

# PERBANDINGAN METODE KEMUNGKINAN MAKSIMUM DAN LINIERISASI LANGSUNG DALAM PENENTUAN PENDUGA PARAMETER PADA MODEL PROBIT DAN LOGIT

Filo Sopianti<sup>1</sup>, Sigit Nugroho<sup>2</sup> dan Jose Rizal<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Alumni Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Bengkulu

<sup>2</sup>Dosen Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Bengkulu

## ABSTRACT

Probit and logit models are nonlinear model. The parameter estimation in the probit and logit models can be estimated using maximum likelihood method. These nonlinear models can be made into linear form of its parameter so that the models can be estimated using least square method. Maximum likelihood and least square estimators are to be compared to find the better one for a given data set. Some criteria used for this comparison are Mean Absolute Error (MAE), Root Mean Square Error (RMSE), Mean Absolute Percentage Error (MAPE), dan Root Mean Square Percentage Error (RMSPE). The result shows, given the data taken from a reference book, the maximum likelihood method is better than the least square method.

*Keywords: Probit Model, Logit Model, Maximum Likelihood Method, Least Square Method*

## 1. PENDAHULUAN

Variabel respon yang kategorik jika diolah kedalam model analisis regresi linier biasa (klasik) maka parameter penduga yang diperoleh kurang tepat, karena melanggar asumsi nilai sisa yang disebabkan oleh bentuk galat yang tidak normal, varian galat yang tidak tetap (*Heteroscedastic*), dan terbatasnya fungsi respon (Neter *et al.*, 2005). Untuk mendapatkan penduga parameter yang lebih tepat, data tersebut diolah kedalam Model Linier Tergeneralisasi (MLT) atau *Generalized Linear Model* (GLM) yang mengasumsikan bahwa variabel respon berdistribusi secara bebas dalam keluarga eksponensial (Dobson *dalam* Tirta, 2004). *Generalized Linear Model* (GLM) yang membahas variabel respon untuk data biner diantaranya model logit dan probit yang memiliki variabel respon berdistribusi Bernoulli.

Parameter yang terdapat pada model probit dan logit dapat diduga dengan menggunakan metode kemungkinan maksimum (*maximum likelihood*) dan dengan cara linierisasi langsung yang kemudian diolah dengan menggunakan metode kuadrat terkecil (*least square*). Untuk mengetahui metode mana yang lebih baik dalam penentuan penduga parameter pada model probit dan logit, dilakukan perbandingan anatara metode kemungkinan maksimum (*maximum likelihood*) dan linierisasi langsung yang kemudian diolah dengan metode kuadrat terkecil (*least square*), sehingga diperoleh model yang mendekati data sebenarnya. Agar lebih terarah, variabel respon dibatasi hanya untuk variabel dikotomis dengan satu variabel prediktor. Untuk lebih memahami konsep maka dilakukan simulasi data sebagai validasi dengan menggunakan data yang dibangkitkan dari program microsoft excel

## 2. LANDASAN TEORI

### 2.1 *Generalized Linear Model* (GLM)

Kondisi lain di lapangan yang tidak dapat diatasi langsung oleh model linier biasa (klasik) adalah adanya kenyataan bahwa distribusi respon tidak harus normal. Kondisi ini dapat diatasi dengan menggunakan *Generalized Linear Model* (GLM) atau Model Linier Tergeneralisasi (MLT), dengan

asumsi (1) Variabel respon memiliki distribusi keluarga eksponensial, (2) Adanya komponen tetap yang disebut prediktor linier  $\eta_i = \sum_{j=0}^k \beta_j x_{ij}$ , (3) Hubungan antara rataan dengan prediktor linier ditunjukkan oleh fungsi  $g(\cdot)$  yang disebut fungsi hubungan atau *link-function* sedemikian hingga  $g(\mu_i) = \eta_i$ .

## 2.2 Model Probit

Nagler (1994) mengungkapkan, misalkan  $Y_i^*$  adalah variabel respon yang tak teramati. Variabel respon ini dipengaruhi oleh variabel prediktor sehingga persamaan  $Y_i^*$  dapat ditulis dalam bentuk

$$Y_i^* = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i \quad (1)$$

dengan  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  sebagai parameter regresi,  $X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{ki}$  variabel prediktor regresi dengan  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , dan  $\varepsilon_i$  merupakan koefisien galat regresi yang diasumsikan berdistribusi normal  $N(0,1)$ .  $Y_i^*$  dapat diamati ketika melewati batas tertentu, misalkan

$$Y_i = 1 \text{ jika } Y_i^* > 0$$

$$Y_i = 0 \text{ jika } Y_i^* \leq 0$$

untuk  $Y_i = 1$  diperoleh,

$$P[Y_i = 1] = 1 - F(-(\beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki})) \quad (2)$$

Dimana  $F(-(\beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki}))$  merupakan fungsi distribusi kumulatif dari  $\varepsilon_i$  yang diasumsikan berdistribusi  $N(0,1)$  sehingga persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk fungsi distribusi normal kumulatif dari  $\varepsilon_i$  ( $\Phi$ ) yang dirumuskan

$$P_i = \Phi(\beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki}) \quad (3)$$

dengan menggunakan invers fungsi  $\Phi$  ( $\Phi^{-1}$ ) maka persamaan (2) dapat dinyatakan dalam bentuk linier terhadap parameternya dengan persamaan

$$\Phi^{-1}(P_i) = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki} \quad (4)$$

Persamaan (2) disebut model probit sedangkan persamaan (3) merupakan model probit yang berbentuk linier terhadap parameternya.

## 2.3 Model Logit

Model logit atau model regresi logistik mengikuti fungsi distribusi logistik yang mempunyai fungsi kepekatan peluangnya

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} \quad (5)$$

dan fungsi distribusi kumulatif dirumuskan

$$F(x) = (1 + e^{-x})^{-1} \quad (6)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (6) ke persamaan (2) diperoleh:

$$P_i = \frac{\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^k \beta_j X_{ij}\right)}{1 + \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^k \beta_j X_{ij}\right)} \quad (7)$$

Jika persamaan (7) diambil nilai logaritma naturalnya maka akan menghasilkan bentuk linier terhadap parameternya, ditunjukkan dengan persamaan

$$\ln\left(\frac{P_i}{1-P_i}\right) = \beta_0 + \sum_{j=1}^k \beta_j X_{ij} \quad (8)$$

Persamaan (7) disebut model logit dan persamaan (8) merupakan model logit dalam bentuk linier terhadap parameternya.

## 2.4 Metode Kemungkinan Maksimum

Metode kemungkinan maksimum menggunakan pendekatan distribusi. Dari data yang dimiliki serta asumsi distribusi yang diberlakukan pada data tersebut, maka dapat diperoleh fungsi likelihood dari data tersebut. Dari fungsi likelihoodnya ditentukan penduga maksimum likelihood untuk  $\beta$  yaitu nilai  $\beta$  yang memaksimumkan  $L$ .

## 2.5 Metode Kuadrat Terkecil

Menurut Tirta (2006), pada dasarnya parameter yang akan diduga dengan metode kuadrat terkecil adalah parameter dari garis regresi pada model yang mewakili populasi. Pendugaan ini diperoleh berdasarkan informasi distribusi sampel yang dimiliki. Metode kuadrat terkecil menggunakan pendekatan geometris, dimana secara geometris garis yang paling mewakili distribusi sampel adalah garis yang mempunyai simpangan minimum atau galat terkecil dengan pencaran data. Simpangan minimum diperoleh dengan mencari minimum bentuk kuadrat kesalahan.

## 2.6 Ukuran Kesalahan Model

Ukuran baik buruknya suatu model dapat dinilai dari kesalahannya (error). Menurut Fomby (2006), ukuran kesalahan model yang umum digunakan adalah *Mean Absolute Error* (MAE), *Root Mean Square Error* (RMSE), *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE), dan *Root Mean Square Percentage Error* (RMSPE).

## 3. Penggunaan Metode Kemungkinan Maksimum dan Kuadrat Terkecil dalam Penentuan Penduga Parameter pada Model Probit dan Logit

### 3.1 Model Probit

#### 3.1.1 Pendugaan Dengan Metode Kemungkinan Maksimum

Jika peubah acak  $R_i \sim \text{Binomial}(n_i, P_i)$  dengan fungsi kepekatan peluang

$$f(r_i) = \binom{n_i}{r_i} P_i^{r_i} (1-P_i)^{n_i-r_i}$$

$n_i$  adalah banyaknya satuan percobaan pada  $x_i$ ,  $r_i$  melambangkan banyaknya satuan yang merespon, dimana  $r_i = 1, 2, 3, \dots, n_i$  dengan  $i = 1, 2, 3, \dots, k$ , maka dapat ditentukan fungsi logaritma natural dari fungsi likelihood gabungannya yaitu:

$$l = \sum_{i=1}^k \ln \binom{n_i}{r_i} + \sum_{i=1}^k r_i \ln P_i + \sum_{i=1}^k (n_i - r_i) \ln (1 - P_i) \quad (9)$$

Selanjutnya memaksimumkan  $l$  dengan cara menurunkan  $l$  terhadap parameter yang akan diduga yaitu  $\beta_0$  dan  $\beta_1$ .

Misalkan  $p_i = \frac{r_i}{n_i}$  maka diperoleh:

$$\frac{\partial l}{\partial \beta_0} = \sum_{i=1}^k n_i \left( \frac{p_i - P_i}{P_i Q_i} \right) \frac{\partial P_i}{\partial \beta_0} \quad (10)$$

Dan

$$\frac{\partial l}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^k n_i \left( \frac{p_i - P_i}{P_i Q_i} \right) \frac{\partial P_i}{\partial \beta_1} \quad (11)$$

dengan

$$\frac{\partial P_i}{\partial \beta_0} = \phi(\beta_0 + \beta_1 X_i) \text{ dan } \frac{\partial P_i}{\partial \beta_1} = X_i \phi(\beta_0 + \beta_1 X_i)$$

Menentukan nilai maksimum untuk persamaan (10) dan (11) tidak dapat dilakukan secara analitik, diperlukan bantuan metode numerik yang berupa metode iterasi. Dari persamaan kemungkinan maksimumnya diperoleh skema iterasi yaitu:

$$\begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^k n_i W_{i0} & \sum_{i=1}^k n_i X_i W_{i0} \\ \sum_{i=1}^k n_i X_i W_{i0} & \sum_{i=1}^k n_i W_{i0} X_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^k n_i W_{i0} (\zeta_i - \hat{\zeta}_{i0}) \\ \sum_{i=1}^k n_i X_i W_{i0} (\zeta_i - \hat{\zeta}_{i0}) \end{bmatrix} \quad (12)$$

Setelah diperoleh nilai  $\Delta a$  dan  $\Delta b$  iterasi dapat diulang dengan menjumlahkan penduga awal dengan pertambahan penduganya yang dirumuskan dengan  $a_i = a_{i-1} + \Delta a$  dan  $b_i = b_{i-1} + \Delta b$ . Iterasi diulang hingga tercapai kriteria konvergensi maksimum yaitu pada saat  $|a_i - a_{i-1}|$  dan  $|b_i - b_{i-1}|$  kurang dari suatu bilangan positif yang sangat kecil.

### 3.1.2 Pendugaan Dengan Metode Kuadrat Terkecil

Dari persamaan model probit linier terhadap parameternya diperoleh,

$$Q = \sum_{i=1}^n \left( \Phi^{-1}(P_i) - a - bX_i \right)^2 \quad (13)$$

dengan  $\sum_{i=1}^k e_i^2 = Q$ ,  $a$  dan  $b$  merupakan penduga parameter bagi  $\beta_0$  dan  $\beta_1$ . Selanjutnya meminimumkan  $Q$ , dengan cara menurunkan persamaan (13) terhadap parameter penduga  $\beta_0$  dan  $\beta_1$  dan menyamakannya dengan nol, sehingga diperoleh:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^k \Phi^{-1}(P_i) \sum_{i=1}^k X_i^2 - \sum_{i=1}^k X_i \sum_{i=1}^k \Phi^{-1}(P_i) X_i}{n \sum_{i=1}^k X_i^2 - \left( \sum_{i=1}^k X_i \right)^2} \quad (14)$$

Dan

$$b = \frac{n \sum_{i=1}^k \Phi^{-1}(P_i) X_i - \sum_{i=1}^k \Phi^{-1}(P_i) \sum_{i=1}^k X_i}{n \sum_{i=1}^k X_i^2 - \left( \sum_{i=1}^k X_i \right)^2} \quad (15)$$

### 3.2 Model Logit

Menentukan penduga pada model logit sama langkahnya seperti pada model Probit. Dari persamaan logaritma natural gabungan fungsi likelihoodnya, dapat ditentukan turunan  $l$  terhadap  $\beta_0$  dan  $\beta_1$  yaitu:

$$\frac{\partial l}{\partial \beta_0} = \sum_{i=1}^k n_i (p_i - P_i) \text{ dan } \frac{\partial l}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^k n_i X_i (p_i - P_i)$$

Dari persamaan (9) diketahui  $\sum r_i$  dan  $\sum r_i X_i$  merupakan statistik cukup minimal bersama (*jointly minimal sufficient statistic*) untuk  $(\beta_0, \beta_1)$ . Berkson (1957) telah menyarankan sebuah metode iterasi untuk menentukan  $\beta_0$  dan  $\beta_1$  dari persamaan kemungkinan di atas. (Govindarajulu, 1988). Dari persamaan kemungkinan maksimum diperoleh matriks iterasi yang ditunjukkan dengan persamaan

$$\begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^k n_i \hat{P}_i \hat{Q}_i & \sum_{i=1}^k n_i X_i \hat{P}_i \hat{Q}_i \\ \sum_{i=1}^k n_i X_i \hat{P}_i \hat{Q}_i & \sum_{i=1}^k n_i X_i^2 \hat{P}_i \hat{Q}_i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^k n_i (p_i - \hat{P}_{0i}) \\ \sum_{i=1}^k n_i X_i (p_i - \hat{P}_{0i}) \end{bmatrix} \quad (16)$$

Setelah diperoleh nilai  $\Delta a$  dan  $\Delta b$  iterasi dapat diulang dengan menjumlahkan penduga awal dengan pertambahan penduganya yang dirumuskan dengan  $a_i = a_{i-1} + \Delta a$  dan  $b_i = b_{i-1} + \Delta b$ . Iterasi diulang hingga tercapai kriteria konvergensi maksimum yaitu pada saat  $|a_i - a_{i-1}|$  dan  $|b_i - b_{i-1}|$  kurang dari suatu bilangan positif yang sangat kecil.

#### 3.1.3 Pendugaan Dengan Metode Kuadrat Terkecil

Menentukan penduga dengan menggunakan metode kuadrat terkecil pada model logit sama halnya dengan model probit. Dari model logit yang linier terhadap parameternya dapat ditentukan  $Q$  dengan persamaan

$$Q = \sum_{i=1}^n (T(P_i) - a - bX_i)^2 \quad (17)$$

dimana  $T(P_i) = \ln\left(\frac{P_i}{1-P_i}\right) = \beta_0 + \beta_1 X_i$ .

Selanjutnya yang diinginkan adalah mencari minimum  $Q$  dengan cara menurunkan persamaan (17) terhadap parameter penduga  $\beta_0$  dan  $\beta_1$  dan menyamakannya dengan nol, sehingga diperoleh penduga  $a$  dan  $b$  dengan persamaan

$$a = \frac{\sum_{i=1}^k T(P_i) \sum_{i=1}^k X_i^2 - \sum_{i=1}^k X_i \sum_{i=1}^k T(P_i) X_i}{n \sum_{i=1}^k X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^k X_i\right)^2}$$

dan

$$b = \frac{n \sum_{i=1}^k T(P_i) X_i - \sum_{i=1}^k T(P_i) \sum_{i=1}^k X_i}{n \sum_{i=1}^k X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^k X_i\right)^2}$$

#### 4. Hasil dan Pembahasan

Dalam menggunakan metode iterasi diperlukan nilai awal. Dilakukan tiga pengujian nilai awal, nilai awal melalui titik ujung, melalui titik tengah dan melalui titik balik. Ternyata dari ketiga titik pengujian diperoleh jumlah iterasi yang sama, ini menunjukkan tidak terjadinya perbedaan yang signifikan.

Dengan menggunakan nilai awal yang melalui titik ujung dan persamaan iterasi, dari data yang dibangkitkan diperoleh model penduga untuk model probit sebagai berikut:

- a. Dengan menggunakan metode kemungkinan maksimum

$$\hat{P}_i = \Phi(-3,330 + 0,971X_i)$$

- b. Dengan menggunakan metode kuadrat terkecil

$$\hat{P}_i = \Phi(-3,521 + 1,031X_i)$$

Dari model penduga di atas, diperoleh hasil ukuran kesalahan yang ditunjukkan dalam table 1.

Sedangkan untuk model logit diperoleh model prnduga sebagai berikut:

- a. Dengan menggunakan metode kemungkinan maksimum

$$\hat{P}_i = [1 + \exp(6,442 - 1,388X_i)]^{-1}$$

- b. Dengan menggunakan metode kuadrat terkecil

$$\hat{P}_i = [1 + \exp(6,494 - 1,387X_i)]^{-1}$$

Dari model penduga logit diatas, diperoleh hasil ukuran kesalahan untuk kedua metode yang ditunjukkan pada tabel (2).

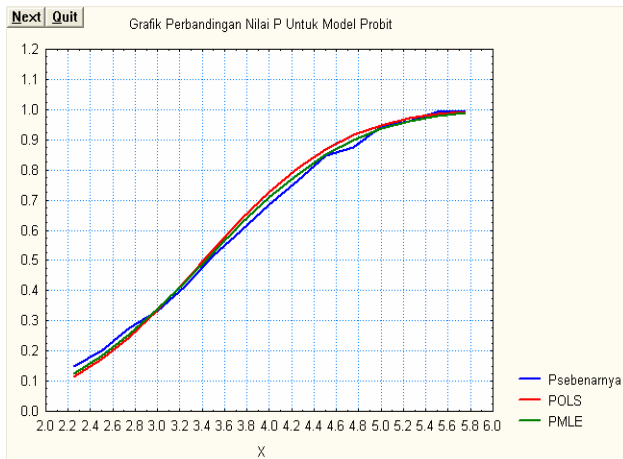
Tabel 1. Ukuran Kesalahan Model Probit Untuk Metode Kemungkinan Maksimum dan Metode Kuadrat Terkecil

Metode	RMSE	MAE	MAPE	RMSPE
<b>Kemungkinan Maksimum</b>	0.01753	0.01550	3.87582	0.5621
<b>Kuadrat Terkecil</b>	0.02688	0.02263	5.62897	0.832197

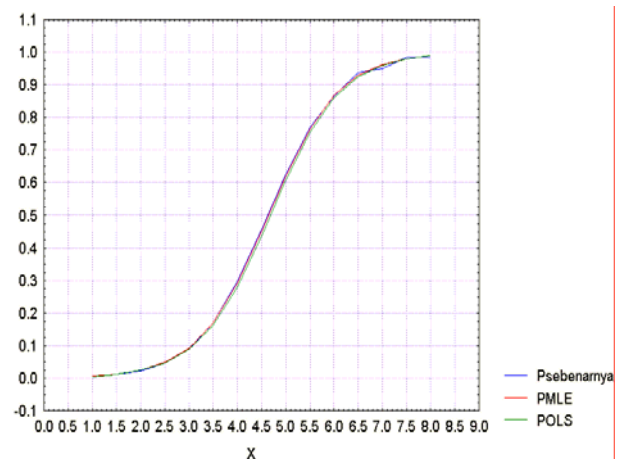
Tabel 2. Ukuran Kesalahan Model Logit Untuk Metode Kemungkinan Maksimum dan Metode Kuadrat Terkecil

Metode	RMSE	MAE	MAPE	RMSPE
<b>Kemungkinan Maksimum</b>	0.00533	0.00422	3.85306	0.64673
<b>Kuadrat Terkecil</b>	0.01015	0.00768	3.18412	0.43715

Tabel (1) dan (2) menunjukkan bahwa metode kemungkinan maksimum menghasilkan ukuran kesalahan model yang minimum. Ini menunjukkan bahwa penduga yang dihasilkan oleh metode iterasi kemungkinan maksimum lebih baik dari pada metode kuadrat terkecil karena dapat menghasilkan model yang mendekati data sebenarnya. Hal ini dapat diperjelas dari bentuk grafiknya yang ditunjukkan pada gambar (1) dan (2).



Gambar 1. Grafik Perbandingan Nilai P Untuk Model Probit



Gambar 2. Grafik Perbandingan Nilai P Untuk Model Logit

Dengan melihat ukuran kesalahan yang dihasilkan oleh metode kemungkinan maksimum dan metode kuadrat terkecil, dapat disimpulkan bahwa metode kemungkinan maksimum lebih baik dari metode kuadrat terkecil. Hal ini disebabkan karena metode kemungkinan maksimum menggunakan pendekatan metode numerik yang berupa iterasi untuk menentukan penduga, dimana setiap iterasi yang dihasilkan semakin mendekati data sebenarnya hingga tercapai konvergensi maksimum.

Sedangkan untuk metode kuadrat terkecil pendugaan dilakukan secara linier. Dari data yang ada diolah kebentuk model yang linier terhadap parameternya yaitu dengan cara menginverskan data respon sehingga diperoleh data baru, dari data baru ini selanjutnya dilakukan pendugaan. Penduga yang diperoleh dari data baru ini masih dalam bentuk data respon yang diinverskan bukan dalam data respon yang sebenarnya. Hal ini menyebabkan jarak antar respon yang diramalkan oleh model dengan respon sebenarnya menjadi semakin besar.

Setelah mengetahui bahwa metode kemungkinan maksimum lebih baik dari metode kuadrat terkecil, selanjutnya dibandingkan model probit dan logit dengan menggunakan data yang diambil dari pustaka. Dengan menggunakan metode kemungkinan maksimum diperoleh model penduga:

a. Untuk Model Probit

$$\hat{P}_i = \Phi(-4.601 + 0.918X_i)$$

b. Untuk Model Logit

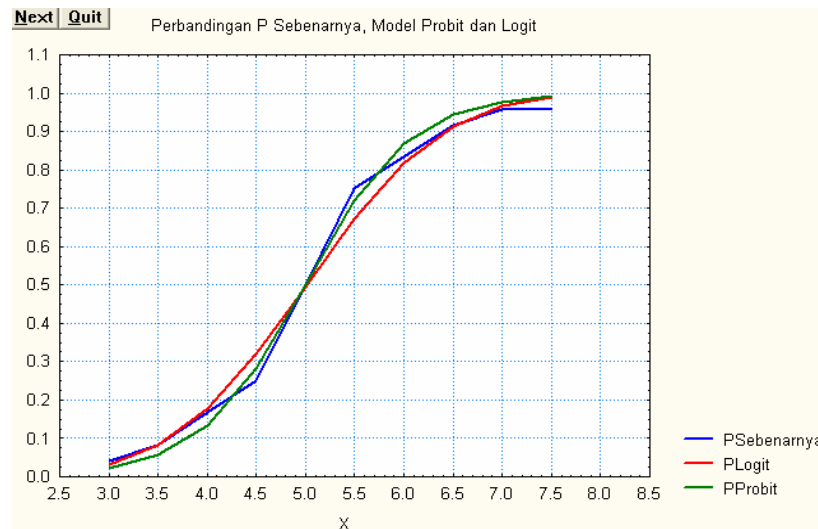
$$\hat{P}_i = [1 + \exp(9.357 - 1.873X_i)]^{-1}$$

Dari kedua model penduga di atas diperoleh hasil ukuran kesalahan model yang disajikan pada tabel 3.

