+Mmu),digits=3)
MSAC <- round(SSAC/tr(Mac-Ma-Mc+Mmu),digits=3)
MSBC <- round(SSBC/tr(Mbc-Mb-Mc+Mmu),digits=3)
MSABC <- round(SSABC/tr(Mabc+Ma+Mb+Mc-Mab-Mac-Mbc-Mmu),digits=3)
MSErr <- round(SSErr/tr(diag(1,a*b*c*r,a*b*c*r)-Mabc),digits=3)

##### Menghitung Nilai F #####
FA <- round(MSA/MSErr,digits=3)
```

```
FB <- round(MSB/MSErr,digits=3)
FC <- round(MSC/MSErr,digits=3)
FAB <- round(MSAB/MSErr,digits=3)
FAC <- round(MSAC/MSErr,digits=3)
FBC <- round(MSBC/MSErr,digits=3)
FABC <- round(MSABC/MSErr,digits=3)

##### Ringkasan Hasil #####
sources <- rbind("A", "B", "C", "AB", "AC", "BC", "ABC", "Err","Total")
Values <- cbind("Source","Deg Frdm","SS","MS","F")
SS1 <- rbind(SSA,SSB,SSC,SSAB,SSAC,SSBC,SSABC,SSErr,SSTotal)
MS1 <- rbind(MSA,MSB,MSC,MSAB,MSAC,MSBC,MSABC,MSErr,"")
DB1 <-rbind(tr(Ma-Mmu),tr(Mb-Mmu),tr(Mc-Mmu),tr(Mab-Ma-Mb+Mmu),tr(Mac-Ma-
Mc+Mmu),tr(Mbc-Mb-Mc+Mmu),tr(Mabc+Ma+Mb+Mc-Mab-Mac-Mbc-Mmu),
tr(diag(1,a*b*c*r,a*b*c*r)-Mabc),tr(diag(1,a*b*c*r,a*b*c*r)-Mmu))
F1 <- rbind(FA,FB,FC,FAB,FAC,FBC,FABC,"","")
factABC <-cbind(sources,DB1,SS1,MS1,F1)
factorialABC2 <-rbind(Values,factABC)
factorialABC2
```

OUTPUT

```
     [,1]      [,2]       [,3]      [,4]      [,5]
 [1,] "Source" "Deg Frdm" "SS"      "MS"      "F"
 [2,] "A"      "2"        "3.483"   "1.742"   "9.416"
 [3,] "B"      "2"        "6.142"   "3.071"   "16.6"
 [4,] "C"      "2"        "468.985" "234.493" "1267.53"
 [5,] "AB"     "4"        "4.072"   "1.018"   "5.503"
 [6,] "AC"     "4"        "0.586"   "0.146"   "0.789"
 [7,] "BC"     "4"        "0.894"   "0.224"   "1.211"
 [8,] "ABC"    "8"        "1.094"   "0.137"   "0.741"
 [9,] "Err"    "54"       "9.973"   "0.185"   ""
[10,] "Total"  "80"       "495.231" ""        ""
```

KESIMPULAN

Metode Matriks Rancangan Terpartisi ini sebagai alternatif penghitungan jumlah kuadrat dalam rancangan percobaan dengan menggunakan fungsi-fungsi aljabar matriks yang lebih mudah karena partisi matriks ini berpangkat penuh sehingga tidak diperlukan matriks kebalikan umum (*generalized inverse*). Bila partisi matriks tersebut adalah T yang bersesuaian dengan sumber keragaman dalam model, maka perhitungan jumlah kuadratnya menggunakan komponen $\underline{Y}^t T(T^t T)^{-1} T^t \underline{Y} = \underline{Y}^t M \underline{Y}$.

Bila sumber keragaman adalah pengaruh utama, maka jumlah kuadratnya adalah $\underline{Y}^t (M_* - M_\mu)\underline{Y}$.

Bila sumber keragamannya adalah pengaruh interaksi, maka cara penghitungan jumlah kuadratnya sama seperti penghitungan jumlah kuadrat pengaruh utama diteruskan dengan mengurangkan jumlah kuadrat pengaruh pengaruh utama pembentuknya dan/atau pengaruh interaksi dengan derajat yang lebih rendah darinya.

Cara seperti ini dapat digeneralisasi untuk percobaan faktorial dengan banyak faktor lebih dari tiga.

DAFTAR PUSTAKA

Christensen, R. *Plane Answers to Complex Questions. The Theory of Linear Models*. *3rd ed.* Springer Verlag, 2001.

*D*ean, A. and Voss, D., *Design and Analysis of Experiments*, Springer, 1999.

Gomez, K.A. and Gomez, A.A., *Statistical Procedures for Agricultural Research. 2nd ed.* John Wiley & Sons. 1984.

Hicks, C.R., *Fundamental Concepts in the Design of Experiments. 3rd ed.*, Holt,Rinehart and Winston. 1982.

Lentner, M. and Bishop, T. *Experimental Design and Analysis*. Valley Book Company. 1986.

Little, T.M. and Hills, F.J., *Agricultural Experimentation. Design and Analysis,* John Wiley and Sons, 1978.

Nugroho, S., Metode Matriks Rancangan Terpartisi untuk Penghitungan Jumlah Kuadrat, *Prosiding Semirata BKS PTN Wilayah Barat. Bogor 9-11 Mei 2014***.**