Tabel 3. Hasil Ukuran Kesalahan Model Probit dan Model Logit

Model	RMSE	MAE	MAPE	RMSPE
Probit	0.0349	0.0227	7.4142	1.191196
Logit	0.0272	0.0255	12.5145	1.882775

Dari hasil ukuran kesalahan untuk kedua model, terlihat bahwa model logit memiliki RMSE yang lebih minimum dari model probit, tetapi untuk ukuran yang lain model probit lebih minimum. Ini menunjukkan bahwa kedua model memiliki kebaikan masing-masing sehingga tidak dapat disimpulkan model probit yang lebih unggul atau model logit yang lebih baik yang jelas kedua model dapat menggambarkan data untuk variabel respon yang berdistribusi tidak normal atau variabel respon yang binner hal ini dapat diperjelas dari gambar di bawah ini:



Gambar 3. Grafik Perbandingan Nilai  $P$  Sebenarnya,  $P$  Model Probit, dan  $P$  Model Logit

## 5. Kesimpulan dan Saran

Dalam menentukan penduga parameter pada model probit dan logit, metode kemungkinan maksimum lebih baik dari metode kuadrat terkecil. Hal ini dilihat dari ukuran kesalahan model yang dihasilkan dari kedua metode. Ukuran kesalahan tersebut adalah *Mean Absolute Error* (MAE), *Root Mean Square Error* (RMSE), *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE), dan *Root Mean Square Percentage Error* (RMSPE).

Selanjutnya penelitian dapat dilanjutkan untuk variable respon yang lebih dari dua kategori dan dengan menggunakan metode pendugaan yang lainnya.

## DAFTAR PUSTAKA

- Abdi, H. 2003. *Least Squares*. <http://www.utdallas.edu/~herve/Abdi-PLS-pretty.pdf>
- Agresti, A. 2007. *An Introduction to Categorical Data Analysis*. John Wiley and Sons. New York
- Cramer, J.S. 2003. *Logit Model From Economics and Other Fields*. Cambridge University Press. New York
- Fomby, T. 2008. *Scoring Measures for Prediction Problems*. <http://faculty.smu.edu/efomby/econ5385/lecture/Scoring%20Measures%20for%20Prediction%20Problems.pdf>
- Govindarajulu, Z. 1988. *Statistical Techniques in Bioassay*. Karger. New York
- Myung, I. J. 2001. *Maximum Likelihood Estimation*. <http://quantrm2.psy.ohio-state.edu/injae/mle-pub.pdf>
- Nagler, J. 1994. *Interpreting Probit Analysis*. <http://www.nyu.edu/classes/nagler/quant2/notes/probit1.pdf>

- Nengsi, Y.A. 2006. *Dekomposisi Komponen-komponen Deret Waktu Untuk Peramalan Jumlah Kedatangan Tamu Asing Ke Indonesia*. Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Bengkulu. Bengkulu
- Neter, J., et al. 2005. *Applied Linear Statistical Models*. McGraw-Hill Companies. New York
- Nugroho, S. 1995. *Teknik Statistik dalam Bioassay: Penggunaan Metode Kemungkinan Maksimum dalam Pendugaan Parameter*. Visi (2) Hal 86-99.
- Power, A. D., and Yu Xie. 1999. *Statistical Methods for Categorical Data Analysis*. New York: Academic Press
- Rusiman, M. S., et. al. 2007. *Perbandingan Teori Model Binari (Comparisons of Theoretical Binary Models)*. <http://www.fs.utm.my/matematika/images/stories/matematika/2007/2316.pdf>
- Sanchez, A D. 1983. *Differential Equations: An Introduction*. Addison Wesley. California
- Tirta, I. M. 2004. *Model Statistika Linier (Versi Elektronik)*. Jurusan Matematika Fakultas MIPA – Due Project Universitas Jember. Jember
- Walpole, R. E. and R. H. Myers. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika Untuk Insinyur dan Ilmuan*. ITB. Bandung
- Yong, B. 2003. *Penaksiran Maksimum Likelihood Bagi Model Probit dan Model Probit Bivariat*. <http://home.unpar.ac.id/~integral/Volume%208/integral%208%20No.%201/penaksiran%20maksimum%20likelihood.pdf>

# Uji Perlakuan Pengaruh Tetap Pada Rancangan Acak Kelompok Lengkap Dasar dan Rancangan Acak Kelompok Tak Lengkap Seimbang

Dyah Setyorini<sup>1</sup>, Sigit Nugroho<sup>2</sup> dan Fachri Faisal<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Alumni Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Bengkulu

<sup>2</sup>Dosen Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Bengkulu

## ABSTRACT

This research aims to study parametric and nonparametric methods for fixed treatment effect tests of Randomized Complete Block Design (RCBD) and Balanced Incomplete Block Design (BIBD), and to compare both methods. Literature study is used in this paper. Two way ANOVA  $F$ -test is a parametric method for RCBD and BIBD. As an alternative of parametric method, for RCBD, Friedman test is used. While in BIBD case, Durbin test is used. Simulation study is used to compare both methods by generating data from Normal, Gamma, Chi-Square, and Uniform Distributions. The result indicates that parametric method is better than nonparametric method for the data having Normal distribution with homogeneous of variance, otherwise, nonparametric method is better than parametric method for the data having non-Normal distribution.

*Keywords: F-Test, Friedman Test, Durbin Test*

## 1. PENDAHULUAN

Dalam merancang suatu penelitian, peneliti sering melakukan kontrol terhadap pengaruh-pengaruh tertentu seperti perlakuan, populasi atau kombinasi perlakuan pada satuan percobaan. Oleh karena itu, diperlukan suatu rancangan percobaan yang berperan penting dalam proses pengembangan dan proses menyelesaikan kesulitan guna meningkatkan penelitian.

Untuk meningkatkan ketelitian penelitian, peneliti sering menggunakan salah satu prinsip utama dalam rancangan percobaan yaitu pemblokkan (pengelompokkan). Dalam melakukan pemblokkan, informasi yang tersedia pada satuan percobaan yang memberikan pengaruh homogen pada peubah respon merupakan ketentuan-ketentuan yang berarti (Lentner & Bishop, 1986).

Pada rancangan yang dikelompokkan (*block design*), satuan percobaan yang heterogen dibagi dalam blok-blok yang homogen, kemudian pengacakan perlakuan dilakukan secara terpisah pada satuan percobaan untuk masing-masing blok. Rancangan ini dapat menambah ketelitian pada inferensia tentang pengaruh perlakuan dan disebut juga Rancangan Acak Kelompok Lengkap Dasar (Kutner *et al.*, 2005).

Rancangan Acak Kelompok Lengkap Dasar (RAKLD) dianalisa dengan metode parametrik, yaitu ANAVA dua arah yang digunakan untuk menguji hipotesis nol bahwa tidak ada perlakuan yang berbeda. Sedangkan untuk metode nonparametrik, digunakan uji Friedman yang bergantung pada peringkat pengamatan masing-masing blok dalam RAKLD (Conover, 1971).

Pada RAKLD, jika blok berisi kurang dari  $t$  satuan percobaan maka ada perlakuan yang tidak dapat diaplikasikan dalam blok, sehingga  $t$  satuan percobaan yang homogen sulit diperoleh. Pada kasus seperti ini, rancangan yang digunakan adalah Rancangan Acak Kelompok Tak Lengkap (Lentner & Bishop, 1986).

Suatu rancangan percobaan yang efektif dalam rancangan acak kelompok tak lengkap adalah Rancangan Acak Kelompok Tak Lengkap Seimbang (RAKTLS) dimana seluruh kombinasi perlakuan memiliki jumlah ulangan yang sama. RAKTLS dianalisa dengan metode parametrik yang juga digunakan untuk menguji hipotesis nol bahwa tidak ada perlakuan yang berbeda. Sedangkan metode nonparametriknya merupakan suatu uji peringkat pada RAKTLS disebut uji Durbin yang digunakan jika tidak ditemukan asumsi kenormalan pada RAKTLS (Conover, 1971).

Dalam melakukan inferensia pada RAKLD dan RAKTLS terdapat dua kondisi yang berbeda tentang pengaruh perlakuan. Pertama, jika  $t$  perlakuan dipilih oleh peneliti secara khusus, akan dilakukan inferensia tentang pengaruh perlakuan. Kesimpulan yang diperoleh dari inferensia tersebut hanya akan diaplikasikan pada  $t$  perlakuan dan tidak untuk pengaruh perlakuan yang sama lainnya. Hal ini disebut dengan uji perlakuan pengaruh tetap. Kedua, perlakuan dapat berupa sampel acak dari populasi perlakuan yang besar. Berdasarkan sampel acak tersebut akan dilakukan inferensia tentang pengaruh perlakuan. Kesimpulan yang diperoleh dari inferensia tersebut akan berlaku umum pada populasi. Hal ini disebut dengan uji perlakuan pengaruh acak (Montgomery, 1976).

Melalui studi literatur, penelitian ini akan membahas tentang kajian uji- $F$  sebagai metode parametrik, kajian uji Friedman sebagai metode nonparametrik untuk RAKLD, kajian uji Durbin sebagai metode nonparametrik untuk RAKTLS, serta kajian perbandingan antara metode parametrik dan nonparametrik untuk kedua rancangan tersebut.

## 2. LANDASAN TEORI

### 2.1 Rancangan Acak Kelompok Lengkap Dasar

Rancangan acak kelompok lengkap dasar merupakan rancangan lapangan dimana pada tiap blok (kelompok) satuan percobaan terdapat keragaman (kondisi yang membuat berbeda) yang berpengaruh pada peubah respon (Lentner & Bishop, 1986).

Pada rancangan acak kelompok lengkap dasar, setiap blok sedapat mungkin terdiri dari satuan percobaan yang homogen dan seluruh kombinasi perlakuan diberikan pada satuan percobaan secara acak untuk setiap blok. Semua perlakuan hanya ada satu kali pada setiap blok. Akibatnya, percobaan yang dilakukan secara terpisah untuk setiap blok dapat mengurangi galat percobaan dan meningkatkan ketelitian pada inferensia tentang pengaruh perlakuan (Kutner *et al.*, 2005).

Rancangan acak kelompok lengkap dasar biasanya digunakan dalam kondisi ketika satuan percobaan yang dihasilkan dalam percobaan bersifat heterogen sehingga harus dilakukan pemblokkan.

#### 2.1.1 Kelebihan dan Kelemahan dari RAKLD

Menurut Lentner dan Bishop (1986), kelebihan dari rancangan acak kelompok lengkap dasar adalah sebagai berikut:

- a. Analisa bersifat *straightforward*. Meskipun ada data hilang pada beberapa blok, analisa masih mungkin dilakukan.
- b. Rancangan acak kelompok lengkap lebih akurat daripada rancangan acak lengkap.
- c. Sensitifitas yang tinggi. Perubahan pada blok yang heterogen dikeluarkan dari galat.
- d. Fleksibel. Pada kondisi rancangan yang seimbang dan tersedianya sumber, banyaknya perlakuan dan blok tidak dibatasi.

Sedangkan kelemahan dari rancangan acak kelompok lengkap adalah:

- Jika banyaknya perlakuan besar, blok yang homogen sulit untuk dibentuk.
- Jika pengaruh blok dan perlakuan berinteraksi, RAKLD tidak dapat digunakan.

### 2.1.2 Model Linier dan Asumsi

Model linier untuk rancangan acak kelompok lengkap dasar yang terdiri dari  $t$  perlakuan dan  $r$  blok adalah sebagai berikut (Montgomery, 1976):

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}; \quad i = 1, 2, \dots, t \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (1)$$

dimana:

- $Y_{ij}$  = pengamatan pada perlakuan ke- $i$  dalam blok ke- $j$
- $\mu$  = rata-rata umum
- $\tau_i$  = pengaruh perlakuan ke- $i$
- $\beta_j$  = pengaruh blok ke- $j$
- $\varepsilon_{ij}$  = komponen galat

Agar inferensia valid, asumsi-asumsi untuk model pengaruh tetap adalah:

- $\varepsilon_{ij}$  menyebar secara bebas dan identik menurut sebaran  $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$  untuk setiap  $i, j$ .
- $\sum_i \tau_i = 0$  dan  $\sum_j \beta_j = 0$

### 2.1.3 Analisa Varian untuk Rancangan Acak Kelompok Lengkap Dasar

**Tabel 1. ANAVA untuk Rancangan Acak Kelompok Lengkap Dasar**

Sumber Keragaman	Derajat Bebas	Jumlah Kuadrat	Kuadrat Tengah	NHKT
Blok	$r - 1$	$JKB$	$KTB$	-
Perlakuan	$t - 1$	$JKP$	$KTP$	$\sigma_\varepsilon^2 + r\sigma_\tau^2$
Galat	$(r - 1)(t - 1)$	$JKG$	$KTG$	$\sigma_\varepsilon^2$
Total	$rt - 1$	$JKT$		

Sumber: Lentner & Bishop, 1986

Untuk pengujian perlakuan dengan pengaruh tetap pada taraf  $\alpha$  digunakan statistik uji:

$$F = \frac{KTP}{KTG} \quad (2)$$

Nilai  $F$  yang akan diperoleh dibandingkan dengan nilai  $F$  tabel dengan derajat bebas  $(t - 1)$  dan  $(r - 1)(t - 1)$ .

Menurut Lentner dan Bishop (1986), pendefinisian secara umum dan formula perhitungan untuk masing-masing jumlah kuadrat adalah sebagai berikut:

$$FK = \text{faktor koreksi} = \frac{Y_{..}^2}{rt} = \frac{\left( \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^r Y_{ij} \right)^2}{rt} \quad (3)$$

$$JKT = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^r (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^r Y_{ij}^2 - FK \quad (4)$$

$$JKB = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^r (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2 = \frac{1}{t} \sum_{j=1}^r Y_{.j}^2 - FK \quad (5)$$

$$JKP = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^r (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^t Y_{i.}^2 - FK \quad (6)$$

$$JKG = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^r (Y_{ij} - \bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{i.} + \bar{Y}_{..})^2 = JKT - JKB - JKP \quad (7)$$

## 2.2 Rancangan Acak Kelompok Tak Lengkap Seimbang (RAKTLS)

Menurut Yates dalam Kempthorne (1952), rancangan acak kelompok tak lengkap seimbang merupakan suatu rancangan acak kelompok tak lengkap dimana setiap pasangan perlakuan yang mungkin muncul dengan jumlah pemunculan yang sama, masing-masing blok berisi satuan-satuan percobaan dengan banyak yang sama serta setiap perlakuan muncul dengan jumlah pemunculan yang sama.

Pada rancangan acak kelompok tak lengkap seimbang, terdapat lima notasi yang akan digunakan antara lain (Conover, 1971):

$t$  = banyaknya perlakuan.

$k$  = banyaknya satuan percobaan per blok ( $k < t$ ).

$r$  = banyaknya pemunculan masing - masing perlakuan ( $r < b$ ).

$b$  = banyaknya blok.

$\lambda$  = banyaknya pasangan perlakuan yang muncul bersama dalam suatu blok.

Menurut Federer (1955), untuk  $t$  perlakuan dalam  $b$  blok yang tak lengkap, ada  $k$  satuan percobaan dengan masing-masing  $r$  pemunculan perlakuan, kondisi seimbang dipenuhi jika setiap pasangan perlakuan muncul  $\lambda$  kali secara bersamaan dalam suatu blok tak lengkap dapat dituliskan dalam persamaan berikut:

$$rt = bk \quad (8)$$

$$\lambda(t-1) = r(k-1) \quad (9)$$

Persamaan (8) menyatakan banyaknya pemunculan dari semua perlakuan dalam suatu percobaan sama dengan banyaknya satuan percobaan.

### 2.2.1 Kelebihan dan Kelemahan dari RAKTLS

Menurut Kutner *et al.*, (2005), kelebihan dari rancangan kelompok tak lengkap seimbang adalah sebagai berikut:

- a. Peneliti dimungkinkan melakukan percobaan dengan ukuran blok untuk satuan percobaan yang tersedia lebih kecil dari banyaknya perlakuan. Hal itu akan sangat membantu jika angka banyaknya perlakuan besar.
- b. Penaksiran kesamaan pengaruh perlakuan relatif sederhana.
- c. Adanya keseimbangan dalam rancangan memperbolehkan penggunaan prosedur Scheffe dan Tukey untuk analisa pengaruh perlakuan.

Sedangkan kelemahan dari rancangan kelompok tak lengkap seimbang adalah:

- a. Rancangan acak kelompok tak lengkap seimbang hanya dapat digunakan untuk nilai-nilai tertentu dari banyaknya kombinasi perlakuan, ukuran blok, dan banyaknya blok.
- b. Asumsi bahwa tidak ada interaksi antara blok dan perlakuan dibatasi.

### 2.2.2 Model Linier dan Asumsi

Menurut Lentner dan Bishop (1986), model linier untuk rancangan acak kelompok tak lengkap seimbang adalah:

$$Y_{ijg} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ijg}; \quad i = 1, 2, \dots, t \quad j = 1, 2, \dots, b \quad g = n_{ij} \quad (10)$$

dimana:

$Y_{ijg}$  = pengamatan pada perlakuan ke -  $i$  dalam blok ke -  $j$  untuk  $g$  pemunculan

$\mu$  = rata-rata umum

$\tau_i$  = pengaruh perlakuan ke -  $i$

$\beta_j$  = pengaruh blok ke -  $j$

$\varepsilon_{ijg}$  = komponen galat

$$n_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika perlakuan ke - } i \text{ muncul pada blok ke - } j \\ 0 & \text{jika perlakuan ke - } i \text{ tidak muncul pada blok ke - } j \end{cases}$$

Asumsi-asumsi yang digunakan untuk pengujian perlakuan pengaruh tetap adalah:

- $\varepsilon_{ijg}$  menyebar secara bebas dan identik menurut sebaran  $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$  untuk setiap  $i, j$ .
- $\sum_{i=1}^t \tau_i = 0$
- $\sum_{j=1}^r \beta_j = 0$

### 2.2.3 Analisa Varian untuk Rancangan Acak Kelompok Tak Lengkap Seimbang

**Tabel 2. ANAVA untuk Rancangan Acak Kelompok Tak Lengkap Seimbang**

Sumber Keragaman	Derajat Bebas	Jumlah Kuadrat	Kuadrat Tengah	NHKT
Perlakuan (Tak Terkoreksi)	$t - 1$	$JKP_{TK}$	-	-
Blok (Tak Terkoreksi)	$b - 1$	$JKB_{TK}$	-	-
Perlakuan (Terkoreksi)	$t - 1$	$JKP_K$	$KTP_K$	$\sigma_\varepsilon^2 + r\sigma_\tau^2$
Blok (Terkoreksi)	$b - 1$	$JKB_K$	$KTB_K$	$\sigma_\varepsilon^2 + \left(\frac{bk-t}{b-1}\right)\sigma_\beta^2$
Galat Intrablok	$bk - t - b + 1$	$JKG_{intra}$	$KTG_{intra}$	$\sigma_\varepsilon^2$
Total	$bk - 1$	$JK_{total}$		

Sumber: Sharma, 2008

dimana:

$$JKP_{TK} = \sum_{i=1}^t \frac{Y_{i.}^2}{r} - FK \quad (11)$$

$$JKB_{TK} = \sum_{j=1}^b \frac{Y_{.j}^2}{k} - FK \quad (12)$$

$$JK_{total} = \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^t Y_{ijg}^2 - FK \quad (13)$$

$$JKP_K = \sum_{i=1}^t \hat{\tau}_i Q_i \quad (14)$$

$$JKB_K = JKB_{TK} - \frac{\left( \sum_{i=1}^t B_i^2 - \frac{k^2 Y_{..}^2}{t} \right)}{k(r-\lambda)} + \frac{\sum_{i=1}^t W_i^2}{rt(t-k)(k-1)} \quad (15)$$

$$JKG_{intra} = JK_{total} - JKB_{TK} - JKP_K \quad (16)$$

$$Q_i = Y_{i.} - \frac{B_i}{k} \quad (17)$$

$$Y_{..} = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^b Y_{ijg} \quad (18)$$

$$FK = \frac{\left( \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^b Y_{ijg} \right)}{bk} \quad (19)$$

$$\hat{\tau}_i = \frac{kQ_i}{\lambda t} \quad (20)$$

$$W_i = (t-k)Y_{i.} - (t-1)B_i + (k-1)Y_{..} \quad (21)$$

dengan:

- $Y_{i.}$  = jumlah perlakuan ke- $i$
- $Y_{.j}$  = jumlah blok ke- $j$
- $Y_{..}$  = jumlah seluruh pengamatan
- $B_i$  = jumlah semua blok dimana perlakuan ke- $i$  muncul
- $FK$  = faktor koreksi
- $\hat{\tau}_i$  = pengaruh perlakuan ke- $i$
- $Q_i$  = jumlah perlakuan terkoreksi ke- $i$

Untuk pengujian perlakuan pada taraf  $\alpha$ , jika informasi interblok tidak diperoleh, statistik uji yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$F = \frac{KTP_K}{KTG_{intra}} \quad (22)$$

Nilai  $F$  yang akan diperoleh dibandingkan dengan nilai  $F$  tabel dengan derajat bebas  $(t-1)$  dan  $(bk-t-b+1)$ .

### 2.3 Uji Friedman

Uji Friedman merupakan metode nonparametrik yang digunakan untuk melakukan analisa varian dua arah (*two way analysis of variance*) pada rancangan acak kelompok lengkap dasar. Uji Friedman mensyaratkan tidak ada ulangan (*replication*) bagi perlakuan yang diberikan kepada satuan-satuan percobaan. Maksudnya, hanya ada tepat 1 (satu) pengamatan untuk setiap perlakuan di dalam setiap blok.

Sedangkan hipotesis yang diuji adalah sebagai berikut (Parsad, 2008):

- $H_0$  : setiap perlakuan mempunyai pengaruh yang sama.
- $H_1$  : sedikitnya ada sepasang perlakuan mempunyai pengaruh yang tidak sama.

Menurut Conover (1971), langkah-langkah dalam menghitung statistik uji adalah sebagai berikut:

1. Data pengamatan pada setiap blok diperingkatkan dari yang terkecil sampai terbesar (peringkat 1 untuk data pengamatan yang terkecil, peringkat 2 untuk data pengamatan terkecil kedua, dan seterusnya).

2. Peringkat-peringkat pada setiap blok dijumlahkan yang dinotasikan sebagai berikut:

$$R_i = \sum_{j=1}^r R(Y_{ij}) \quad (23)$$

dimana:

$R_i$  = jumlah peringkat pada perlakuan ke- $i$

$R(Y_{ij})$  = peringkat  $Y_{ij}$  dalam blok ke- $j$

3. Statistik uji dihitung dengan menggunakan rumus:

$$T = \frac{12}{rt(t+1)} \sum_{i=1}^t \left[ R_i - \frac{r(t+1)}{2} \right]^2 \quad (24)$$

Hipotesis nol ditolak pada taraf  $\alpha$ , jika statistik uji Friedman  $T > \chi_{(t-1)}^2$ .

#### 2.4 Uji Durbin

Pada tahun 1951, Durbin memperkenalkan suatu metode nonparametrik berdasarkan peringkat yang digunakan untuk menguji hipotesis nol bahwa tidak ada perbedaan antara perlakuan pada rancangan acak kelompok tak lengkap seimbang.

Pengujian hipotesis nol tentang tidak ada perbedaan antara perlakuan dalam rancangan acak kelompok tak lengkap seimbang menggunakan metode parametrik dapat dilakukan apabila memenuhi asumsi-asumsi tertentu yang telah ditetapkan. Pada saat asumsi-asumsi tersebut tidak dipenuhi, maka digunakanlah uji Durbin.

Sedangkan hipotesis yang diuji adalah sebagai berikut (Parsad, 2008):

$H_0$  : setiap perlakuan mempunyai pengaruh yang sama.

$H_1$  : sedikitnya ada sepasang perlakuan mempunyai pengaruh yang tidak sama.

Menurut Conover (1971), langkah-langkah dalam menghitung statistik uji adalah sebagai berikut:

1. Data pengamatan pada setiap blok diperingkatkan dari yang terkecil sampai terbesar (peringkat 1 untuk data pengamatan yang terkecil, peringkat 2 untuk data pengamatan terkecil kedua, dan seterusnya sampai peringkat ke- $k$  untuk data yang memiliki nilai terbesar).
2. Peringkat-peringkat pada setiap blok dijumlahkan yang dinotasikan sebagai berikut:

$$R_i = \sum_{j=1}^b R(Y_{ij}) \quad (25)$$

dimana:

$R_i$  = jumlah peringkat pada perlakuan ke- $i$

$R(Y_{ij})$  = peringkat  $Y_{ij}$  dalam blok ke- $j$

3. Statistik uji dihitung dengan menggunakan rumus:

$$T = \frac{12(t-1)}{rt(k-1)(k+1)} \sum_{i=1}^t \left[ R_i - \frac{r(k+1)}{2} \right]^2 \quad (26)$$

Hipotesis nol ditolak pada taraf  $\alpha$ , jika statistik uji Durbin  $T > \chi_{(t-1)}^2$ .

### 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

#### 3.1 Metode Parametrik untuk Uji Perlakuan Pengaruh Tetap pada RAKLD

Model linier dari RAKLD dapat dinyatakan dalam bentuk matriks, antara lain sebagai berikut (Christensen, 1987):

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{e} \quad (27)$$

dimana:

$$\mathbf{Y} = [Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{ir}]'$$

$\mathbf{X}$  = matriks rancangan

$$\boldsymbol{\beta} = [\mu, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_t, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r]'$$

$$\mathbf{e} = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \dots, \varepsilon_{ir}]'$$

Dalam mengestimasi persamaan (27), diperlukan operator proyeksi perpendikular pada  $\mathbf{C}(\mathbf{X})$ , yaitu  $\mathbf{M} = \mathbf{X}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}$ .  $\mathbf{C}(\mathbf{X})$  merupakan ruang vektor estimasi dan  $\mathbf{C}(\mathbf{X})^\perp$  merupakan ruang vektor galat, dimana  $\mathbf{I} - \mathbf{M}$  operator proyeksi perpendikular pada  $\mathbf{C}(\mathbf{X})^\perp$  (Christensen, 1987), sehingga persamaan (27) dapat dituliskan juga sebagai berikut:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{M}\mathbf{Y} + (\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Y} \quad (28)$$

dimana:

$$\mathbf{M}\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Y} = \mathbf{e}$$

Berdasarkan persamaan (28), diperoleh jumlah kuadrat total adalah sebagai berikut:

$$(\mathbf{M}\mathbf{Y})'(\mathbf{M}\mathbf{Y}) = \mathbf{Y}'\mathbf{M}'\mathbf{M}\mathbf{Y} \quad (29)$$

Karena  $\mathbf{M}$  merupakan matriks proyeksi perpendikular, maka:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}'\mathbf{M}'\mathbf{M}\mathbf{Y} &= \mathbf{Y}'\mathbf{M}\mathbf{M}\mathbf{Y} \\ &= \mathbf{Y}'\mathbf{M}\mathbf{Y} \end{aligned} \quad (30)$$

dan jumlah kuadrat galat adalah sebagai berikut:

$$((\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Y})'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Y} = \mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Y} \quad (31)$$

Karena  $\mathbf{I} - \mathbf{M}$  merupakan matriks proyeksi perpendikular, maka:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Y} &= \mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Y} \\ &= \mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Y} \end{aligned} \quad (32)$$

Menurut Christensen (1987), suatu hal yang penting dalam analisa statistik adalah memisahkan jumlah kuadrat total ( $\mathbf{Y}'\mathbf{M}\mathbf{Y}$ ). Misalkan  $\mathbf{J} = [1, 1, \dots, 1]'$  merupakan kolom pertama dari  $\mathbf{X}$ .  $\mathbf{X}_0$  merupakan matriks yang entri-entrinya merupakan entri-entri dari empat kolom pertama dari matriks  $\mathbf{X}$ , serta  $\mathbf{M}$  dan  $\mathbf{M}_0$  merupakan matriks yang bersesuaian dengan  $\mathbf{X}$  dan  $\mathbf{X}_0$ . Maka jumlah kuadrat total dapat dipisahkan menjadi tiga bagian sebagai berikut:

$$\mathbf{Y}'\mathbf{M}\mathbf{Y} = \mathbf{Y}'\frac{1}{n}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{Y} + \mathbf{Y}'(\mathbf{M} - \mathbf{M}_0)\mathbf{Y} + \mathbf{Y}'\left(\mathbf{M}_0 - \frac{1}{n}\mathbf{J}\mathbf{J}'\right)\mathbf{Y} \quad (33)$$

Dimana  $\frac{1}{n}\mathbf{J}\mathbf{J}'$ ,  $\mathbf{M} - \mathbf{M}_0$ ,  $\mathbf{M}_0 - \frac{1}{n}\mathbf{J}\mathbf{J}'$  merupakan matriks proyeksi perpendikular.

Pada Rancangan Acak Kelompok Lengkap Dasar (RAKLD), metode parametrik yang digunakan adalah ANAVA dua arah. Pengujian tentang perlakuan pengaruh tetap bahwa tidak ada perlakuan yang berbeda dapat dinyatakan dengan:

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_t$$

$$H_1 : \text{sedikitnya ada sepasang } \tau_i \neq \tau_j, \text{ dengan } i \neq j$$

Statistik uji yang digunakan adalah:

$$F = \frac{KTP}{KTG} \quad (34)$$

Dengan kata lain, hipotesis nol juga dapat dinyatakan dengan:

$$H_0 : Y_{ij} = \mu + \beta_j + \varepsilon_{ij} \text{ (model yang direduksi)}$$

$$H_1 : Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

Misalkan  $\mathbf{M}_0$  merupakan matriks proyeksi perpendikular yang bersesuaian dengan  $\mathbf{X}_0$  untuk model yang direduksi,  $\mathbf{M}$  merupakan matriks proyeksi perpendikular yang bersesuaian dengan  $\mathbf{X}$ , dimana  $\mathbf{C}(\mathbf{M}_0) \subset \mathbf{C}(\mathbf{M})$ , serta  $\mathbf{M} - \mathbf{M}_0$  merupakan matriks proyeksi perpendikular dengan  $\mathbf{C}(\mathbf{M} - \mathbf{M}_0) \subset \mathbf{C}(\mathbf{M})$ , digunakan untuk mendefinisikan jumlah kuadrat perlakuan. Maka secara matriks persamaan (34) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$F = \frac{\mathbf{Y}'(\mathbf{M} - \mathbf{M}_0)\mathbf{Y}/r(\mathbf{M} - \mathbf{M}_0)}{\mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Y}/r(\mathbf{I} - \mathbf{M})} \quad (35)$$

Diketahui bahwa:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}; i = 1, 2, \dots, t \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (36)$$

Diperoleh bahwa:

$$Y_{ij} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j} + \bar{Y}_{..} = \varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_{i.} - \bar{\varepsilon}_{.j} + \bar{\varepsilon}_{..} \quad (37)$$

Diketahui bahwa  $\varepsilon_{ij}$  menyebar secara bebas dan identik menurut sebaran  $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$  untuk semua  $i, j$ , maka:

$$Y_{ij} \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2) \text{ atau } \mathbf{Y} \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I}) \quad (38)$$

sehingga:

$$\frac{\mathbf{Y}}{\sigma} \sim N(0, \mathbf{I}) \quad (39)$$

$$\frac{\mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Y}}{\sigma^2} \sim \chi^2(r(\mathbf{I} - \mathbf{M})) \quad (40)$$

dan

$$\frac{\mathbf{Y}'(\mathbf{M} - \mathbf{M}_0)\mathbf{Y}}{\sigma^2} \sim \chi^2(r(\mathbf{M} - \mathbf{M}_0)) \quad (41)$$

$\mathbf{Y}'(\mathbf{M} - \mathbf{M}_0)\mathbf{Y}$  dan  $\mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Y}$  saling bebas, maka:

$$\frac{\mathbf{Y}'(\mathbf{M} - \mathbf{M}_0)\mathbf{Y}}{r(\mathbf{M} - \mathbf{M}_0)} \sim \chi^2(r(\mathbf{M} - \mathbf{M}_0)) \quad (42)$$

Dan

$$\frac{\mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Y}}{r(\mathbf{I} - \mathbf{M})} \sim \chi^2(r(\mathbf{I} - \mathbf{M})) \quad (43)$$

Berdasarkan definisi dari statistik uji- $F$ , maka rasio dari persamaan (42) dan persamaan (43) merupakan statistik uji- $F$ .

### 3.2 Metode Nonparametrik untuk Uji Perlakuan Pengaruh Tetap pada RAKLD

Berdasarkan Teorema Limit Pusat:

$$\frac{R_i - E[R_i]}{\sqrt{\text{var}[R_i]}} \sim N(0,1) \quad (43)$$

sehingga:

$$\frac{(R_i - E[R_i])^2}{\text{var}[R_i]} \sim \chi^2_{(1)} \quad (44)$$

Jika  $R_i$  saling bebas maka:

$$T' = \sum_{i=1}^t \frac{(R_i - E[R_i])^2}{\text{var}[R_i]} \sim \chi^2_{(t)} \quad (45)$$

Akan tetapi  $R_i$  tidak saling bebas, karena jumlahnya tetap, yaitu:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^t R_i &= \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^r R(Y_{ij}) \\ &= \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^t R(Y_{ij}) \\ &= \sum_{j=1}^r \frac{t(t+1)}{2} \\ &= \frac{rt(t+1)}{2} \end{aligned} \quad (46)$$

Karena dengan mengetahui  $t-1$  dari  $R_i$  saja sudah dapat diketahui nilai dari  $R_i$  lainnya, maka Friedman mengusulkan agar kedua ruas dari persamaan (45) dikalikan dengan  $\frac{t-1}{t}$  sehingga:

$$\begin{aligned} T &= \frac{t-1}{t} T' \\ &= \frac{t-1}{t} \sum_{i=1}^t \frac{(R_i - E[R_i])^2}{\text{var}[R_i]} \\ &= \frac{t-1}{t} \sum_{i=1}^t \frac{\left(R_i - \frac{r(t+1)}{2}\right)^2}{\frac{r(t+1)(t-1)}{12}} \\ &= \frac{t-1}{t} \cdot \frac{12}{r(t+1)(t-1)} \sum_{i=1}^t \left(R_i - \frac{r(t+1)}{2}\right)^2 \\ &= \frac{12}{rt(t+1)} \sum_{i=1}^t R_i^2 - 3r(t+1) \end{aligned} \quad (47)$$

Hasil akhir dari persamaan (3.37) merupakan statistik uji Friedman yang dinotasikan dengan  $T$ .

### 3.3 Kajian Perbandingan Metode Parametrik dan Nonparametrik pada RAKLD

Untuk kajian perbandingan metode parametrik dan nonparametrik ini dilakukan simulasi data dengan menggunakan program Microsoft Excel. Ada dua jenis data yang digunakan, yaitu data yang memiliki sebaran Normal (1000 simulasi) dan

tidak memiliki sebaran Normal, antara lain: 1000 simulasi data untuk sebaran Gamma dan Kai-Kuadrat serta 894 simulasi data dengan sebaran Seragam.

**Tabel 3. Perbandingan Hasil Analisis Uji-*F* dan Uji Friedman**

Sebaran	Varian Antar Perlakuan	
	Homogen	Heterogen
Normal	53	201
Gamma	14	35
Kai-Kuadrat	202	100
Seragam	53	201

Berdasarkan 1000 simulasi pada data yang memiliki sebaran Normal, menghasilkan bahwa untuk data yang mempunyai varian yang homogen, terdapat 53 kesimpulan dari uji Friedman yang tidak mengikuti uji-*F*. Hal itu menunjukkan bahwa uji-*F* lebih baik daripada uji Friedman dalam pengujian perlakuan pengaruh tetap pada RAKLD untuk data yang memiliki sebaran Normal dengan varian yang homogen. Sedangkan untuk varian yang heterogen, terdapat 201 kesimpulan yang dihasilkan uji Friedman yang tidak mengikuti uji-*F*. Hal itu menunjukkan bahwa uji Friedman lebih baik daripada uji-*F* dalam pengujian perlakuan pengaruh tetap pada RAKLD untuk data yang memiliki sebaran Normal dengan varian yang heterogen.

Simulasi data dilakukan sebanyak 1000 kali pada data yang memiliki sebaran Gamma, dihasilkan 14 kesimpulan dari uji-*F* yang tidak mengikuti uji Friedman untuk data yang mempunyai varian yang homogen. Hal itu menunjukkan bahwa uji Friedman lebih baik daripada uji-*F* dalam pengujian perlakuan pengaruh tetap pada RAKLD untuk data yang memiliki sebaran Gamma dengan varian yang homogen. Sedangkan untuk varian yang heterogen, terdapat 35 kesimpulan yang dihasilkan uji-*F* yang tidak mengikuti uji Friedman. Hal itu menunjukkan bahwa uji Friedman lebih baik daripada uji-*F* dalam pengujian perlakuan pengaruh tetap pada RAKLD untuk data yang memiliki sebaran Gamma dengan varian yang heterogen.

Dari 1000 simulasi data yang memiliki sebaran Kai-Kuadrat, diperoleh 202 kesimpulan dari uji-*F* yang tidak mengikuti uji Friedman untuk data yang mempunyai varian yang homogen. Hal itu menunjukkan bahwa uji Friedman lebih baik daripada uji-*F* dalam pengujian perlakuan pengaruh tetap pada RAKLD untuk data yang memiliki sebaran Kai-Kuadrat dengan varian yang homogen. Sedangkan untuk varian yang heterogen, terdapat 100 kesimpulan yang dihasilkan uji-*F* yang tidak mengikuti uji Friedman. Hal itu menunjukkan bahwa uji Friedman lebih baik daripada uji-*F* dalam pengujian perlakuan pengaruh tetap pada RAKLD untuk data yang memiliki sebaran Kai-Kuadrat dengan varian yang heterogen.

Selanjutnya, melalui 894 simulasi pada data yang memiliki sebaran Seragam, diperoleh 53 kesimpulan dari uji-*F* yang tidak mengikuti uji Friedman untuk data yang mempunyai varian yang homogen. Hal itu menunjukkan bahwa uji Friedman tetap lebih baik daripada uji-*F* dalam pengujian perlakuan pengaruh tetap pada RAKLD untuk data yang memiliki sebaran Seragam dengan varian yang homogen. Sedangkan untuk varian yang heterogen, terdapat 201 kesimpulan yang dihasilkan uji-*F* yang tidak mengikuti uji Friedman. Hal itu menunjukkan bahwa uji Friedman lebih baik daripada uji-*F* dalam pengujian perlakuan pengaruh tetap pada RAKLD untuk data yang memiliki sebaran Gamma dengan varian yang heterogen.

### 3.4 Metode Parametrik untuk Uji Perlakuan Pengaruh Tetap pada RAKTLS

Model linier dari RAKTLS dapat dinyatakan dalam bentuk matriks, yaitu:

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{Z}, \mathbf{X}] \begin{bmatrix} \tau \\ \beta \end{bmatrix} + \mathbf{e} \quad (48)$$

dimana:

$\mathbf{Y}$  = pengamatan pada perlakuan ke- $i$  dalam blok ke- $j$  untuk  $g$  pemunculan

$\mathbf{Z}$  = vektor kolom untuk perlakuan

$\mathbf{X}$  = matriks rancangan

$$\beta' = [\mu, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_b]$$

$$\tau' = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_t]$$

$$\mathbf{e} = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \dots, \varepsilon_{tr}]'$$

Model linier dari RAKTLS dalam bentuk matriks dapat membantu dalam mengkaji statistik uji yang digunakan dalam metode parametrik.

Pada RAKTLS, pengujian tentang perlakuan pengaruh tetap bahwa tidak ada perlakuan yang berbeda dapat dinyatakan dengan:

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_t$$

$$H_1 : \text{sedikitnya ada sepasang } \tau_i \neq \tau_j, \text{ dengan } i \neq j$$

Secara aljabar, statistik uji yang digunakan adalah:

$$F = \frac{KTP_K}{KTG_{intra}} \quad (49)$$

Misalkan  $\hat{\tau}_i$  merupakan pengaruh perlakuan ke- $i$  dan  $Q_i$  merupakan jumlah perlakuan terkoreksi ke- $i$ , maka Kuadrat Tengah Perlakuan Terkoreksi ( $KTP_K$ ) dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} KTP_K &= \frac{JKP_K}{t-1} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^t \hat{\tau}_i Q_i}{t-1} \\ &= \frac{\left( \sum_{i=1}^t \left( \frac{k}{\lambda t} Q_i \right) Q_i \right)}{t-1} \\ &= \frac{k \sum_{i=1}^t Q_i^2}{\lambda t (t-1)} \end{aligned} \quad (50)$$

Sedangkan Kuadrat Tengah Galat Intrablok ( $KTG_{intra}$ ) dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} KTG_{intra} &= \frac{JKG_{intra}}{bk - t - b + 1} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^b \sum_g (Y_{ijg} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...})^2}{bk - t - b + 1} \end{aligned} \quad (51)$$

Statistik uji yang digunakan tersebut akan dikaji secara matriks. Oleh karena itu, menurut Christensen (1987), diperlukan  $\mathbf{Y}'(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{Z}$  yang merupakan jumlah perlakuan terkoreksi ke- $i$ .

Misalkan  $\mathbf{W}$  merupakan matriks proyeksi perpendikular yang didefinisikan oleh

$$\mathbf{W} = \mathbf{I} - \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \mathbf{J}'_t \quad (52)$$

Diketahui bahwa:

$$\begin{aligned} r(k-1) &= \lambda(t-1) \\ r(k-1) + \lambda &= \lambda t \end{aligned} \quad (53)$$

Maka:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}'(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{Z} &= k^{-1} \left[ (r(k-1) + \lambda)\mathbf{I} - \lambda\mathbf{J}'_t \right] \\ &= k^{-1} \left[ \lambda t\mathbf{I} - \lambda\mathbf{J}'_t \right] \\ &= \frac{\lambda}{k} \left[ t\mathbf{I} - \mathbf{J}'_t \right] \\ &= \frac{\lambda t}{k} \left[ \mathbf{I} - \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \mathbf{J}'_t \right] \\ &= \frac{\lambda t}{k} \mathbf{W} \end{aligned} \quad (54)$$

Karena  $\mathbf{W}$  merupakan matriks proyeksi perpendikular, maka:

$$[\mathbf{Z}'(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{Z}]^{-1} = \frac{k}{\lambda t} \mathbf{W} \quad (55)$$

Selanjutnya akan ditentukan vektor  $\mathbf{Y}'(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{Z}$  yang berukuran  $1 \times t$ . Vektor  $(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{Y}$  mempunyai entri-entri  $(Y_{ij} - \bar{Y}_{.j})$ , sehingga:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}'(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{Z}_m &= \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^b (Y_{ij} - \bar{Y}_{.j}) z_{ij,m} \\ &= \sum_{i=1}^t \sum_{j \in A_i} Y_{ij} z_{ij,m} - \sum_{i=1}^t \sum_{j \in A_i} \bar{Y}_{.j} z_{ij,m} \\ &= \sum_{j \in A_i} Y_{jm} - \sum_{j \in A_i} \bar{Y}_{.j} \\ &= \sum_{j \in A_i} (Y_{jm} - \bar{Y}_{.j}) \end{aligned} \quad (56)$$

Definisikan:

$$Q_m = \sum_{j \in A_i} (Y_{jm} - \bar{Y}_{.j}) \quad (57)$$

Maka:

$$\mathbf{Y}'(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{Z} = [Q_1, Q_2, \dots, Q_t] \quad (58)$$

Karena  $\mathbf{Z}$  mempunyai kolom yang entri-entrinya terdiri dari 1 dan 0, maka:

$$\mathbf{Z}\mathbf{J}'_t = \mathbf{J}'_n \quad (59)$$

Oleh karena itu,

$$\mathbf{0} = (\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{J}'_n = (\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{Z}\mathbf{J}'_t \quad (60)$$

Berdasarkan persamaan-persamaan diatas, selanjutnya dapat diperoleh:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Z}[\mathbf{Z}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Z}]^{-1} &= (\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Z}\left(\frac{k}{\lambda t}\right)\mathbf{W} \\
 &= \left(\frac{k}{\lambda t}\right)(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Z}\left(\mathbf{I} - \left(\frac{1}{t}\right)\mathbf{J}'_t\right) \\
 &= \left(\frac{k}{\lambda t}\right)\left[(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Z} - \left(\frac{1}{t}\right)(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Z}\mathbf{J}'_t\right] \\
 &= \frac{k}{\lambda t}(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Z}
 \end{aligned} \tag{61}$$

Sehingga Jumlah Kuadrat Perlakuan Terkoreksi adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 JKP_K &= \mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Z}[\mathbf{Z}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Z}]^{-1}\mathbf{Z}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Y} \\
 &= \frac{k}{\lambda t}[\mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Z}\mathbf{Z}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Y}] \\
 &= \frac{k}{\lambda t}[\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_t][\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_t]' \\
 &= \frac{k}{\lambda t} \sum_{i=1}^t Q_i^2
 \end{aligned} \tag{62}$$

Sedangkan jumlah kuadrat galat intrablok adalah:

$$\begin{aligned}
 JKG_{intra} &= \mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Y} - \mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Z}[\mathbf{Z}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Z}]^{-1}\mathbf{Z}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Y} \\
 &= \mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Y} - \left(\frac{k}{\lambda t}\right)\mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Z}\mathbf{Z}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Y}
 \end{aligned} \tag{63}$$

Misalkan  $\mathbf{P}$  merupakan matriks proyeksi perpendikular yang didefinisikan dengan:

$$\mathbf{P} = \mathbf{M} + \left(\frac{k}{\lambda t}\right)\mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Z}\mathbf{Z}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Y} \tag{64}$$

Maka:

$$JKG_{intra} = \mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{Y} \tag{65}$$

Berdasarkan persamaan (3.23) dan (3.24), diperoleh bahwa:

$$\begin{aligned}
 JKP_K &\sim \chi^2(r(\mathbf{X}, \mathbf{Z})) \\
 \frac{JKP_K}{r(\mathbf{X}, \mathbf{Z})} &\sim \chi^2(r(\mathbf{X}, \mathbf{Z}))
 \end{aligned} \tag{66}$$

dan

$$\begin{aligned}
 JKG_{intra} &\sim \chi^2(n - r(\mathbf{X}, \mathbf{Z})) \\
 \frac{JKG_{intra}}{n - r(\mathbf{X}, \mathbf{Z})} &\sim \chi^2(n - r(\mathbf{X}, \mathbf{Z}))
 \end{aligned} \tag{67}$$

Dimana  $r(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$  merupakan rank dari matriks  $(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$  dan  $n$  merupakan banyaknya pengamatan.

Berdasarkan definisi statistik uji- $F$ , rasio dari persamaan (66) dan (67) merupakan statistik uji  $F$ .

### 3.5 Metode Nonparametrik untuk Uji Perlakuan Pengaruh Tetap pada RAKTLS

Jika banyaknya pemunculan dari masing-masing perlakuan  $r$  bernilai besar, maka berdasarkan Teorema Limit Pusat, jumlah peringkat pada perlakuan ke- $i$ ,  $R_i$ , menyebar menurut sebaran Normal. Untuk itu,

$$\frac{R_i - E[R_i]}{\sqrt{\text{var}[R_i]}} \sim N(0,1) \quad (68)$$

dimana:

$$R_i = \sum_{j=1}^b R(Y_{ij}) \quad (69)$$

sehingga:

$$\frac{(R_i - E[R_i])^2}{\text{var}[R_i]} \sim \chi_{(1)}^2 \quad (70)$$

Jika  $R_i$  saling bebas maka:

$$T' = \sum_{i=1}^t \frac{(R_i - E[R_i])^2}{\text{var}[R_i]} \sim \chi_{(t)}^2 \quad (71)$$

Sehingga jika kedua ruas dikali dengan  $\frac{t-1}{t}$ , diperoleh:

$$\begin{aligned} T &= \frac{t-1}{t} T' \\ &= \frac{t-1}{t} \sum_{i=1}^t \frac{(R_i - E[R_i])^2}{\text{var}[R_i]} \\ &= \frac{t-1}{t} \sum_{i=1}^t \frac{\left( R_i - \frac{r(k+1)}{2} \right)^2}{r(k+1)(k-1)} \\ &= \frac{12(t-1)}{rt(k+1)(k-1)} \sum_{i=1}^t \left( R_i^2 - r(k+1)R_i + \frac{r^2(k+1)^2}{4} \right) \\ &= \frac{12(t-1)}{rt(k+1)(k-1)} \sum_{i=1}^t R_i^2 - \frac{3r(t-1)(k+1)}{k-1} \end{aligned} \quad (72)$$

Hasil akhir dari persamaan (72) merupakan statistik uji Durbin

### 3.6 Kajian Perbandingan Metode Parametrik dan Nonparametrik pada RAKTLS

Untuk kajian perbandingan metode parametrik dan nonparametrik ini dilakukan simulasi data dengan menggunakan program Microsoft Excel. Ada dua jenis data yang digunakan, yaitu data yang memiliki sebaran Normal (1000 simulasi) dan tidak memiliki sebaran Normal, antara lain: 1000 simulasi data untuk sebaran Gamma dan Kai-Kuadrat serta 825 simulasi data dengan sebaran Seragam.

**Tabel 4. Perbandingan Hasil Analisis Uji- $F$  dan Uji Durbin**

Sebaran	Varian Antar Perlakuan	
	Homogen	Heterogen
Normal	127	743
Gamma	6	993
Kai-Kuadrat	96	672
Seragam	16	657

Berdasarkan 1000 simulasi pada data yang memiliki sebaran Normal, terdapat 127 kesimpulan yang dihasilkan uji Friedman yang tidak mengikuti uji- $F$  untuk data yang mempunyai varian yang homogen Hal itu menunjukkan bahwa uji- $F$  lebih baik daripada uji Friedman dalam pengujian perlakuan pengaruh tetap pada RAKTLS untuk data yang memiliki sebaran Normal dengan varian yang homogen. Sedangkan untuk varian yang heterogen, terdapat 743 kesimpulan yang dihasilkan uji Friedman yang tidak mengikuti uji- $F$ . Hal itu menunjukkan bahwa uji Friedman lebih baik daripada uji- $F$  dalam pengujian perlakuan pengaruh tetap pada RAKTLS untuk data yang memiliki sebaran Normal dengan varian yang heterogen.

Simulasi data dilakukan sebanyak 1000 kali pada data yang memiliki sebaran Gamma, terdapat 6 kesimpulan yang dihasilkan uji- $F$  yang tidak mengikuti uji Friedman. Hal itu menunjukkan bahwa uji Friedman lebih baik daripada uji- $F$  dalam pengujian perlakuan pengaruh tetap pada RAKTLS untuk data yang memiliki sebaran Gamma dengan varian yang homogen. Sedangkan untuk varian yang heterogen, terdapat 993 kesimpulan yang dihasilkan uji- $F$  yang tidak mengikuti uji Friedman. Hal itu menunjukkan bahwa uji Friedman lebih baik daripada uji- $F$  dalam pengujian perlakuan pengaruh tetap pada RAKTLS untuk data yang memiliki sebaran Gamma dengan varian yang heterogen.

Dari 1000 simulasi pada data yang memiliki sebaran Kai-Kuadrat, terdapat 96 kesimpulan dari uji- $F$  yang tidak mengikuti uji Friedman untuk data yang mempunyai varian yang homogen. Hal itu menunjukkan bahwa uji Friedman lebih baik daripada uji- $F$  dalam pengujian perlakuan pengaruh tetap pada RAKTLS untuk data yang memiliki sebaran Kai-Kuadrat dengan varian yang homogen. Sedangkan untuk varian yang heterogen, terdapat 672 kesimpulan yang dihasilkan uji- $F$  yang tidak mengikuti uji Friedman. Hal itu menunjukkan bahwa uji Friedman lebih baik daripada uji- $F$  dalam pengujian perlakuan pengaruh tetap pada RAKTLS untuk data yang memiliki sebaran Kai-Kuadrat dengan varian yang heterogen.

Selanjutnya, melalui 825 simulasi pada data yang memiliki sebaran Seragam, dihasilkan 16 kesimpulan dari uji- $F$  yang tidak mengikuti uji Friedman untuk data yang mempunyai varian yang homogen. Hal itu menunjukkan bahwa uji Friedman tetap lebih baik daripada uji- $F$  dalam pengujian perlakuan pengaruh tetap pada RAKTLS untuk data yang memiliki sebaran Seragam dengan varian yang homogen. Sedangkan untuk varian yang heterogen, terdapat 657 kesimpulan yang dihasilkan uji- $F$  yang tidak mengikuti uji Friedman. Hal itu menunjukkan bahwa uji Friedman lebih baik daripada uji- $F$  dalam pengujian perlakuan pengaruh tetap pada RAKTLS untuk data yang memiliki sebaran Gamma dengan varian yang heterogen.

## 4. KESIMPULAN DAN SARAN

### 4.1 Kesimpulan

- Uji- $F$  digunakan sebagai metode parametrik untuk uji perlakuan pengaruh tetap pada RAKLD dan RAKTLS karena Kuadrat Tengah Perlakuan, Kuadrat Tengah Perlakuan Terkoreksi, Kuadrat Tengah Galat, dan Kuadrat Tengah Galat Intrablok memiliki sebaran Kai-Kuadrat.
- Statistik uji Friedman dan statistik uji Durbin merupakan metode nonparametrik yang digunakan pada RAKLD dan RAKTLS apabila asumsi kenormalan untuk melakukan uji- $F$  (metode parametrik) tidak dipenuhi.
- Untuk data pengamatan pada RAKLD dan RAKTLS yang memiliki sebaran Normal dengan varian antar perlakuan bersifat homogen, uji- $F$  (metode parametrik) lebih baik daripada uji Friedman dan uji Durbin (metode nonparametrik). Sebaliknya, jika varian antar perlakuan bersifat heterogen, maka metode nonparametrik lebih baik daripada metode parametrik.
- Untuk data pengamatan pada RAKLD dan RAKTLS yang memiliki sebaran tidak Normal dengan varian antar perlakuan bersifat homogen dan heterogen, metode nonparametrik lebih baik daripada metode parametrik.

### 4.2 Saran

Sebaiknya dilakukan juga kajian perbandingan metode parametrik dan metode nonparametrik untuk rancangan percobaan lainnya, seperti Rancangan Acak Lengkap. Serta dapat juga melakukan analisis pada Rancangan Acak Kelompok Tak Lengkap Seimbang apabila terdapat data hilang.

## DAFTAR PUSTAKA

- Box, George E. P., *et al.* 1978. *Statistics for Experimenters: An Introduction to Design, Data Analysis, and Model Building*. John Wiley and Sons. USA.
- Christensen, R. 1987. *Plane Answers to Complex Questions: The Theory of Linear Models*. Springer-Verlag. New York
- Cochran, W. G., and G. M. Cox. 1957. *Experimental Design*. John Wiley and Sons. Canada.
- Conover, W. J. 1971. *Practical Nonparametric Statistics*. John Wiley and Sons. New York.
- Daniel, W. W. 1978. *Statistik Nonparametrik Terapan*. Diterjemahkan oleh Alex Tri Kantjono W. Gramedia. Jakarta.
- Federer, W. T. 1955. *Experimental Design: Theory and Application*. The Macmillan Company. New York.
- Hill Jr., R. O. 1986. *Elementary Linear Algebra*. Academic Press. Florida.
- Kempthorne, O. 1955. *The Design and Analysis of Experiments*. John Wiley and Sons. Canada.
- Kutner, M. H., *et al.* 2005. *Applied Linear Statistical Models*. McGraw-Hill/Irwin. New York.
- Lentner, M. and T. Bishop. 1986. *Experimental Design and Analysis*. Valey Book Company. Blacksburg.
- Montgomery, D. C. 1976. *Design and Analysis of Experiments*. John Wiley and Sons. Canada
- Nugroho, S. 2008. *Statistika Matematika*. Dalam Proses Penerbitan.
- Parsad, R. 2008. *Nonparametric Methods in Analysis of Experimental Data*.  
<http://www.iasri.res.in/iasriwebsite/DESIGNOFEXPAPPLICATION/Electronic-Books/Modules/27Nonparametric%20procedure.pdf>

- Sharma, V.K. 2008. *Balanced Incomplete Block Designs*.  
<http://www.iasri.res.in/iasriwebsite/DESIGNOFEXPAPPLICATION/Electronic-Book/Module%202/2BIBD.pdf>
- Siegel, S., and J. Castellan, Jr. 1988. *Nonparametric Statistics for the Behavioral Sciences*. McGraw-Hill International Edition. Singapore.

# Uji Perlakuan Pengaruh Tetap Pada Rancangan Acak Kelompok Lengkap Dasar dan Rancangan Acak Kelompok Tak Lengkap Seimbang

Dyah Setyorini<sup>1</sup>, Sigit Nugroho<sup>2</sup> dan Fachri Faisal<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Alumni Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Bengkulu

<sup>2</sup>Dosen Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Bengkulu

## ABSTRACT

This research aims to study parametric and nonparametric methods for fixed treatment effect tests of Randomized Complete Block Design (RCBD) and Balanced Incomplete Block Design (BIBD), and to compare both methods. Literature study is used in this paper. Two way ANOVA  $F$ -test is a parametric method for RCBD and BIBD. As an alternative of parametric method, for RCBD, Friedman test is used. While in BIBD case, Durbin test is used. Simulation study is used to compare both methods by generating data from Normal, Gamma, Chi-Square, and Uniform Distributions. The result indicates that parametric method is better than nonparametric method for the data having Normal distribution with homogeneous of variance, otherwise, nonparametric method is better than parametric method for the data having non-Normal distribution.

*Keywords: F-Test, Friedman Test, Durbin Test*

## 1. PENDAHULUAN

Dalam merancang suatu penelitian, peneliti sering melakukan kontrol terhadap pengaruh-pengaruh tertentu seperti perlakuan, populasi atau kombinasi perlakuan pada satuan percobaan. Oleh karena itu, diperlukan suatu rancangan percobaan yang berperan penting dalam proses pengembangan dan proses menyelesaikan kesulitan guna meningkatkan penelitian.

Untuk meningkatkan ketelitian penelitian, peneliti sering menggunakan salah satu prinsip utama dalam rancangan percobaan yaitu pemblokkan (pengelompokkan). Dalam melakukan pemblokkan, informasi yang tersedia pada satuan percobaan yang memberikan pengaruh homogen pada peubah respon merupakan ketentuan-ketentuan yang berarti (Lentner & Bishop, 1986).

Pada rancangan yang dikelompokkan (*block design*), satuan percobaan yang heterogen dibagi dalam blok-blok yang homogen, kemudian pengacakan perlakuan dilakukan secara terpisah pada satuan percobaan untuk masing-masing blok. Rancangan ini dapat menambah ketelitian pada inferensia tentang pengaruh perlakuan dan disebut juga Rancangan Acak Kelompok Lengkap Dasar (Kutner *et al.*, 2005).

Rancangan Acak Kelompok Lengkap Dasar (RAKLD) dianalisa dengan metode parametrik, yaitu ANAVA dua arah yang digunakan untuk menguji hipotesis nol bahwa tidak ada perlakuan yang berbeda. Sedangkan untuk metode nonparametrik, digunakan uji Friedman yang bergantung pada peringkat pengamatan masing-masing blok dalam RAKLD (Conover, 1971).

Pada RAKLD, jika blok berisi kurang dari  $t$  satuan percobaan maka ada perlakuan yang tidak dapat diaplikasikan dalam blok, sehingga  $t$  satuan percobaan yang homogen sulit diperoleh. Pada kasus seperti ini, rancangan yang digunakan adalah Rancangan Acak Kelompok Tak Lengkap (Lentner & Bishop, 1986).

Suatu rancangan percobaan yang efektif dalam rancangan acak kelompok tak lengkap adalah Rancangan Acak Kelompok Tak Lengkap Seimbang (RAKTLS) dimana seluruh kombinasi perlakuan memiliki jumlah ulangan yang sama. RAKTLS dianalisa dengan metode parametrik yang juga digunakan untuk menguji hipotesis nol bahwa tidak ada perlakuan yang berbeda. Sedangkan metode nonparametriknya merupakan suatu uji peringkat pada RAKTLS disebut uji Durbin yang digunakan jika tidak ditemukan asumsi kenormalan pada RAKTLS (Conover, 1971).

Dalam melakukan inferensia pada RAKLD dan RAKTLS terdapat dua kondisi yang berbeda tentang pengaruh perlakuan. Pertama, jika  $t$  perlakuan dipilih oleh peneliti secara khusus, akan dilakukan inferensia tentang pengaruh perlakuan. Kesimpulan yang diperoleh dari inferensia tersebut hanya akan diaplikasikan pada  $t$  perlakuan dan tidak untuk pengaruh perlakuan yang sama lainnya. Hal ini disebut dengan uji perlakuan pengaruh tetap. Kedua, perlakuan dapat berupa sampel acak dari populasi perlakuan yang besar. Berdasarkan sampel acak tersebut akan dilakukan inferensia tentang pengaruh perlakuan. Kesimpulan yang diperoleh dari inferensia tersebut akan berlaku umum pada populasi. Hal ini disebut dengan uji perlakuan pengaruh acak (Montgomery, 1976).

Melalui studi literatur, penelitian ini akan membahas tentang kajian uji- $F$  sebagai metode parametrik, kajian uji Friedman sebagai metode nonparametrik untuk RAKLD, kajian uji Durbin sebagai metode nonparametrik untuk RAKTLS, serta kajian perbandingan antara metode parametrik dan nonparametrik untuk kedua rancangan tersebut.

## 2. LANDASAN TEORI

### 2.1 Rancangan Acak Kelompok Lengkap Dasar

Rancangan acak kelompok lengkap dasar merupakan rancangan lapangan dimana pada tiap blok (kelompok) satuan percobaan terdapat keragaman (kondisi yang membuat berbeda) yang berpengaruh pada peubah respon (Lentner & Bishop, 1986).

Pada rancangan acak kelompok lengkap dasar, setiap blok sedapat mungkin terdiri dari satuan percobaan yang homogen dan seluruh kombinasi perlakuan diberikan pada satuan percobaan secara acak untuk setiap blok. Semua perlakuan hanya ada satu kali pada setiap blok. Akibatnya, percobaan yang dilakukan secara terpisah untuk setiap blok dapat mengurangi galat percobaan dan meningkatkan ketelitian pada inferensia tentang pengaruh perlakuan (Kutner *et al.*, 2005).

Rancangan acak kelompok lengkap dasar biasanya digunakan dalam kondisi ketika satuan percobaan yang dihasilkan dalam percobaan bersifat heterogen sehingga harus dilakukan pemblokkan.

#### 2.1.1 Kelebihan dan Kelemahan dari RAKLD

Menurut Lentner dan Bishop (1986), kelebihan dari rancangan acak kelompok lengkap dasar adalah sebagai berikut:

- a. Analisa bersifat *straightforward*. Meskipun ada data hilang pada beberapa blok, analisa masih mungkin dilakukan.
- b. Rancangan acak kelompok lengkap lebih akurat daripada rancangan acak lengkap.
- c. Sensitifitas yang tinggi. Perubahan pada blok yang heterogen dikeluarkan dari galat.
- d. Fleksibel. Pada kondisi rancangan yang seimbang dan tersedianya sumber, banyaknya perlakuan dan blok tidak dibatasi.

Sedangkan kelemahan dari rancangan acak kelompok lengkap adalah:

- Jika banyaknya perlakuan besar, blok yang homogen sulit untuk dibentuk.
- Jika pengaruh blok dan perlakuan berinteraksi, RAKLD tidak dapat digunakan.

### 2.1.2 Model Linier dan Asumsi

Model linier untuk rancangan acak kelompok lengkap dasar yang terdiri dari  $t$  perlakuan dan  $r$  blok adalah sebagai berikut (Montgomery, 1976):

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}; \quad i = 1, 2, \dots, t \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (1)$$

dimana:

- $Y_{ij}$  = pengamatan pada perlakuan ke- $i$  dalam blok ke- $j$
- $\mu$  = rata-rata umum
- $\tau_i$  = pengaruh perlakuan ke- $i$
- $\beta_j$  = pengaruh blok ke- $j$
- $\varepsilon_{ij}$  = komponen galat

Agar inferensia valid, asumsi-asumsi untuk model pengaruh tetap adalah:

- $\varepsilon_{ij}$  menyebar secara bebas dan identik menurut sebaran  $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$  untuk setiap  $i, j$ .
- $\sum_i \tau_i = 0$  dan  $\sum_j \beta_j = 0$

### 2.1.3 Analisa Varian untuk Rancangan Acak Kelompok Lengkap Dasar

**Tabel 1. ANAVA untuk Rancangan Acak Kelompok Lengkap Dasar**

Sumber Keragaman	Derajat Bebas	Jumlah Kuadrat	Kuadrat Tengah	NHKT
Blok	$r - 1$	$JKB$	$KTB$	-
Perlakuan	$t - 1$	$JKP$	$KTP$	$\sigma_\varepsilon^2 + r\sigma_\tau^2$
Galat	$(r - 1)(t - 1)$	$JKG$	$KTG$	$\sigma_\varepsilon^2$
Total	$rt - 1$	$JKT$		

Sumber: Lentner & Bishop, 1986

Untuk pengujian perlakuan dengan pengaruh tetap pada taraf  $\alpha$  digunakan statistik uji:

$$F = \frac{KTP}{KTG} \quad (2)$$

Nilai  $F$  yang akan diperoleh dibandingkan dengan nilai  $F$  tabel dengan derajat bebas  $(t - 1)$  dan  $(r - 1)(t - 1)$ .

Menurut Lentner dan Bishop (1986), pendefinisian secara umum dan formula perhitungan untuk masing-masing jumlah kuadrat adalah sebagai berikut:

$$FK = \text{faktor koreksi} = \frac{Y_{..}^2}{rt} = \frac{\left( \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^r Y_{ij} \right)^2}{rt} \quad (3)$$

$$JKT = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^r (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^r Y_{ij}^2 - FK \quad (4)$$

$$JKB = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^r (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2 = \frac{1}{t} \sum_{j=1}^r Y_{.j}^2 - FK \quad (5)$$

$$JKP = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^r (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^t Y_{i.}^2 - FK \quad (6)$$

$$JKG = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^r (Y_{ij} - \bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{i.} + \bar{Y}_{..})^2 = JKT - JKB - JKP \quad (7)$$

## 2.2 Rancangan Acak Kelompok Tak Lengkap Seimbang (RAKTLS)

Menurut Yates dalam Kempthorne (1952), rancangan acak kelompok tak lengkap seimbang merupakan suatu rancangan acak kelompok tak lengkap dimana setiap pasangan perlakuan yang mungkin muncul dengan jumlah pemunculan yang sama, masing-masing blok berisi satuan-satuan percobaan dengan banyak yang sama serta setiap perlakuan muncul dengan jumlah pemunculan yang sama.

Pada rancangan acak kelompok tak lengkap seimbang, terdapat lima notasi yang akan digunakan antara lain (Conover, 1971):

$t$  = banyaknya perlakuan.

$k$  = banyaknya satuan percobaan per blok ( $k < t$ ).

$r$  = banyaknya pemunculan masing - masing perlakuan ( $r < b$ ).

$b$  = banyaknya blok.

$\lambda$  = banyaknya pasangan perlakuan yang muncul bersama dalam suatu blok.

Menurut Federer (1955), untuk  $t$  perlakuan dalam  $b$  blok yang tak lengkap, ada  $k$  satuan percobaan dengan masing-masing  $r$  pemunculan perlakuan, kondisi seimbang dipenuhi jika setiap pasangan perlakuan muncul  $\lambda$  kali secara bersamaan dalam suatu blok tak lengkap dapat dituliskan dalam persamaan berikut:

$$rt = bk \quad (8)$$

$$\lambda(t-1) = r(k-1) \quad (9)$$

Persamaan (8) menyatakan banyaknya pemunculan dari semua perlakuan dalam suatu percobaan sama dengan banyaknya satuan percobaan.

### 2.2.1 Kelebihan dan Kelemahan dari RAKTLS

Menurut Kutner *et al.*, (2005), kelebihan dari rancangan kelompok tak lengkap seimbang adalah sebagai berikut:

- a. Peneliti dimungkinkan melakukan percobaan dengan ukuran blok untuk satuan percobaan yang tersedia lebih kecil dari banyaknya perlakuan. Hal itu akan sangat membantu jika angka banyaknya perlakuan besar.
- b. Penaksiran kesamaan pengaruh perlakuan relatif sederhana.
- c. Adanya keseimbangan dalam rancangan memperbolehkan penggunaan prosedur Scheffe dan Tukey untuk analisa pengaruh perlakuan.

Sedangkan kelemahan dari rancangan kelompok tak lengkap seimbang adalah:

- a. Rancangan acak kelompok tak lengkap seimbang hanya dapat digunakan untuk nilai-nilai tertentu dari banyaknya kombinasi perlakuan, ukuran blok, dan banyaknya blok.
- b. Asumsi bahwa tidak ada interaksi antara blok dan perlakuan dibatasi.

### 2.2.2 Model Linier dan Asumsi

Menurut Lentner dan Bishop (1986), model linier untuk rancangan acak kelompok tak lengkap seimbang adalah:

$$Y_{ijg} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ijg}; \quad i = 1, 2, \dots, t \quad j = 1, 2, \dots, b \quad g = n_{ij} \quad (10)$$

dimana:

$Y_{ijg}$  = pengamatan pada perlakuan ke -  $i$  dalam blok ke -  $j$  untuk  $g$  pemunculan

$\mu$  = rata-rata umum

$\tau_i$  = pengaruh perlakuan ke -  $i$

$\beta_j$  = pengaruh blok ke -  $j$

$\varepsilon_{ijg}$  = komponen galat

$$n_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika perlakuan ke - } i \text{ muncul pada blok ke - } j \\ 0 & \text{jika perlakuan ke - } i \text{ tidak muncul pada blok ke - } j \end{cases}$$

Asumsi-asumsi yang digunakan untuk pengujian perlakuan pengaruh tetap adalah:

- $\varepsilon_{ijg}$  menyebar secara bebas dan identik menurut sebaran  $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$  untuk setiap  $i, j$ .
- $\sum_{i=1}^t \tau_i = 0$
- $\sum_{j=1}^r \beta_j = 0$

### 2.2.3 Analisa Varian untuk Rancangan Acak Kelompok Tak Lengkap Seimbang

**Tabel 2. ANAVA untuk Rancangan Acak Kelompok Tak Lengkap Seimbang**

Sumber Keragaman	Derajat Bebas	Jumlah Kuadrat	Kuadrat Tengah	NHKT
Perlakuan (Tak Terkoreksi)	$t - 1$	$JKP_{TK}$	-	-
Blok (Tak Terkoreksi)	$b - 1$	$JKB_{TK}$	-	-
Perlakuan (Terkoreksi)	$t - 1$	$JKP_K$	$KTP_K$	$\sigma_\varepsilon^2 + r\sigma_\tau^2$
Blok (Terkoreksi)	$b - 1$	$JKB_K$	$KTB_K$	$\sigma_\varepsilon^2 + \left(\frac{bk-t}{b-1}\right)\sigma_\beta^2$
Galat Intrablok	$bk - t - b + 1$	$JKG_{intra}$	$KTG_{intra}$	$\sigma_\varepsilon^2$
Total	$bk - 1$	$JK_{total}$		

Sumber: Sharma, 2008

dimana:

$$JKP_{TK} = \sum_{i=1}^t \frac{Y_{i.}^2}{r} - FK \quad (11)$$

$$JKB_{TK} = \sum_{j=1}^b \frac{Y_{.j}^2}{k} - FK \quad (12)$$

$$JK_{total} = \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^t Y_{ijg}^2 - FK \quad (13)$$

$$JKP_K = \sum_{i=1}^t \hat{\tau}_i Q_i \quad (14)$$

$$JKB_K = JKB_{TK} - \frac{\left( \sum_{i=1}^t B_i^2 - \frac{k^2 Y_{..}^2}{t} \right)}{k(r-\lambda)} + \frac{\sum_{i=1}^t W_i^2}{rt(t-k)(k-1)} \quad (15)$$

$$JKG_{intra} = JK_{total} - JKB_{TK} - JKP_K \quad (16)$$

$$Q_i = Y_{i.} - \frac{B_i}{k} \quad (17)$$

$$Y_{..} = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^b Y_{ijg} \quad (18)$$

$$FK = \frac{\left( \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^b Y_{ijg} \right)}{bk} \quad (19)$$

$$\hat{\tau}_i = \frac{kQ_i}{\lambda t} \quad (20)$$

$$W_i = (t-k)Y_{i.} - (t-1)B_i + (k-1)Y_{..} \quad (21)$$

dengan:

- $Y_{i.}$  = jumlah perlakuan ke- $i$
- $Y_{.j}$  = jumlah blok ke- $j$
- $Y_{..}$  = jumlah seluruh pengamatan
- $B_i$  = jumlah semua blok dimana perlakuan ke- $i$  muncul
- $FK$  = faktor koreksi
- $\hat{\tau}_i$  = pengaruh perlakuan ke- $i$
- $Q_i$  = jumlah perlakuan terkoreksi ke- $i$

Untuk pengujian perlakuan pada taraf  $\alpha$ , jika informasi interblok tidak diperoleh, statistik uji yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$F = \frac{KTP_K}{KTG_{intra}} \quad (22)$$

Nilai  $F$  yang akan diperoleh dibandingkan dengan nilai  $F$  tabel dengan derajat bebas  $(t-1)$  dan  $(bk-t-b+1)$ .

### 2.3 Uji Friedman

Uji Friedman merupakan metode nonparametrik yang digunakan untuk melakukan analisa varian dua arah (*two way analysis of variance*) pada rancangan acak kelompok lengkap dasar. Uji Friedman mensyaratkan tidak ada ulangan (*replication*) bagi perlakuan yang diberikan kepada satuan-satuan percobaan. Maksudnya, hanya ada tepat 1 (satu) pengamatan untuk setiap perlakuan di dalam setiap blok.

Sedangkan hipotesis yang diuji adalah sebagai berikut (Parsad, 2008):

- $H_0$  : setiap perlakuan mempunyai pengaruh yang sama.
- $H_1$  : sedikitnya ada sepasang perlakuan mempunyai pengaruh yang tidak sama.

Menurut Conover (1971), langkah-langkah dalam menghitung statistik uji adalah sebagai berikut:

1. Data pengamatan pada setiap blok diperingkatkan dari yang terkecil sampai terbesar (peringkat 1 untuk data pengamatan yang terkecil, peringkat 2 untuk data pengamatan terkecil kedua, dan seterusnya).

2. Peringkat-peringkat pada setiap blok dijumlahkan yang dinotasikan sebagai berikut:

$$R_i = \sum_{j=1}^r R(Y_{ij}) \quad (23)$$

dimana:

$R_i$  = jumlah peringkat pada perlakuan ke- $i$

$R(Y_{ij})$  = peringkat  $Y_{ij}$  dalam blok ke- $j$

3. Statistik uji dihitung dengan menggunakan rumus:

$$T = \frac{12}{rt(t+1)} \sum_{i=1}^t \left[ R_i - \frac{r(t+1)}{2} \right]^2 \quad (24)$$

Hipotesis nol ditolak pada taraf  $\alpha$ , jika statistik uji Friedman  $T > \chi_{(t-1)}^2$ .

#### 2.4 Uji Durbin

Pada tahun 1951, Durbin memperkenalkan suatu metode nonparametrik berdasarkan peringkat yang digunakan untuk menguji hipotesis nol bahwa tidak ada perbedaan antara perlakuan pada rancangan acak kelompok tak lengkap seimbang.

Pengujian hipotesis nol tentang tidak ada perbedaan antara perlakuan dalam rancangan acak kelompok tak lengkap seimbang menggunakan metode parametrik dapat dilakukan apabila memenuhi asumsi-asumsi tertentu yang telah ditetapkan.

Pada saat asumsi-asumsi tersebut tidak dipenuhi, maka digunakanlah uji Durbin.

Sedangkan hipotesis yang diuji adalah sebagai berikut (Parsad, 2008):

$H_0$  : setiap perlakuan mempunyai pengaruh yang sama.

$H_1$  : sedikitnya ada sepasang perlakuan mempunyai pengaruh yang tidak sama.

Menurut Conover (1971), langkah-langkah dalam menghitung statistik uji adalah sebagai berikut:

1. Data pengamatan pada setiap blok diperingkatkan dari yang terkecil sampai terbesar (peringkat 1 untuk data pengamatan yang terkecil, peringkat 2 untuk data pengamatan terkecil kedua, dan seterusnya sampai peringkat ke- $k$  untuk data yang memiliki nilai terbesar).
2. Peringkat-peringkat pada setiap blok dijumlahkan yang dinotasikan sebagai berikut:

$$R_i = \sum_{j=1}^b R(Y_{ij}) \quad (25)$$

dimana:

$R_i$  = jumlah peringkat pada perlakuan ke- $i$

$R(Y_{ij})$  = peringkat  $Y_{ij}$  dalam blok ke- $j$

3. Statistik uji dihitung dengan menggunakan rumus:

$$T = \frac{12(t-1)}{rt(k-1)(k+1)} \sum_{i=1}^t \left[ R_i - \frac{r(k+1)}{2} \right]^2 \quad (26)$$

Hipotesis nol ditolak pada taraf  $\alpha$ , jika statistik uji Durbin  $T > \chi_{(t-1)}^2$ .

### 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

#### 3.1 Metode Parametrik untuk Uji Perlakuan Pengaruh Tetap pada RAKLD

Model linier dari RAKLD dapat dinyatakan dalam bentuk matriks, antara lain sebagai berikut (Christensen, 1987):

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{e} \quad (27)$$

dimana:

$$\mathbf{Y} = [Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{ir}]'$$

$\mathbf{X}$  = matriks rancangan

$$\boldsymbol{\beta} = [\mu, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_t, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r]'$$

$$\mathbf{e} = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \dots, \varepsilon_{ir}]'$$

Dalam mengestimasi persamaan (27), diperlukan operator proyeksi perpendikular pada  $\mathbf{C}(\mathbf{X})$ , yaitu  $\mathbf{M} = \mathbf{X}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}$ .  $\mathbf{C}(\mathbf{X})$  merupakan ruang vektor estimasi dan  $\mathbf{C}(\mathbf{X})^\perp$  merupakan ruang vektor galat, dimana  $\mathbf{I} - \mathbf{M}$  operator proyeksi perpendikular pada  $\mathbf{C}(\mathbf{X})^\perp$  (Christensen, 1987), sehingga persamaan (27) dapat dituliskan juga sebagai berikut:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{M}\mathbf{Y} + (\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Y} \quad (28)$$

dimana:

$$\mathbf{M}\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Y} = \mathbf{e}$$

Berdasarkan persamaan (28), diperoleh jumlah kuadrat total adalah sebagai berikut:

$$(\mathbf{M}\mathbf{Y})'(\mathbf{M}\mathbf{Y}) = \mathbf{Y}'\mathbf{M}'\mathbf{M}\mathbf{Y} \quad (29)$$

Karena  $\mathbf{M}$  merupakan matriks proyeksi perpendikular, maka:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}'\mathbf{M}'\mathbf{M}\mathbf{Y} &= \mathbf{Y}'\mathbf{M}\mathbf{M}\mathbf{Y} \\ &= \mathbf{Y}'\mathbf{M}\mathbf{Y} \end{aligned} \quad (30)$$

dan jumlah kuadrat galat adalah sebagai berikut:

$$((\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Y})'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Y} = \mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Y} \quad (31)$$

Karena  $\mathbf{I} - \mathbf{M}$  merupakan matriks proyeksi perpendikular, maka:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Y} &= \mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Y} \\ &= \mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Y} \end{aligned} \quad (32)$$

Menurut Christensen (1987), suatu hal yang penting dalam analisa statistik adalah memisahkan jumlah kuadrat total ( $\mathbf{Y}'\mathbf{M}\mathbf{Y}$ ). Misalkan  $\mathbf{J} = [1, 1, \dots, 1]'$  merupakan kolom pertama dari  $\mathbf{X}$ .  $\mathbf{X}_0$  merupakan matriks yang entri-entrinya merupakan entri-entri dari empat kolom pertama dari matriks  $\mathbf{X}$ , serta  $\mathbf{M}$  dan  $\mathbf{M}_0$  merupakan matriks yang bersesuaian dengan  $\mathbf{X}$  dan  $\mathbf{X}_0$ . Maka jumlah kuadrat total dapat dipisahkan menjadi tiga bagian sebagai berikut:

$$\mathbf{Y}'\mathbf{M}\mathbf{Y} = \mathbf{Y}'\frac{1}{n}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{Y} + \mathbf{Y}'(\mathbf{M} - \mathbf{M}_0)\mathbf{Y} + \mathbf{Y}'\left(\mathbf{M}_0 - \frac{1}{n}\mathbf{J}\mathbf{J}'\right)\mathbf{Y} \quad (33)$$

Dimana  $\frac{1}{n}\mathbf{J}\mathbf{J}'$ ,  $\mathbf{M} - \mathbf{M}_0$ ,  $\mathbf{M}_0 - \frac{1}{n}\mathbf{J}\mathbf{J}'$  merupakan matriks proyeksi perpendikular.

Pada Rancangan Acak Kelompok Lengkap Dasar (RAKLD), metode parametrik yang digunakan adalah ANAVA dua arah. Pengujian tentang perlakuan pengaruh tetap bahwa tidak ada perlakuan yang berbeda dapat dinyatakan dengan:

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_t$$

$$H_1 : \text{sedikitnya ada sepasang } \tau_i \neq \tau_j, \text{ dengan } i \neq j$$

Statistik uji yang digunakan adalah:

$$F = \frac{KTP}{KTG} \quad (34)$$

Dengan kata lain, hipotesis nol juga dapat dinyatakan dengan:

$$H_0 : Y_{ij} = \mu + \beta_j + \varepsilon_{ij} \text{ (model yang direduksi)}$$

$$H_1 : Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

Misalkan  $\mathbf{M}_0$  merupakan matriks proyeksi perpendikular yang bersesuaian dengan  $\mathbf{X}_0$  untuk model yang direduksi,  $\mathbf{M}$  merupakan matriks proyeksi perpendikular yang bersesuaian dengan  $\mathbf{X}$ , dimana  $\mathbf{C}(\mathbf{M}_0) \subset \mathbf{C}(\mathbf{M})$ , serta  $\mathbf{M} - \mathbf{M}_0$  merupakan matriks proyeksi perpendikular dengan  $\mathbf{C}(\mathbf{M} - \mathbf{M}_0) \subset \mathbf{C}(\mathbf{M})$ , digunakan untuk mendefinisikan jumlah kuadrat perlakuan. Maka secara matriks persamaan (34) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$F = \frac{\mathbf{Y}'(\mathbf{M} - \mathbf{M}_0)\mathbf{Y}/r(\mathbf{M} - \mathbf{M}_0)}{\mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Y}/r(\mathbf{I} - \mathbf{M})} \quad (35)$$

Diketahui bahwa:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}; i = 1, 2, \dots, t \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (36)$$

Diperoleh bahwa:

$$Y_{ij} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j} + \bar{Y}_{..} = \varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_{i.} - \bar{\varepsilon}_{.j} + \bar{\varepsilon}_{..} \quad (37)$$

Diketahui bahwa  $\varepsilon_{ij}$  menyebar secara bebas dan identik menurut sebaran  $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$  untuk semua  $i, j$ , maka:

$$Y_{ij} \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2) \text{ atau } \mathbf{Y} \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I}) \quad (38)$$

sehingga:

$$\frac{\mathbf{Y}}{\sigma} \sim N(0, \mathbf{I}) \quad (39)$$

$$\frac{\mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Y}}{\sigma^2} \sim \chi^2(r(\mathbf{I} - \mathbf{M})) \quad (40)$$

dan

$$\frac{\mathbf{Y}'(\mathbf{M} - \mathbf{M}_0)\mathbf{Y}}{\sigma^2} \sim \chi^2(r(\mathbf{M} - \mathbf{M}_0)) \quad (41)$$

$\mathbf{Y}'(\mathbf{M} - \mathbf{M}_0)\mathbf{Y}$  dan  $\mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Y}$  saling bebas, maka:

$$\frac{\mathbf{Y}'(\mathbf{M} - \mathbf{M}_0)\mathbf{Y}}{r(\mathbf{M} - \mathbf{M}_0)} \sim \chi^2(r(\mathbf{M} - \mathbf{M}_0)) \quad (42)$$

Dan

$$\frac{\mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Y}}{r(\mathbf{I} - \mathbf{M})} \sim \chi^2(r(\mathbf{I} - \mathbf{M})) \quad (43)$$

Berdasarkan definisi dari statistik uji- $F$ , maka rasio dari persamaan (42) dan persamaan (43) merupakan statistik uji- $F$ .

### 3.2 Metode Nonparametrik untuk Uji Perlakuan Pengaruh Tetap pada RAKLD

Berdasarkan Teorema Limit Pusat:

$$\frac{R_i - E[R_i]}{\sqrt{\text{var}[R_i]}} \sim N(0,1) \quad (43)$$

sehingga:

$$\frac{(R_i - E[R_i])^2}{\text{var}[R_i]} \sim \chi^2_{(1)} \quad (44)$$

Jika  $R_i$  saling bebas maka:

$$T' = \sum_{i=1}^t \frac{(R_i - E[R_i])^2}{\text{var}[R_i]} \sim \chi^2_{(t)} \quad (45)$$

Akan tetapi  $R_i$  tidak saling bebas, karena jumlahnya tetap, yaitu:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^t R_i &= \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^r R(Y_{ij}) \\ &= \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^t R(Y_{ij}) \\ &= \sum_{j=1}^r \frac{t(t+1)}{2} \\ &= \frac{rt(t+1)}{2} \end{aligned} \quad (46)$$

Karena dengan mengetahui  $t-1$  dari  $R_i$  saja sudah dapat diketahui nilai dari  $R_i$  lainnya, maka Friedman mengusulkan agar kedua ruas dari persamaan (45) dikalikan dengan  $\frac{t-1}{t}$  sehingga:

$$\begin{aligned} T &= \frac{t-1}{t} T' \\ &= \frac{t-1}{t} \sum_{i=1}^t \frac{(R_i - E[R_i])^2}{\text{var}[R_i]} \\ &= \frac{t-1}{t} \sum_{i=1}^t \frac{\left(R_i - \frac{r(t+1)}{2}\right)^2}{\frac{r(t+1)(t-1)}{12}} \\ &= \frac{t-1}{t} \cdot \frac{12}{r(t+1)(t-1)} \sum_{i=1}^t \left(R_i - \frac{r(t+1)}{2}\right)^2 \\ &= \frac{12}{rt(t+1)} \sum_{i=1}^t R_i^2 - 3r(t+1) \end{aligned} \quad (47)$$

Hasil akhir dari persamaan (3.37) merupakan statistik uji Friedman yang dinotasikan dengan  $T$ .

### 3.3 Kajian Perbandingan Metode Parametrik dan Nonparametrik pada RAKLD

Untuk kajian perbandingan metode parametrik dan nonparametrik ini dilakukan simulasi data dengan menggunakan program Microsoft Excel. Ada dua jenis data yang digunakan, yaitu data yang memiliki sebaran Normal (1000 simulasi) dan

tidak memiliki sebaran Normal, antara lain: 1000 simulasi data untuk sebaran Gamma dan Kai-Kuadrat serta 894 simulasi data dengan sebaran Seragam.

**Tabel 3. Perbandingan Hasil Analisis Uji-*F* dan Uji Friedman**

Sebaran	Varian Antar Perlakuan	
	Homogen	Heterogen
Normal	53	201
Gamma	14	35
Kai-Kuadrat	202	100
Seragam	53	201

Berdasarkan 1000 simulasi pada data yang memiliki sebaran Normal, menghasilkan bahwa untuk data yang mempunyai varian yang homogen, terdapat 53 kesimpulan dari uji Friedman yang tidak mengikuti uji-*F*. Hal itu menunjukkan bahwa uji-*F* lebih baik daripada uji Friedman dalam pengujian perlakuan pengaruh tetap pada RAKLD untuk data yang memiliki sebaran Normal dengan varian yang homogen. Sedangkan untuk varian yang heterogen, terdapat 201 kesimpulan yang dihasilkan uji Friedman yang tidak mengikuti uji-*F*. Hal itu menunjukkan bahwa uji Friedman lebih baik daripada uji-*F* dalam pengujian perlakuan pengaruh tetap pada RAKLD untuk data yang memiliki sebaran Normal dengan varian yang heterogen.

Simulasi data dilakukan sebanyak 1000 kali pada data yang memiliki sebaran Gamma, dihasilkan 14 kesimpulan dari uji-*F* yang tidak mengikuti uji Friedman untuk data yang mempunyai varian yang homogen. Hal itu menunjukkan bahwa uji Friedman lebih baik daripada uji-*F* dalam pengujian perlakuan pengaruh tetap pada RAKLD untuk data yang memiliki sebaran Gamma dengan varian yang homogen. Sedangkan untuk varian yang heterogen, terdapat 35 kesimpulan yang dihasilkan uji-*F* yang tidak mengikuti uji Friedman. Hal itu menunjukkan bahwa uji Friedman lebih baik daripada uji-*F* dalam pengujian perlakuan pengaruh tetap pada RAKLD untuk data yang memiliki sebaran Gamma dengan varian yang heterogen.

Dari 1000 simulasi data yang memiliki sebaran Kai-Kuadrat, diperoleh 202 kesimpulan dari uji-*F* yang tidak mengikuti uji Friedman untuk data yang mempunyai varian yang homogen. Hal itu menunjukkan bahwa uji Friedman lebih baik daripada uji-*F* dalam pengujian perlakuan pengaruh tetap pada RAKLD untuk data yang memiliki sebaran Kai-Kuadrat dengan varian yang homogen. Sedangkan untuk varian yang heterogen, terdapat 100 kesimpulan yang dihasilkan uji-*F* yang tidak mengikuti uji Friedman. Hal itu menunjukkan bahwa uji Friedman lebih baik daripada uji-*F* dalam pengujian perlakuan pengaruh tetap pada RAKLD untuk data yang memiliki sebaran Kai-Kuadrat dengan varian yang heterogen.

Selanjutnya, melalui 894 simulasi pada data yang memiliki sebaran Seragam, diperoleh 53 kesimpulan dari uji-*F* yang tidak mengikuti uji Friedman untuk data yang mempunyai varian yang homogen. Hal itu menunjukkan bahwa uji Friedman tetap lebih baik daripada uji-*F* dalam pengujian perlakuan pengaruh tetap pada RAKLD untuk data yang memiliki sebaran Seragam dengan varian yang homogen. Sedangkan untuk varian yang heterogen, terdapat 201 kesimpulan yang dihasilkan uji-*F* yang tidak mengikuti uji Friedman. Hal itu menunjukkan bahwa uji Friedman lebih baik daripada uji-*F* dalam pengujian perlakuan pengaruh tetap pada RAKLD untuk data yang memiliki sebaran Gamma dengan varian yang heterogen.

### 3.4 Metode Parametrik untuk Uji Perlakuan Pengaruh Tetap pada RAKTLS

Model linier dari RAKTLS dapat dinyatakan dalam bentuk matriks, yaitu:

$$Y = [Z, X] \begin{bmatrix} \tau \\ \beta \end{bmatrix} + e \quad (48)$$

dimana:

$Y$  = pengamatan pada perlakuan ke- $i$  dalam blok ke- $j$  untuk  $g$  pemunculan

$Z$  = vektor kolom untuk perlakuan

$X$  = matriks rancangan

$$\beta' = [\mu, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_b]$$

$$\tau' = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_t]$$

$$e = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \dots, \varepsilon_{tr}]'$$

Model linier dari RAKTLS dalam bentuk matriks dapat membantu dalam mengkaji statistik uji yang digunakan dalam metode parametrik.

Pada RAKTLS, pengujian tentang perlakuan pengaruh tetap bahwa tidak ada perlakuan yang berbeda dapat dinyatakan dengan:

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_t$$

$$H_1 : \text{sedikitnya ada sepasang } \tau_i \neq \tau_j, \text{ dengan } i \neq j$$

Secara aljabar, statistik uji yang digunakan adalah:

$$F = \frac{KTP_K}{KTG_{intra}} \quad (49)$$

Misalkan  $\hat{\tau}_i$  merupakan pengaruh perlakuan ke- $i$  dan  $Q_i$  merupakan jumlah perlakuan terkoreksi ke- $i$ , maka Kuadrat Tengah Perlakuan Terkoreksi ( $KTP_K$ ) dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} KTP_K &= \frac{JKP_K}{t-1} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^t \hat{\tau}_i Q_i}{t-1} \\ &= \frac{\left( \sum_{i=1}^t \left( \frac{k}{\lambda t} Q_i \right) Q_i \right)}{t-1} \\ &= \frac{k \sum_{i=1}^t Q_i^2}{\lambda t (t-1)} \end{aligned} \quad (50)$$

Sedangkan Kuadrat Tengah Galat Intrablok ( $KTG_{intra}$ ) dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} KTG_{intra} &= \frac{JKG_{intra}}{bk - t - b + 1} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^b \sum_g (Y_{ijg} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...})^2}{bk - t - b + 1} \end{aligned} \quad (51)$$

Statistik uji yang digunakan tersebut akan dikaji secara matriks. Oleh karena itu, menurut Christensen (1987), diperlukan  $\mathbf{Y}'(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{Z}$  yang merupakan jumlah perlakuan terkoreksi ke- $i$ .

Misalkan  $\mathbf{W}$  merupakan matriks proyeksi perpendikular yang didefinisikan oleh

$$\mathbf{W} = \mathbf{I} - \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \mathbf{J}'_t \quad (52)$$

Diketahui bahwa:

$$\begin{aligned} r(k-1) &= \lambda(t-1) \\ r(k-1) + \lambda &= \lambda t \end{aligned} \quad (53)$$

Maka:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}'(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{Z} &= k^{-1} \left[ (r(k-1) + \lambda)\mathbf{I} - \lambda\mathbf{J}'_t \right] \\ &= k^{-1} \left[ \lambda t\mathbf{I} - \lambda\mathbf{J}'_t \right] \\ &= \frac{\lambda}{k} \left[ t\mathbf{I} - \mathbf{J}'_t \right] \\ &= \frac{\lambda t}{k} \left[ \mathbf{I} - \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \mathbf{J}'_t \right] \\ &= \frac{\lambda t}{k} \mathbf{W} \end{aligned} \quad (54)$$

Karena  $\mathbf{W}$  merupakan matriks proyeksi perpendikular, maka:

$$[\mathbf{Z}'(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{Z}]^{-1} = \frac{k}{\lambda t} \mathbf{W} \quad (55)$$

Selanjutnya akan ditentukan vektor  $\mathbf{Y}'(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{Z}$  yang berukuran  $1 \times t$ . Vektor  $(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{Y}$  mempunyai entri-entri  $(Y_{ij} - \bar{Y}_{.j})$ , sehingga:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}'(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{Z}_m &= \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^b (Y_{ij} - \bar{Y}_{.j}) z_{ij,m} \\ &= \sum_{i=1}^t \sum_{j \in A_i} Y_{ij} z_{ij,m} - \sum_{i=1}^t \sum_{j \in A_i} \bar{Y}_{.j} z_{ij,m} \\ &= \sum_{j \in A_i} Y_{jm} - \sum_{j \in A_i} \bar{Y}_{.j} \\ &= \sum_{j \in A_i} (Y_{jm} - \bar{Y}_{.j}) \end{aligned} \quad (56)$$

Definisikan:

$$Q_m = \sum_{j \in A_i} (Y_{jm} - \bar{Y}_{.j}) \quad (57)$$

Maka:

$$\mathbf{Y}'(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{Z} = [Q_1, Q_2, \dots, Q_t] \quad (58)$$

Karena  $\mathbf{Z}$  mempunyai kolom yang entri-entrinya terdiri dari 1 dan 0, maka:

$$\mathbf{Z}\mathbf{J}'_t = \mathbf{J}'_n \quad (59)$$

Oleh karena itu,

$$\mathbf{0} = (\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{J}'_n = (\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{Z}\mathbf{J}'_t \quad (60)$$

Berdasarkan persamaan-persamaan diatas, selanjutnya dapat diperoleh:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Z}[\mathbf{Z}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Z}]^{-1} &= (\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Z}\left(\frac{k}{\lambda t}\right)\mathbf{W} \\
 &= \left(\frac{k}{\lambda t}\right)(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Z}\left(\mathbf{I} - \left(\frac{1}{t}\right)\mathbf{J}'_t\right) \\
 &= \left(\frac{k}{\lambda t}\right)\left[(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Z} - \left(\frac{1}{t}\right)(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Z}\mathbf{J}'_t\right] \\
 &= \frac{k}{\lambda t}(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Z}
 \end{aligned} \tag{61}$$

Sehingga Jumlah Kuadrat Perlakuan Terkoreksi adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 JKP_K &= \mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Z}[\mathbf{Z}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Z}]^{-1}\mathbf{Z}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Y} \\
 &= \frac{k}{\lambda t}[\mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Z}\mathbf{Z}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Y}] \\
 &= \frac{k}{\lambda t}[\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_t][\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_t]' \\
 &= \frac{k}{\lambda t} \sum_{i=1}^t Q_i^2
 \end{aligned} \tag{62}$$

Sedangkan jumlah kuadrat galat intrablok adalah:

$$\begin{aligned}
 JKG_{intra} &= \mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Y} - \mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Z}[\mathbf{Z}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Z}]^{-1}\mathbf{Z}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Y} \\
 &= \mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Y} - \left(\frac{k}{\lambda t}\right)\mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Z}\mathbf{Z}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Y}
 \end{aligned} \tag{63}$$

Misalkan  $\mathbf{P}$  merupakan matriks proyeksi perpendikular yang didefinisikan dengan:

$$\mathbf{P} = \mathbf{M} + \left(\frac{k}{\lambda t}\right)\mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Z}\mathbf{Z}'(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{Y} \tag{64}$$

Maka:

$$JKG_{intra} = \mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{Y} \tag{65}$$

Berdasarkan persamaan (3.23) dan (3.24), diperoleh bahwa:

$$\begin{aligned}
 JKP_K &\sim \chi^2(r(\mathbf{X}, \mathbf{Z})) \\
 \frac{JKP_K}{r(\mathbf{X}, \mathbf{Z})} &\sim \chi^2(r(\mathbf{X}, \mathbf{Z}))
 \end{aligned} \tag{66}$$

dan

$$\begin{aligned}
 JKG_{intra} &\sim \chi^2(n - r(\mathbf{X}, \mathbf{Z})) \\
 \frac{JKG_{intra}}{n - r(\mathbf{X}, \mathbf{Z})} &\sim \chi^2(n - r(\mathbf{X}, \mathbf{Z}))
 \end{aligned} \tag{67}$$

Dimana  $r(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$  merupakan rank dari matriks  $(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$  dan  $n$  merupakan banyaknya pengamatan.

Berdasarkan definisi statistik uji- $F$ , rasio dari persamaan (66) dan (67) merupakan statistik uji  $F$ .

### 3.5 Metode Nonparametrik untuk Uji Perlakuan Pengaruh Tetap pada RAKTLS

Jika banyaknya pemunculan dari masing-masing perlakuan  $r$  bernilai besar, maka berdasarkan Teorema Limit Pusat, jumlah peringkat pada perlakuan ke- $i$ ,  $R_i$ , menyebar menurut sebaran Normal. Untuk itu,

$$\frac{R_i - E[R_i]}{\sqrt{\text{var}[R_i]}} \sim N(0,1) \quad (68)$$

dimana:

$$R_i = \sum_{j=1}^b R(Y_{ij}) \quad (69)$$

sehingga:

$$\frac{(R_i - E[R_i])^2}{\text{var}[R_i]} \sim \chi_{(1)}^2 \quad (70)$$

Jika  $R_i$  saling bebas maka:

$$T' = \sum_{i=1}^t \frac{(R_i - E[R_i])^2}{\text{var}[R_i]} \sim \chi_{(t)}^2 \quad (71)$$

Sehingga jika kedua ruas dikali dengan  $\frac{t-1}{t}$ , diperoleh:

$$\begin{aligned} T &= \frac{t-1}{t} T' \\ &= \frac{t-1}{t} \sum_{i=1}^t \frac{(R_i - E[R_i])^2}{\text{var}[R_i]} \\ &= \frac{t-1}{t} \sum_{i=1}^t \frac{\left( R_i - \frac{r(k+1)}{2} \right)^2}{r(k+1)(k-1)} \\ &= \frac{12(t-1)}{rt(k+1)(k-1)} \sum_{i=1}^t \left( R_i^2 - r(k+1)R_i + \frac{r^2(k+1)^2}{4} \right) \\ &= \frac{12(t-1)}{rt(k+1)(k-1)} \sum_{i=1}^t R_i^2 - \frac{3r(t-1)(k+1)}{k-1} \end{aligned} \quad (72)$$

Hasil akhir dari persamaan (72) merupakan statistik uji Durbin

### 3.6 Kajian Perbandingan Metode Parametrik dan Nonparametrik pada RAKTLS

Untuk kajian perbandingan metode parametrik dan nonparametrik ini dilakukan simulasi data dengan menggunakan program Microsoft Excel. Ada dua jenis data yang digunakan, yaitu data yang memiliki sebaran Normal (1000 simulasi) dan tidak memiliki sebaran Normal, antara lain: 1000 simulasi data untuk sebaran Gamma dan Kai-Kuadrat serta 825 simulasi data dengan sebaran Seragam.

**Tabel 4. Perbandingan Hasil Analisis Uji- $F$  dan Uji Durbin**

Sebaran	Varian Antar Perlakuan	
	Homogen	Heterogen
Normal	127	743
Gamma	6	993
Kai-Kuadrat	96	672
Seragam	16	657

Berdasarkan 1000 simulasi pada data yang memiliki sebaran Normal, terdapat 127 kesimpulan yang dihasilkan uji Friedman yang tidak mengikuti uji- $F$  untuk data yang mempunyai varian yang homogen Hal itu menunjukkan bahwa uji- $F$  lebih baik daripada uji Friedman dalam pengujian perlakuan pengaruh tetap pada RAKTLS untuk data yang memiliki sebaran Normal dengan varian yang homogen. Sedangkan untuk varian yang heterogen, terdapat 743 kesimpulan yang dihasilkan uji Friedman yang tidak mengikuti uji- $F$ . Hal itu menunjukkan bahwa uji Friedman lebih baik daripada uji- $F$  dalam pengujian perlakuan pengaruh tetap pada RAKTLS untuk data yang memiliki sebaran Normal dengan varian yang heterogen.

Simulasi data dilakukan sebanyak 1000 kali pada data yang memiliki sebaran Gamma, terdapat 6 kesimpulan yang dihasilkan uji- $F$  yang tidak mengikuti uji Friedman. Hal itu menunjukkan bahwa uji Friedman lebih baik daripada uji- $F$  dalam pengujian perlakuan pengaruh tetap pada RAKTLS untuk data yang memiliki sebaran Gamma dengan varian yang homogen. Sedangkan untuk varian yang heterogen, terdapat 993 kesimpulan yang dihasilkan uji- $F$  yang tidak mengikuti uji Friedman. Hal itu menunjukkan bahwa uji Friedman lebih baik daripada uji- $F$  dalam pengujian perlakuan pengaruh tetap pada RAKTLS untuk data yang memiliki sebaran Gamma dengan varian yang heterogen.

Dari 1000 simulasi pada data yang memiliki sebaran Kai-Kuadrat, terdapat 96 kesimpulan dari uji- $F$  yang tidak mengikuti uji Friedman untuk data yang mempunyai varian yang homogen. Hal itu menunjukkan bahwa uji Friedman lebih baik daripada uji- $F$  dalam pengujian perlakuan pengaruh tetap pada RAKTLS untuk data yang memiliki sebaran Kai-Kuadrat dengan varian yang homogen. Sedangkan untuk varian yang heterogen, terdapat 672 kesimpulan yang dihasilkan uji- $F$  yang tidak mengikuti uji Friedman. Hal itu menunjukkan bahwa uji Friedman lebih baik daripada uji- $F$  dalam pengujian perlakuan pengaruh tetap pada RAKTLS untuk data yang memiliki sebaran Kai-Kuadrat dengan varian yang heterogen.

Selanjutnya, melalui 825 simulasi pada data yang memiliki sebaran Seragam, dihasilkan 16 kesimpulan dari uji- $F$  yang tidak mengikuti uji Friedman untuk data yang mempunyai varian yang homogen. Hal itu menunjukkan bahwa uji Friedman tetap lebih baik daripada uji- $F$  dalam pengujian perlakuan pengaruh tetap pada RAKTLS untuk data yang memiliki sebaran Seragam dengan varian yang homogen. Sedangkan untuk varian yang heterogen, terdapat 657 kesimpulan yang dihasilkan uji- $F$  yang tidak mengikuti uji Friedman. Hal itu menunjukkan bahwa uji Friedman lebih baik daripada uji- $F$  dalam pengujian perlakuan pengaruh tetap pada RAKTLS untuk data yang memiliki sebaran Gamma dengan varian yang heterogen.

## 4. KESIMPULAN DAN SARAN

### 4.1 Kesimpulan

- Uji- $F$  digunakan sebagai metode parametrik untuk uji perlakuan pengaruh tetap pada RAKLD dan RAKTLS karena Kuadrat Tengah Perlakuan, Kuadrat Tengah Perlakuan Terkoreksi, Kuadrat Tengah Galat, dan Kuadrat Tengah Galat Intrablok memiliki sebaran Kai-Kuadrat.
- Statistik uji Friedman dan statistik uji Durbin merupakan metode nonparametrik yang digunakan pada RAKLD dan RAKTLS apabila asumsi kenormalan untuk melakukan uji- $F$  (metode parametrik) tidak dipenuhi.
- Untuk data pengamatan pada RAKLD dan RAKTLS yang memiliki sebaran Normal dengan varian antar perlakuan bersifat homogen, uji- $F$  (metode parametrik) lebih baik daripada uji Friedman dan uji Durbin (metode nonparametrik). Sebaliknya, jika varian antar perlakuan bersifat heterogen, maka metode nonparametrik lebih baik daripada metode parametrik.
- Untuk data pengamatan pada RAKLD dan RAKTLS yang memiliki sebaran tidak Normal dengan varian antar perlakuan bersifat homogen dan heterogen, metode nonparametrik lebih baik daripada metode parametrik.

### 4.2 Saran

Sebaiknya dilakukan juga kajian perbandingan metode parametrik dan metode nonparametrik untuk rancangan percobaan lainnya, seperti Rancangan Acak Lengkap. Serta dapat juga melakukan analisis pada Rancangan Acak Kelompok Tak Lengkap Seimbang apabila terdapat data hilang.

## DAFTAR PUSTAKA

- Box, George E. P., *et al.* 1978. *Statistics for Experimenters: An Introduction to Design, Data Analysis, and Model Building*. John Wiley and Sons. USA.
- Christensen, R. 1987. *Plane Answers to Complex Questions: The Theory of Linear Models*. Springer-Verlag. New York
- Cochran, W. G., and G. M. Cox. 1957. *Experimental Design*. John Wiley and Sons. Canada.
- Conover, W. J. 1971. *Practical Nonparametric Statistics*. John Wiley and Sons. New York.
- Daniel, W. W. 1978. *Statistik Nonparametrik Terapan*. Diterjemahkan oleh Alex Tri Kantjono W. Gramedia. Jakarta.
- Federer, W. T. 1955. *Experimental Design: Theory and Application*. The Macmillan Company. New York.
- Hill Jr., R. O. 1986. *Elementary Linear Algebra*. Academic Press. Florida.
- Kempthorne, O. 1955. *The Design and Analysis of Experiments*. John Wiley and Sons. Canada.
- Kutner, M. H., *et al.* 2005. *Applied Linear Statistical Models*. McGraw-Hill/Irwin. New York.
- Lentner, M. and T. Bishop. 1986. *Experimental Design and Analysis*. Valey Book Company. Blacksburg.
- Montgomery, D. C. 1976. *Design and Analysis of Experiments*. John Wiley and Sons. Canada
- Nugroho, S. 2008. *Statistika Matematika*. Dalam Proses Penerbitan.
- Parsad, R. 2008. *Nonparametric Methods in Analysis of Experimental Data*.  
<http://www.iasri.res.in/iasriwebsite/DESIGNOFEXPAPPLICATION/Electronic-Books/Modules/27Nonparametric%20procedure.pdf>

- Sharma, V.K. 2008. *Balanced Incomplete Block Designs*.  
<http://www.iasri.res.in/iasriwebsite/DESIGNOFEXPAPPLICATION/Electronic-Book/Module%202/2BIBD.pdf>
- Siegel, S., and J. Castellan, Jr. 1988. *Nonparametric Statistics for the Behavioral Sciences*. McGraw-Hill International Edition. Singapore.

# KAJIAN BEBERAPA UJI KENORMALAN

Siti Karomah<sup>1</sup>, Sigit Nugroho<sup>2</sup> dan Fachri Faisal<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Alumni Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Bengkulu

<sup>2</sup>Dosen Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Bengkulu

## ABSTRACT

This research is aimed to learn about Normal Distribution and the normality tests. The statistical tests that was used in the normality tests are Lilliefors, Shapiro-Wilk, Skewness, Kurtosis, D'Agostino-Pearson, and Jarque Bera. Literature study is used in this experiment using data simulation generated from Normal, Chi Square, Exponential, and Uniform distribution. The result shows that not all of normality tests is good and suitable for all distribution data. In general, Shapiro-Wilk test is good and suitable for testing normality for both Normal and non-Normal distribution, while D'Agostino-Pearson test is only recommended for non-Normal generated data.

Keywords: *Normal Distribution, Statistical tests, Normality tests*

## 1. PENDAHULUAN

Penggunaan metode statistika dalam membantu pemecahan masalah di berbagai bidang seperti ekonomi, bisnis, pertanian, teknik, psikologi, kedokteran, pendidikan, dan bidang-bidang spesifik lainnya terasa semakin dibutuhkan. Dalam hal ini metode statistik merupakan alat analisis dari data kuantitatif atau data kualitatif yang bertujuan untuk pengambilan keputusan dan peramalan (Djarwanto, 2001).

Sebelum kesimpulan tersebut dibuat, data yang telah terkumpul itu terlebih dahulu dipelajari, dianalisis atau diolah. Pembuatan suatu kesimpulan harus dilakukan dengan baik, cermat, teliti, hati-hati, serta mengikuti cara-cara dan teori yang benar. Dengan demikian kesimpulan yang dibuat dari penelitian dan pengamatan tersebut dapat dipertanggungjawabkan.

Misalnya, terdapat suatu sampel berukuran  $n$  dengan nilai pengamatan  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , kemudian akan timbul pertanyaan apakah populasi asal sampel itu dapat dianggap menyebar normal atau tidak (Nasoetion & Barizi, 1985). Oleh karena itu, untuk mengetahui apakah suatu sampel berdistribusi normal atau tidak, maka perlu dilakukan uji kenormalan.

Uji kenormalan adalah suatu uji yang dilakukan untuk mengetahui apakah suatu data memiliki Distribusi Normal. Data yang memiliki Distribusi Normal merupakan salah satu syarat dilakukannya uji parametrik. Sedangkan data yang tidak mempunyai Distribusi Normal dapat dianalisis dengan menggunakan uji nonparametrik (Patria, 2008).

Dalam uji statistik seperti uji  $\chi^2$ ,  $T$ , dan  $F$  suatu data diasumsikan berdistribusi normal. Secara kasat mata, kenormalan suatu data dapat ditaksir dengan menggunakan metode grafik. Tetapi metode grafik tidak dapat digunakan jika perbedaan antara Distribusi Normal dan distribusi sampel adalah signifikan. Uji-uji yang dapat digunakan untuk menaksir kenormalan adalah Kai-Kuadrat, Anderson Darling, Ryan Joner, Kolmogrov-Smirnov, Shapiro-Wilk, Jarque Bera, Lilliefors, D'Agostino-Pearson, Skewness, dan Kurtosis.

Berdasarkan uraian di atas penulis tertarik untuk mempelajari dan mengkaji prosedur uji yang cocok dan layak digunakan untuk menguji kenormalan suatu sampel data. Untuk lebih memahami konsep-konsep di atas akan digunakan data simulasi yang diterapkan untuk menguji kenormalan dengan uji Lilliefors, Shapiro-Wilk, Skewness, Kurtosis, D'Agostino-Pearson, dan Jarque Bera.

## 2. LANDASAN TEORI

### 2.1 Distribusi Normal

Distribusi Normal merupakan distribusi teoritis dari variabel acak yang kontinu. Sebagian besar variabel acak kontinu yang diaplikasikan di berbagai bidang, pada umumnya memiliki distribusi yang dapat didekati dengan Distribusi Normal. Karena distribusinya kontinu, maka cara menghitung peluangnya dilakukan dengan menentukan luas dibawah kurvanya (Dajan, 1996).

Distribusi Normal dikenalkan oleh Abraham De Moivre pada tahun 1733. Pada saat itu distribusi ini digunakan untuk menghampiri peluang yang berhubungan dengan variabel acak binomial ketika parameter  $n$  besar. Hasil ini kemudian dikembangkan oleh Laplace dan yang lainnya, dan tercakup dalam teori peluang yang dikenal dengan teorema limit pusat (Ross, 1987).

### 2.2 Karakteristik Distribusi Normal

Distribusi Normal berbentuk sebuah lonceng (*bell-shape*), yang juga sering disebut *bell-shape distribution*. Sebagai model teoritis, Distribusi Normal memiliki empat karakteristik yang bersifat kumulatif, yaitu:

- Unimodal  
Sifat unimodal (uni = satu dan Modal = modos) mengandung pengertian bahwa setiap Distribusi Normal hanya memiliki satu modus.
- Simetris  
Suatu distribusi disebut simetris jika setengah bagian dari suatu distribusi sama dan sebangun (identik) dengan setengah bagian lainnya
- Identik  
Dari dua karakteristik di atas (*unimodal dan simetris*), ketiga ukuran gejala pusat (modus, median, dan rata-rata) distribusi sama besar (identik). Dengan kata lain, pada Distribusi Normal, modus = median = rata-rata.
- Asimtotik  
Oleh karena nilai terkecil dan nilai terbesar pada suatu distribusi data kontinu bersifat tak hingga, maka tidak ada suatu daerah pun di bawah kurva normal yang memiliki frekuensi (probabilitas) sama dengan nol. Berdasarkan asumsi seperti itu, maka kurva Distribusi Normal tidak akan pernah menyentuh absisnya.

Model distribusi lain mungkin ada yang memiliki salah satu atau beberapa dari keempat karakteristik itu, akan tetapi hanya Distribusi Normal yang memiliki semuanya.

### 2.3 Persamaan Kurva Normal

Fungsi kepekatan peluang (*probability density function*) variabel acak normal dengan rata-rata  $\mu$  dan variansi  $\sigma^2$  dapat dinyatakan sebagai (Dixon & Massey, 1991):

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (1)$$

untuk  $-\infty < x < \infty$ ;  $-\infty < \mu < \infty$ ;  $\sigma > 0$

Dari turunan pertama dan kedua fungsi kepekatan peluang variabel acak normal dapat diperoleh lima sifat kurva normal, yaitu :

1. Modus terdapat pada  $x = \mu$
2. Kurva setangkep terhadap sumbu tegak yang melalui rata-rata  $\mu$
3. Kurva memiliki titik belok pada  $x = \mu \pm \sigma$ , cekung dari bawah bila  $\mu - \sigma < x < \mu + \sigma$ , dan cekung dari atas untuk nilai  $x$  lainnya.
4. Kedua ujung kurva normal mendekati asimtot sumbu datar bila nilai  $x$  bergerak menjauhi  $\mu$  baik ke kiri maupun ke kanan
5. Seluruh luas di bawah kurva dan di atas sumbu datar sama dengan 1

Distribusi Normal ini mempunyai rata-rata  $\mu$  dan varian  $\sigma^2$ , dengan fungsi pembangkit momen yang dirumuskan sebagai berikut (Ross, 1987):

$$M_x(t) = e^{\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)} \quad (2)$$

### 2.4 Distribusi Normal Standar

Untuk mengatasi kesulitan dalam menghitung integral fungsi kepekatan peluang normal, maka dibuat tabel luas kurva normal sehingga memudahkan penggunaannya. Akan tetapi tidak akan mungkin membuat tabel yang berlainan untuk setiap nilai  $\mu$  dan  $\sigma$ . Karena seluruh pengamatan setiap variabel acak normal  $X$  dapat ditransformasi menjadi himpunan pengamatan baru satu variabel acak normal  $Z$  dengan rata-rata 0 dan variansi 1, maka permasalahan tersebut dapat diatasi. Hal ini dapat dilakukan dengan transformasi:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (3)$$

Jika  $X$  mendapat suatu nilai  $x$ , maka nilai  $Z$  padanannya diberikan oleh persamaan (3). Jadi, untuk nilai  $X$  antara  $x = x_1$  dan  $x = x_2$  maka variabel acak  $Z$  akan mempunyai

nilai antara  $z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma}$  dan  $z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma}$ , sehingga probabilitasnya dapat dinyatakan dengan:

$$P(x_1 < X < x_2) = P(z_1 < Z < z_2) \quad (4)$$

dan fungsi kepekatan peluang normal standar dirumuskan sebagai berikut:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \quad (5)$$

Dengan adanya transformasi ini, kebutuhan akan banyaknya tabel luas kurva normal yang dibutuhkan telah diperkecil menjadi satu, yaitu tabel Distribusi Normal Standar (Walpole & Myers, 1995).

### 2.5 Distribusi Normal Kumulatif

Secara umum, fungsi distribusi kumulatif dari Distribusi Normal yang kontinu dengan rata-rata  $\mu$  dan variansi  $\sigma^2$  dapat dirumuskan sebagai :

$$F(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} dy \quad (6)$$

Secara matematis, fungsi distribusi pada persamaan (6) merupakan fungsi  $X$  yang tidak pernah menurun, akan mendekati nol jika  $X \rightarrow -\infty$  dan mendekati satu jika  $X \rightarrow \infty$ . Sedangkan fungsi distribusi kumulatif normal standar dirumuskan sebagai:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{1}{2}u^2} du \quad (7)$$

### 2.6 Distribusi yang Diturunkan dari Distribusi Normal

#### 2.6.1 Distribusi Kai Kuadrat ( $\chi^2$ )

Jika  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  adalah variabel acak Distribusi Normal Standar yang saling bebas, maka :

$$X = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_n^2 \quad (8)$$

dikatakan mempunyai Distribusi Kai Kuadrat dengan  $n$  derajat bebas, yang dinotasikan dengan  $X \sim \chi_n^2$ . Fungsi kepekatan peluang Distribusi Kai Kuadrat dirumuskan oleh:

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad (9)$$

Sedangkan fungsi pembangkit momen dari variabel acak Kai Kuadrat dengan  $n$  derajat bebas ditunjukkan dengan persamaan berikut :

$$E\left[e^{tX}\right] = (1 - 2t)^{-\frac{n}{2}} \quad (10)$$

Selain sebagai fungsi pembangkit momen dari variabel acak Kai-Kuadrat, persamaan (10) juga dikenal sebagai fungsi pembangkit momen dari variabel acak gamma dengan parameter  $\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$ . Oleh karena keunikan fungsi pembangkit momen tersebut, maka kedua distribusi ini adalah identik.

### 2.6.1 Distribusi $t$

Jika  $Z$  dan  $V$  adalah variabel acak yang saling bebas dengan  $Z$  berdistribusi Normal Standar dan  $V$  berdistribusi Kai Kuadrat dengan derajat bebas  $n$ , maka :

$$T_n = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{n}}} \quad (11)$$

dikatakan memiliki Distribusi- $t$  dengan derajat bebas  $n$ . Fungsi kepekatan peluang dari  $T_n$  adalah turunan dari fungsi distribusi kumulatif  $F(x)$  yang dirumuskan oleh:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{(n+1)}{2}} \quad (12)$$

dengan  $\Gamma$  adalah fungsi gamma.

Distribusi- $t$  diterbitkan pada tahun 1908 dalam suatu makalah oleh W.S. Gosset. Dalam menurunkan distribusi ini, Gosset menganggap sampel berasal dari populasi normal. Karena Distribusi- $t$  setangkup dengan rata-rata nol, maka  $t_{1-\alpha} = -t_\alpha$ .

### 2.6.3 Distribusi $F$

Distribusi  $F$  didefinisikan sebagai nisbah dua peubah acak Kai Kuadrat yang saling bebas dan masing-masing dibagi dengan derajat kebebasannya. Misalkan,  $\chi_n^2$  dan  $\chi_m^2$  adalah variabel acak Kai-Kuadrat yang saling bebas dengan  $n$  dan  $m$  berturut-turut adalah derajat kebebasannya. Maka variabel acak  $F_{n,m}$  didefinisikan oleh  $F_{n,m} = \frac{\chi_n^2/n}{\chi_m^2/m}$ .  $F_{n,m}$  dikatakan memiliki distribusi  $F$  dengan  $n$  dan  $m$  derajat bebas.

Fungsi kepekatan peluang dari  $F_{n,m}$  adalah turunan dari fungsi distribusi kumulatif  $F(x)$  yang diberikan oleh:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right) (n)^{\frac{n}{2}} (m)^{\frac{m}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) (m+nx)^{(n+m)/2}} \quad (13)$$

Derajat kebebasan yang berkaitan dengan variabel acak Kai-Kuadrat pada pembilang  $F$  selalu ditulis lebih dahulu, kemudian diikuti oleh derajat kebebasan yang berkaitan dengan variabel acak Kai-Kuadrat pada penyebut. Jadi, kurva Distribusi  $F$  tidak hanya tergantung pada kedua parameter  $n$  dan  $m$  tetapi juga tergantung pada urutan keduanya ditulis.

### 3. UJI-UJI KENORMALAN

Banyak uji statistik yang memerlukan data berdistribusi Normal. Untuk itu, pemeriksaan terhadap kenormalan data adalah kriteria dalam proses analisis data. Berikut ini akan dibahas tentang beberapa uji yang dapat digunakan untuk memeriksa kenormalan suatu data.

#### 3.1 Uji Lilliefors ( $L$ )

Uji Lilliefors didesain untuk menaksir Distribusi Normal ketika satu dan/atau kedua dari parameter populasi ( $\mu$  dan  $\sigma^2$ ) tidak diketahui. Kedua parameter yang digunakan untuk uji ini diestimasi dari sampel data. Prosedur uji Lilliefors ini sama dengan prosedur untuk uji Kolmogorov-Smirnov, kecuali pada parameter yang digunakan. Pada uji Lilliefors parameter yang digunakan adalah nilai dari rata-rata sampel  $\bar{X}$  dan variansi  $s^2$ .

Suatu data  $x_1, \dots, x_n$  yang diambil dari sampel acak berukuran  $n$  dari sebuah fungsi distribusi yang tidak diketahui dan dinotasikan dengan  $F(x)$ . Apabila

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (14)$$

sebagai penduga bagi  $\mu$ , dan

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \quad (15)$$

sebagai penduga bagi  $\sigma$ , serta:

$$Z_i = \frac{X_i - \bar{X}}{s} \quad \text{untuk } i = 1, 2, \dots, n \quad (16)$$

Uji statistik Lilliefors dihitung dari nilai  $Z_i$  sebagai pengganti dari sampel acak aslinya. Uji ini dirumuskan oleh (Conover, 1971):

$$L = \sup_x |F^*(x) - S(x)| \quad (17)$$

Uji Lilliefors ini digunakan untuk menguji hipotesis:

$H_0$ : Sampel acak mempunyai Distribusi Normal dengan rataan dan varian tertentu

$H_1$ : Fungsi distribusi dari nilai-nilai  $X_i$  tidak Normal

$H_0$  akan ditolak pada taraf nyata  $\alpha$  jika nilai dari uji statistik Lilliefors ( $L$ ) lebih besar dari nilai  $w_{1-\alpha}$  dan  $H_0$  tidak dapat ditolak jika nilai dari  $L$  lebih kecil dari nilai  $w_{1-\alpha}$ .

#### 3.2 Uji Shapiro-Wilk ( $SW$ )

Uji kenormalan ini dikembangkan oleh Samuel Shapiro dan Martin Wilk pada tahun 1965. Pada saat ini, uji Shapiro-Wilk menjadi uji kenormalan yang lebih disukai kerana memiliki kekuatan uji yang lebih baik dibandingkan uji-uji alternatif dari bermacam-macam range. Uji ini tergantung pada korelasi antara data yang diberikan dan kecocokan angka normalnya.

Tidak seperti beberapa uji-uji yang lain, uji ini tidak perlu menentukan nilai dari rata-rata dan varian terlebih dahulu, serta valid untuk menguji kenormalan dengan ukuran sampel antara 3 sampai 50. Nilai dari uji statistik Shapiro-Wilk ini adalah positif, yaitu lebih kecil atau sama dengan satu (antara 0 dan 1) (Peng *et al*, 2008).

Uji statistik Shapiro-Wilk ( $SW$ ) dirumuskan sebagai berikut (Marques de Sa, 2007):

$$SW = \frac{\left[ \sum_{i=1}^k a_i (x_{(n-i+1)} - x_{(i)}) \right]^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (18)$$

dimana  $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$  merupakan pengamatan tertata yang bebas dari skala dan titik pusat. Jarak dari kesimetrian nilai data sekitar nilai tengah diukur dengan:

$$(x_{(n-i+1)} - x_{(i)}) \quad ; \quad \text{untuk } i = 1, 2, \dots, k$$

dimana  $k = \frac{(n+1)}{2}$  untuk  $n$  ganjil dan  $k = \frac{(n)}{2}$  untuk  $n$  yang lainnya.

Dengan menggunakan uji statistik Shapiro-Wilk ini akan diuji hipotesis:

$H_0$  : Data ditarik dari populasi yang berdistribusi Normal

$H_1$  : Data ditarik dari populasi yang berdistribusi tidak Normal

Hipotesis nol ini akan ditolak pada taraf nyata  $\alpha$  jika nilai dari uji statistik  $SW$  kurang dari nilai yang terdapat pada Tabel quantil statistik uji Shapiro-Wilk.  $H_0$  tidak dapat ditolak jika nilai dari  $SW$  lebih besar dari nilai Tabel persentil uji Shapiro-Wilk.

### 3.3 Uji Skewness dan Kurtosis

Selain rata-rata dan varian, ada dua pengukuran lain yang dapat memberikan informasi diskriptif tentang suatu distribusi. Dua pengukuran ini adalah Skewness dan Kurtosis yang masing-masing menunjukkan momen ketiga dan momen keempat dari suatu distribusi. Hays & Winkler (1971) dalam Shenkin (2003) mengatakan bahwa peristilahan momen digunakan untuk menunjukkan nilai harapan dari perbedaan kekuatan variabel acak. Persamaan umum untuk suatu momen dirumuskan:

$$m_i = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^i}{n} \quad (19)$$

#### Skewness

Skewness (kemiringan) adalah pengukuran yang menggambarkan derajat untuk distribusi yang simetris. Pengukuran yang paling tepat untuk skewness adalah dengan menggunakan nilai dari momen ketiga di sekitar rata-rata ( $m_3$ ) (Shenkin, 2003):

$$m_3 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^3}{n} \quad (20)$$

Kemudian persamaan (20) digunakan untuk menghitung koefisien uji statistik Skewness yang dilambangkan dengan  $g_1$  dan dirumuskan:

$$g_1 = \frac{m_3}{m_2^{3/2}} = \frac{\sqrt{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{\left\{ \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right\}^{3/2}} \quad (21)$$

D'Agostino *et al.* (1990) dalam Sheskin (2003) mengubah nilai dari  $g_1$  kedalam statistik  $\sqrt{b_1}$ . Ini adalah estimasi dari parameter populasi yang menunjuk pada  $\sqrt{\beta_1}$  yang juga digunakan untuk menggambarkan Skewness dan dirumuskan oleh:

$$\sqrt{b_1} = \frac{(n-2)g_1}{\sqrt{n(n-1)}} \quad (22)$$

Jika distribusinya Normal maka nilai *Skewness*  $\sim N\left(0, \frac{6}{n}\right)$ .

*Interpretasi dari nilai  $\sqrt{b_1}$ :*

- Jika  $\sqrt{b_1} = 0$ , maka distribusi adalah simetris
- Jika  $\sqrt{b_1} > 0$ , maka distribusi akan miring ke kanan
- Jika  $\sqrt{b_1} < 0$ , maka distribusi akan miring ke kiri

Dengan uji statistik Skewness ini akan diuji hipotesis bahwa:

$H_0$ : Distribusi populasi yang menggambarkan sampel adalah simetris ( $\sqrt{b_1} = 0$ )

$H_1$ : Distribusi populasi yang menggambarkan sampel tidak simetris ( $\sqrt{b_1} \neq 0$ )

$H_0$  akan ditolak pada taraf nyata  $\alpha$  jika nilai dari uji satatistik Skewness yang telah distandarlisasi lebih besar dari nilai Distribusi  $t$  dan  $H_0$  tidak dapat ditolak jika nilai dari Skewness lebih kecil dari nilai Distribusi  $t$ .

### **Kurtosis**

Menurut D'Agostino et al (1990) dalam Shenkin (2003), kata kurtosis berarti lengkungan. Secara umum kurtosis didefinisikan sebagai pengukuran yang menggambarkan derajat kelancipan suatu distribusi. Pengukuran kurtosis digunakan untuk menentukan apakah data berasal dari distribusi populasi Normal. Kurtosis menggambarkan momen keempat disekitar rata-rata ( $m_4$ ):

$$m_4 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^4}{n} \quad (23)$$

Kemudian persamaan (23) digunakan untuk menghitung koefisien statistik uji Kurtosis yang dilambangkan dengan  $g_2$  dan dirumuskan:

$$g_2 = \frac{m_4}{m_2^2} = \frac{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{\left\{ \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right\}^2} \quad (24)$$

Pengukuran Kurtosis dengan menggunakan momen keempat ini selalu menghasilkan bilangan positif. Oleh karena itu, pada tahun 1988 Moors mengembangkan suatu bilangan dari pengukuran alternatif untuk Kurtosis, yaitu dengan menghitung  $k_4$  yang dirumuskan oleh:

$$k_4 = \left[ \frac{\left( \left[ \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^4 n(n+1) \right] / (n-1) \right) - 3 \left( \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right)^2}{(n-2)(n-3)} \right] \quad (25)$$

Walaupun pengukuran  $k_4$  ini tidak menggambarkan keadaan yang sesungguhnya dari momen keempat sekitar rata-rata. Tetapi, dengan penggunaan  $k_4$  dapat diasumsikan juga suatu bilangan negatif. Metode ini merupakan metode yang baik untuk mengestimasi Kurtosis. Dengan pengukuran alternatif pada persamaan ini, koefisien uji statistik Kurtosis ( $g_2$ ) dapat juga dihitung dengan:

$$g_2 = \frac{k_4}{s^2} \quad (26)$$

*Interpretasi dari nilai  $g_2$ :*

- Jika  $g_2 = 0$ , maka distribusi adalah mesokurtik
- Jika  $g_2 > 0$ , maka distribusi akan menjadi leptokurtik
- Jika  $g_2 < 0$ , maka distribusi akan menjadi platykurtik

Zar (1999) dalam Shenkin (2003) mengatakan bahwa parameter populasi  $\beta_2$  digunakan untuk menggambarkan Kurtosis. Statistik yang digunakan untuk mengestimasi nilai  $\beta_2$  adalah  $b_2$  yang dirumuskan oleh:

$$b_2 = \frac{(n-2)(n-3)g_2}{(n+1)(n-1)} + \frac{3(n-1)}{(n+1)} \quad (27)$$

Jika distribusinya Normal maka nilai Kurtosis  $\sim N\left(3, \frac{24}{n}\right)$ .

*Interpretasi dari nilai  $b_2$ :*

- Jika  $b_2 = \frac{3(n-1)}{(n+1)}$ , maka distribusinya adalah mesokurtik
- Jika  $b_2 > \frac{3(n-1)}{(n+1)}$ , maka distribusinya akan menjadi leptokurtik
- Jika  $b_2 < \frac{3(n-1)}{(n+1)}$ , maka distribusinya akan menjadi platykurtik

Jika ukuran sampel meningkat maka nilai dari  $b_2$  akan mendekati 3.

Uji statistik Kurtosis ini akan digunakan untuk menguji hipotesis:

$H_0$ : Distribusi populasi yang menggambarkan sampel adalah mesokurtik ( $\beta_2 = 3$ )

$H_1$ : Distribusi populasi yang menggambarkan sampel bukan mesokurtik ( $\beta_2 \neq 3$ )

Jika nilai dari uji statistik Kurtosis yang telah distandarlisasi lebih besar dari nilai Distribusi  $t$  pada taraf nyata  $\alpha$ , maka  $H_0$  akan ditolak dan sebaliknya.

### 3.4 Uji D'Agostino-Pearson (DAP)

Uji D'Agostino-Pearson dikembangkan oleh D'Agostino dan Pearson pada tahun 1973. Uji D'Agostino-Pearson menganalisis data untuk menentukan Skewness (untuk mengukur kesimetrian dari distribusi) dan Kurtosis (untuk mengukur bentuk dari distribusi). Kemudian menghitung seberapa jauh masing-masing dari nilai ini berbeda dari nilai harapan dengan Distribusi Normal dan menghitung nilai  $p$  dari penjumlahan kuadrat dari ketidakcocokan ini. Uji ini adalah kombinasi antara uji D'Agostino Skewness dan Ascombe-Glynn Kurtosis (Oztuna *et al*, 2006). Statistik uji D'Agostino-Pearson dirumuskan sebagai berikut:

$$DAP = Z_{g_1}^2 + Z_{g_2}^2 \quad (28)$$

dimana:

$$Z_{g_1} = E \ln \left( F + \sqrt{F^2 + 1} \right) \quad (29)$$

$$F = \frac{A}{\sqrt{\frac{2}{C-1}}} \quad (30)$$

$$E = \frac{1}{\sqrt{\ln D}} \quad (31)$$

$$D = \sqrt{C} \quad (32)$$

$$C = \sqrt{2(B-1)} - 1 \quad (33)$$

$$B = \frac{3(n^2 + 27n - 70)(n+1)(n+3)}{(n-2)(n+5)(n+7)(n+9)} \quad (34)$$

$$A = g_1 \sqrt{\frac{(n+1)(n+3)}{6(n-2)}} \quad (35)$$

Dan

$$Z_{g_2} = \frac{1 - \frac{2}{9K} - \sqrt[3]{L}}{\sqrt{\frac{2}{9K}}} \quad (36)$$

$$L = \frac{1 - \frac{2}{K}}{1 + H \sqrt{\frac{2}{K-4}}} \quad (37)$$

$$K = 6 + \frac{8}{J} \left[ \frac{2}{J} + \sqrt{1 + \frac{4}{J^2}} \right] \quad (38)$$

$$J = \frac{6(n^2 - 5n + 2)}{(n+7)(n+9)} \sqrt{\frac{6(n+3)(n+5)}{n(n-2)(n-3)}} \quad (39)$$

$$H = \frac{(n-2)(n-3)|g_2|}{(n+1)(n-1)\sqrt{G}} \quad (40)$$

$$G = \frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)} \quad (41)$$

Dengan menggunakan uji statistik D'Agostino-Pearson ini akan diuji hipotesis:

$H_0$  : Sampel berasal dari populasi yang berdistribusi Normal

$H_1$  : Sampel tidak berasal dari populasi yang berdistribusi Normal

Tolak  $H_0$  pada taraf nyata  $\alpha$  jika nilai dari uji statistik D'Agostino-Pearson ( $DAP$ ) lebih besar dari nilai  $\chi^2$  dengan derajat bebas 2 dan  $H_0$  tidak dapat ditolak jika nilai dari  $DAP$  lebih kecil dari nilai  $\chi^2$ .

### 3.5 Uji Jarque Bera ( $JB$ )

Uji ini diusulkan oleh Jarque dan Bera pada tahun 1980 dan hanya digunakan untuk menguji kenormalan. Uji Jarque Bera diketahui mempunyai kekuatan uji yang sangat baik dan mudah dalam perhitungannya serta biasanya digunakan dalam bidang ekonometrik.

Uji ini menghitung koefisien dari Skewness dan Kurtosis dari variabel acak. Jika distribusinya Normal maka Skewness akan bernilai 0 dan Kurtosis bernilai 3. Tetapi, jika sampelnya tidak berdistribusi Normal maka nilai Skewness akan jauh dari nol dan nilai Kurtosis akan jauh dari 3.

uji statistik Jarque Bera yang dirumuskan sebagai berikut (Gujarati, 1999):

$$JB = n \left( \frac{(g_1)^2}{6} + \frac{(g_2 - 3)^2}{24} \right) \quad (42)$$

Uji statistik  $JB$  dihampiri oleh distribusi Kai Kuadrat dengan derajat bebas 2.

Dengan uji Jarque Bera ini akan diuji hipotesis:

$H_0$  : Sampel berasal dari populasi yang berdistribusi Normal

$H_1$  : Sampel tidak berasal dari populasi yang berdistribusi Normal

Tolak  $H_0$  pada taraf nyata  $\alpha$  jika nilai dari uji satatistik Jarque Bera ( $JB$ ) lebih besar dari nilai  $\chi^2$  dengan derajat bebas 2 dan  $H_0$  tidak dapat ditolak jika nilai dari  $JB$  lebih kecil dari nilai  $\chi^2$ .

#### 4. TELADAN PENERAPAN

Sebagai ilustrasi, data yang digunakan untuk menguji kenormalan adalah data simulasi. Simulasi ini terdiri dari data berdistribusi Normal dan Distribusi tidak Normal (distribusi Kai kuadrat, Eksponensial, dan Seragam). Data simulasi ini dibuat dan diolah menggunakan program komputer Microsoft Excel.

##### 4.1 Hasil dan Pembahasan

Suatu uji statistik dikatakan baik jika mempunyai kemungkinan yang kecil untuk menolak  $H_0$  apabila  $H_0$  itu benar dan mempunyai kemungkinan yang besar untuk menolak  $H_0$ , kalau  $H_0$  itu salah. Dalam simulasi ini diharapkan bahwa untuk sampel data yang berdistribusi Normal, hipotesis nol yang menyatakan sampel data berasal dari populasi yang berdistribusi Normal diterima, sedangkan untuk sampel yang berasal dari distribusi tidak Normal (distribusi Kai kuadrat, Eksponensial, dan Seragam) diharapkan hipotesis nol ditolak. Tabel di bawah ini merupakan persentase penolakan dari simulasi yang dilakukan untuk setiap uji kenormalan.

**Tabel 1.** Persentase Penolakan untuk Tiap Tipe Distribusi

Uji Statistik	Persentase Penolakan			
	Normal	Kai Kuadrat	Eksponensial	Seragam
Lilliefors	2.39	7.15	81.82	15.36
Shapiro-Wilk	4.48	38.76	100	86.10
Skewness	3.23	36.68	97.20	0
Kurtosis	2.29	13.06	58.74	7.17
D'Agostino-Pearson	79.79	91.29	100	99.89
Jarque Bera	3.12	28.70	93.29	0

Untuk sampel data yang berdistribusi Normal diharapkan bahwa persentase penolakan yang diberikan oleh keenam uji kenormalan ini harus lebih kecil dari persentase penerimaannya. Lima dari enam uji ini telah sesuai dengan yang diharapkan, karena persentase penolakannya lebih kecil dari persentase penerimaannya. Hal ini sesuai dengan kenyataan bahwa sampel yang digunakan berasal dari Distribusi Normal. Tetapi, ada satu uji yaitu D'Agostino-Pearson yang tidak sesuai dengan yang diharapkan karena persentase penolakannya lebih besar dari persentase penerimaannya. Hal ini disebabkan oleh perhitungan uji ini menggunakan gabungan dari hampiran distribusi sampel untuk Skewness dan Kurtosis. Jika semakin jauh perbedaan antara nilai Skewness dan Kurtosis dari simulasinya dengan nilai Skewness dan Kurtosis untuk Distribusi Normal, maka kemungkinan penolakan hipotesis nol oleh uji D'Agostino-Pearson ini semakin besar.

Sedangkan untuk sampel data yang berdistribusi tidak Normal diharapkan bahwa persentase penolakan harus lebih besar dari pada persentase penerimaan. Dari Tabel 7 di atas dapat dilihat bahwa untuk sampel data yang berdistribusi Eksponensial, persentase penolakan dari semua uji ini lebih besar dari persentase penerimaannya. Ini sesuai dengan kenyataan bahwa sampel data yang digunakan berasal dari populasi berdistribusi tidak normal .

Tetapi, dari sampel data yang berdistribusi tidak Normal lainnya (Kai Kuadrat dan Seragam) tidak semua uji memenuhi kriteria ini. Hal ini disebabkan oleh parameter yang digunakan dalam simulasi ini merupakan bilangan bulat acak yang berbeda-beda. Untuk Distribusi Kai Kuadrat disebabkan oleh  $db$ , jika  $db$  semakin besar maka kemungkinan uji-uji statistik ini untuk menolak hipotesis bahwa sampel data berdistribusi Normal semakin kecil. Sedangkan untuk Distribusi Seragam disebabkan oleh parameter  $a$  dan  $b$ , jika semakin kecil nilai dari parameter  $a$  dan  $b$  yang digunakan, maka kemungkinan uji-uji kenormalan ini untuk menolak hipotesis nol semakin kecil.

## 5. Kesimpulan

- Distribusi Normal merupakan distribusi yang paling penting karena distribusi ini memberikan hampiran yang baik terhadap distribusi teoritis lainnya dan banyak uji statistik yang mengasumsikan datanya mengikuti Distribusi Normal dalam proses analisisnya..
- Secara keseluruhan uji kenormalan yang baik untuk sampel data berdistribusi Normal maupun tidak Normal adalah uji Shapiro-Wilk karena uji ini merupakan pengamatan tertata yang bebas dari skala dan titik pusat serta tergantung pada korelasi antara data yang diberikan dan kecocokan angka normalnya. Sedangkan uji statistik D'Agostino-Pearson dianjurkan untuk data yang dibangkitkan dari Distribusi tidak Normal.

## DAFTAR PUSTAKA

- Conover, W.J. 1971. *Practical Nonparametric Statistics*. John Wiley and Sons. New York
- Dajan, A. 1986. *Pengantar Metode Statistik*. PT Pustaka LP3ES. Jakarta
- Dixon, W.J. & F.J. Massey. 1991. *Pengantar Analisis Statistik*. Gadjah Mada University Press. Yogyakarta
- Djarwanto. 2001. *Mengenal Beberapa Uji Statistik dalam Penelitian*. Liberty. Yogyakarta
- Furqon. 2004. *Statistika Terapan untuk Penelitian*. Alfabeta. Bandung
- Gujarati, D. 1999. *Essentials of Econometrics*. McGraw Hill. Boston
- Hogg, R.V and E.A. Tanis. 1989. *Probability and Statistical Inference*. MACMILLAN Publishing Company. New York
- Keskin, S. 2006. *Comparison of Several Normality Test Regarding Type I Error Rate and Power of the 11 Simulation Based Small Samples*. <http://www.insinet.net/jasr/2006/296-300.pdf>
- Mandes, M and A. Pala. 2003. *Type I Error Rate and Power of Three Normality Tests*. <http://www.ansijournals.com/itj/2003/135-139.pdf>
- Marques de Sa, J.P. 2007. *Applied Statistics Using SPSS, STATISTICAL, MATLAB, and R*. Springer Berlin Heidelberg. New York
- Nasoetion, A.H. dan Barizi. 1985. *Metode Statistika untuk Penarikan Kesimpulan*. PT Gramedia. Jakarta

- Oztuna, D. *et al.* 2006. *Investigation of Four Different Normality Tests in Terms of Type I Error Rate and Power Under Different Distributions*.  
<http://journals.tubitak.gov.tr/medical/issues/sag.06-36-3/sag-363-7-0510-10.pdf>
- Patria, B. 2008. *Uji Kenormalan*.  
[http://inparametric.com/bhinablog/download/uji\\_normalitas.pdf](http://inparametric.com/bhinablog/download/uji_normalitas.pdf)
- Peng, G. *et al.* 2004. *Testing Normality of Data Using SAS*.  
<http://www.lexjansen.com/pharmasug/2004/posters/po04.pdf>
- Ross, S.M. 1987. *Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists*. John Wiley & Sons. New York
- Seber, G.A.F. 1984. *Multivariate Observation*. John Wiley and Sons. New York
- Sheskin, D.J. 2003. *Parametric and Nonparametric Statistical Procedure*. Chapman and Hall (CRC). Boca Raton
- Walpole, R.E. and R.H. Myers. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistik untuk Insinyur dan Ilmuwan*. ITB. Bandung

# KAJIAN METODE PENGKLASTERAN HIRARKI DENGAN BERBAGAI PENGUKURAN JARAK

Isma Afrita Lubis<sup>1</sup>, Sigit Nugroho<sup>2</sup> dan Baki Swita<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Alumni Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Bengkulu

<sup>2</sup>Dosen Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Bengkulu

## ABSTRACT

The aim of this research are to study distance measurement methods in hierarchical clustering and to know the difference of hierarchical clustering methods according distance measurement concept. Clustering is based on similarity or dissimilarity measure between objects. Eight distance measurement methods are used in this research such as *Euclid*, *Euclid Square*, *Mahalanobis*, *Minkowski*, *City-Block* atau *Manhattan*, *Chebychev*, *Canberra*, and *Czekanowski* distance.

The method of this research is literature riview. Based that, data of percentage of resident according to the city and the last sertificate in Bengkulu province. Is used to apply some clustering methods. The result of dendogram and cluster membership table, indicate that *Mahalanobis* and *Czekanowski* distance have different clustering. *Euclid* and *Minkowski* distance have similar clustering. *Euclid Square* and *City-Block* or *Manhattan* are the best distance.

Keyword: *Hierarchical Clustering*, *Distance*, *Dendogram*, and *Cluster Membership*

## PENDAHULUAN

Analisis kluster bertujuan meminimalisasikan variasi di dalam satu kluster dan memaksimalkan variasi antar kluster (Agusta, 2007). Setiap pengklasteran objek hanya masuk ke dalam satu kluster dan tidak tumpang tindih (*overlapping* atau *interaction*).

Pada analisis kluster ukuran kemiripan atau ketidakmiripan yang digunakan adalah jarak (*distance*). Jarak merupakan selisih antara dua objek. Pengklasteran didasarkan pada ukuran kemiripan (*similarity*) atau ketidakmiripan (*dissimilarity*) antar objek. Ada beberapa metode untuk mengukur jarak antara dua objek dengan ukuran kedekatan yang berbeda yaitu jarak *Euclid*, kuadrat *Euclid*, *Minkowski*, *City-Block* atau *Manhattan*, *Mahalonobis*, *Chebychev*, *Canberra*, dan *Czekanowski*.

Metode pengklasteran hirarki terdiri dari: metode penggabungan (*Agglomerative Methods*) dan pemecahan (*Devisive Methods*). Metode agglomeratif atau penggabungan terbagi menjadi tiga bagian yaitu: metode pautan (*Linkage Method*), centroid, dan varian. Metode pengukuran jarak berperan pada pengklasteran hirarki dan untuk mengetahui perbedaan yang berarti pada berbagai pengukuran jarak berdasarkan metode pengklasteran hirarki. Agar lebih terarah, pengklasteran dibatasi hanya untuk metode hirarki. Untuk lebih memahami konsep maka dilakukan peneapan data sebagai validasi dengan menggunakan *software SPSS* dan program *microsoft excel*.

## LANDASAN TEORI

### Pengertian dan Asumsi Analisis Klaster

Analisis klaster merupakan suatu analisis untuk mengelompokkan objek atau observasi berdasarkan karakteristik yang dimilikinya.

Dalam analisis klaster, setiap objek yang paling dekat kesamaannya akan berada pada kelompok yang sama. Kelompok-kelompok yang terbentuk harus memiliki homogenitas (kesamaan) yang tinggi antar anggota dalam satu klaster (*whithin-cluster*), dan heterogenitas (perbedaan) yang tinggi antar klaster yang satu dengan yang lainnya (*between cluster*).

Homogenitas dan heterogenitas merupakan dua hal yang harus dimiliki sebuah klaster agar kedua itu dapat dikatakan baik. Pengklasteran yang baik adalah pengklasteran yang setiap objek hanya masuk ke dalam satu klaster atau menjadi anggota dari salah satu klaster sehingga tidak terjadi tumpang tindih.

Istilah analisis klaster pertama kali digunakan oleh Tryon (1939) (Anonim, 2008c). Analisis ini dilakukan bertujuan untuk: mereduksi data menjadi data baru dengan jumlah lebih kecil, melakukan generalisasi suatu populasi untuk memperoleh suatu hipotesis, dan menduga karakteristik data.

Asumsi-asumsi yang harus dipenuhi dalam analisis klaster adalah (Anonim, 2008b): ukuran sampel harus benar-benar mewakili seluruh populasi dan tidak terjadi multikolinearitas.

### Pengukuran Kemiripan atau Ketidak miripan antar Objek

Langkah pertama dalam analisis klaster adalah menentukan matriks data yaitu  $\mathbf{X}$  ( $n \times p$ ), dimana  $n$  adalah ukuran kedekatan objek dan  $p$  merupakan variabel (Hardle & Simar, 2007). Pengelompokan didasarkan pada ukuran kemiripan (*similarity*) atau ketidakmiripan (*dissimilarity*) antar objek. Hal ini dilakukan untuk memperoleh matriks *proximity*, yaitu matriks persegi dan simetri dengan jumlah objek yang sama pada baris dan kolom. Matriks *proximity* memuat semua pasangan kemiripan atau ketidakmiripan diantara objek yang akan diobservasi. Jika  $x_i$  dan  $x_j$  adalah objek ke- $i$  dan ke- $j$  maka nilai pada baris ke- $i$  dan kolom ke- $j$  dari matriks *proximity* adalah *similarity* atau *dissimilarity* antara  $x_i$  dan  $x_j$  (Anonim, 2000).

Bentuk matriks *proximity* objek adalah  $\mathbf{D}$  ( $n \times n$ )

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix} \quad (1)$$

matriks  $\mathbf{D}$  merupakan ukuran *similarity* atau *dissimilarity* antara  $n$  objek. Matriks ini mempunyai elemen  $d_{ij}$ , dimana  $i = 1, 2, \dots, n$  dan  $j = 1, 2, \dots, n$ , elemen  $d_{ij} > 0$  jika  $i \neq j$  dan  $d_{ij} = 0$  jika  $i = j$ . Sehingga diperoleh matriks jarak sebagai berikut:

$$d = \begin{bmatrix} 0 & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & 0 & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Semakin kecil nilai  $d$ , maka semakin besar kemiripan antar kedua pengamatan tersebut. Sebaliknya bila  $d$  besar, semakin besar ketidakmiripan dari pengamatan tersebut.

Ada beberapa metode yang digunakan untuk mengukur kemiripan antar objek (Santoso, 2004):

- a. Mengukur jarak antar dua objek  
Mengukur jarak antar dua objek ini berbentuk matriks simetri  $n \times n$  yang berisi kemiripan atau ketidakmiripan antar objek sehingga jarak dua objek bisa langsung diukur.
- b. Mengukur korelasi antar sepasang objek pada beberapa variabel.  
Pada metode ini data berbentuk matriks. Kemiripan antar objek didapat dengan transformasi satu-satu sehingga indeks ketidakmiripan bisa dikonversi menjadi indeks.
- c. Mengukur asosiasi antar objek.  
Untuk mengukur asosiasi antar objek data tidak berbentuk matriks (nominal atau ordinal). Nominal adalah skala pengukuran berbentuk angka yang digunakan untuk menggolongkan suatu objek atau karakteristik. Sedangkan ordinal adalah skala pengukuran berbentuk angka selain berguna sebagai nominal juga menunjukkan urutan.

Analisis kluster didasarkan pada ukuran kemiripan atau ketidakmiripan antar data. Ukuran kemiripan atau ketidakmiripan yang digunakan adalah jarak (*distance*). Jika  $d(p, q)$  menyatakan jarak (*dissimilarity*) antar objek  $p$  dan  $q$  maka terdapat beberapa sifat-sifat jarak (Johnson & Winchern, 2002) yaitu:

- i.  $d(p, q) = d(q, p)$  untuk semua  $p$  dan  $q$
- ii.  $d(p, q) > 0$  jika  $p \neq q$
- iii.  $d(p, q) = 0$  jika dan hanya jika  $p = q$
- iv.  $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$  untuk semua objek  $p, q$  dan  $r$

## Metode Pengklasteran Hirarki dengan Berbagai Pengukuran Jarak

### Pengukuran Jarak Pada Pengklasteran Hirarki

#### Jarak *Euclid*

Jarak *Euclid* adalah ukuran ketidakmiripan yang sering digunakan, merupakan jarak geometris diruang multidimensional (Anonim, 2008c). Jarak ini digunakan jika variabel-variabel yang digunakan tidak berkorelasi satu sama lain atau saling ortogonal, yang memiliki satuan dan skala pengukuran yang sama (Anonim, 2008e). Jarak ini cukup fleksibel untuk dilakukan modifikasi dalam mengatasi kelemahan data. Jarak *Euclid* merupakan jarak terpendek yang didapat antara dua titik dalam perhitungan.

Ukuran jarak *Euclid* antar dua objek  $\mathbf{x}' = [x_1, x_2, \dots, x_p]$  dan  $\mathbf{y}' = [y_1, y_2, \dots, y_p]$  yang berdimensi  $p$  adalah (Johnson & Winchern, 2002):

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_p - y_p)^2}$$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^p (x_i - y_i)^2} \quad (3)$$

### Jarak Kuadrat *Euclid*

Jarak kuadrat *Euclid* adalah jumlah kuadrat yang berbeda dari nilai antara dua objek pada seluruh variabel (Fiedling, 2007). Jarak kuadrat *Euclid* antara dua objek  $x$  dan  $y$  pada ruang berdimensi  $p$  adalah

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^p (x_i - y_i)^2 \quad (4)$$

### Jarak *Mahalanobis*

Jika diantara variabel-variabel yang digunakan saling berkorelasi maka perlu dilakukan transformasi data. Transformasi ini berfungsi untuk menghilangkan pengaruh keragaman data atau dengan kata lain, semua variabel memberikan kontribusi yang sama untuk jarak (Anonim, 2008a). Jika tidak dilakukan transformasi data dapat digunakan jarak *Mahalanobis*.

Jarak ini menggunakan variabel dengan sampel matriks varian-kovarian, karena matriks kovarian juga menggunakan rata-rata korelasi diantara variabel. Jarak *Mahalanobis* antara objek  $x$  dan  $y$  dapat dinyatakan dalam bentuk

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{y})' S^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \quad (5)$$

dimana  $S^{-1}$  adalah invers matriks varian-kovarian.

### Jarak *Minkowski*

Jarak *Minkowski* ditemukan oleh Herman Minkowski (1864-1909) (Anonim, 2008d). Pengukuran jarak *Euclid* merupakan turunan umum dari rumus jarak *Minkowski*, yaitu jika  $m = 2$ . Jarak *Minkowski* dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left[ \sum_{i=1}^p |x_i - y_i|^m \right]^{\frac{1}{m}} \quad (6)$$

dimana  $m$  adalah parameter. Jarak *Minkowski* menghasilkan penekanan yang lebih besar pada perbedaan antar koordinat jika dipilih  $m > 1$ .

### Jarak *City-Block* atau *Manhattan*

Jarak *Block* atau *Manhattan* adalah jumlah nilai perbedaan mutlak untuk setiap variabel (Supranto, 2004). Ukuran jarak ini menghasilkan jarak yang serupa dengan jarak *Euclid* untuk beberapa kasus tertentu. Jarak ini mempunyai kelebihan yaitu dapat mendeteksi keberadaan outlier dengan baik (Agusta, 2007). Jarak *City-Block* atau *Manhattan* diturunkan dari persamaan (6) untuk  $m = 1$ , sehingga jarak *City-Block* atau *Manhattan* dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^p |x_i - y_i| \\ &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_p - y_p| \end{aligned} \quad (7)$$

### Jarak *Chebychev*

Jarak *Chebychev* antara dua objek adalah nilai perbedaan mutlak yang maksimum pada tiap variabel. Pengukuran jarak ini sangat sensitif terhadap objek yang mempunyai outlier. Jarak *Chebychev* dinyatakan dalam bentuk

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max |x_i - y_i| \quad (8)$$

### Jarak *Canberra*

Jarak *Canberra* adalah jumlah nilai perbedaan mutlak dibagi dengan jumlah antara dua variabel. (Johnson & Wichern, 2002). Jarak ini dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^p \frac{|x_i - y_i|}{(x_i + y_i)} \quad (9)$$

Ukuran jarak *Canberra* digunakan hanya untuk variabel yang bernilai positif.

### Jarak *Czekanowski*

Jarak *Czekanowski* merupakan selisih antara satu dengan dua kali jumlah minimum dari nilai variabel satu dengan variabel lainnya dibagi dengan jumlah antara dua variabel. Jarak ini dapat dirumuskan sebagai berikut (Johnson & Wichern, 2002):

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1 - \frac{2 \sum_{i=1}^p \min(x_i, y_i)}{\sum_{i=1}^p (x_i + y_i)} \quad (10)$$

Jarak *Czekanowski* juga digunakan untuk variabel yang bernilai positif.

### **Macam-macam Metode Pengklasteran Hirarki**

Pengklasteran hirarki atau tingkatan merupakan salah satu metode dari beberapa jenis analisis kluster. Metode pengklasteran hirarki atau *hierarchical clustering methods* adalah metode yang digunakan untuk mencari struktur pengklasteran dari objek-objek dan banyaknya kluster yang dibentuk belum diketahui.

Proses pengklasteran diawali dengan melihat setiap objek  $n$  sebagai satu kluster, sehingga jumlah kluster sebanyak jumlah objeknya. Dua objek atau kluster yang sangat mirip adalah objek yang pertama kali digabungkan menjadi satu kluster, sehingga jumlah kluster menjadi  $n - 1$ . Jarak kluster baru dengan kluster sebelumnya dihitung kembali. Demikian seterusnya sehingga kluster akan membentuk semacam dendogram atau grafik pohon, dimana ada hirarki atau tingkatan yang jelas antar objek dari yang sangat mirip sampai dengan yang tidak mirip. Sehingga semua objek pada akhirnya membentuk satu kluster.

### **Metode Penggabungan (*Agglomerative Methods*)**

Metode penggabungan sering juga disebut sebagai metode aglomeratif. Metode ini adalah metode yang masing-masing objek dianggap satu kluster tersendiri, kemudian objek-objek yang sangat mirip berdasarkan ukuran jarak yang terdekat bergabung menjadi satu kluster.

Metode aglomeratif terdiri dari tiga metode yaitu: metode pautan (*Linkage Methods*), *Centroid*, dan Varian (*Ward Methods*).

## Metode Pautan (*Linkage Methods*)

Menurut Johnson & Winchern (2002), metode pautan (*Linkage Methods*) terdiri dari tiga jenis, yaitu: pautan tunggal (*Single Linkage*), pautan lengkap (*Complete Linkage*), dan pautan rata-rata (*Average Linkage*).

### 1. Metode Pautan Tunggal (*Single Linkage Methods*)

Metode pautan tunggal dilakukan dengan meminimumkan jarak antar kluster yang digabungkan, atau dengan kata lain metode yang mengklusterkan dua objek yang mempunyai jarak terdekat terlebih dahulu. Jarak antar kluster di bentuk dari individu-individu dalam dua kluster yang mempunyai jarak terkecil atau kemiripan terbesar. Metode ini dimulai dengan menentukan jarak terkecil dalam matriks *proximity*  $\mathbf{D} = \{d_{ik}\}$  dan gabungkan objek-objek yang memiliki jarak terkecil tersebut, misal  $U$  dan  $V$ , sehingga diperoleh kluster  $(UV)$ . Untuk mencari kluster antara  $(UV)$  dan kluster  $W$  lainnya dapat diperoleh dengan cara sebagai berikut:

$$d_{(UV)W} = \min \{d_{UW}, d_{VW}\} \quad (11)$$

keterangan:

$d_{UW}$  adalah jarak terdekat dari kluster  $U$  dan  $W$

$d_{VW}$  adalah jarak terdekat dari kluster  $V$  dan  $W$

### 2. Metode Pautan Lengkap (*Complete Linkage Methods*)

Metode ini hampir sama dengan metode pautan tunggal hanya saja metode pautan lengkap menggunakan jarak terjauh. Metode pautan lengkap adalah metode yang mengklusterkan dua objek yang mempunyai jarak terjauh terlebih dahulu. Pengklasteran dimulai dengan mencari jarak pada matriks *proximity*  $\mathbf{D} = \{d_{ik}\}$  dan penggabungan antara  $U$  dan  $V$  untuk mendapatkan kluster pertama atau  $(UV)$ . Selanjutnya jarak antara  $(UV)$  dan setiap kluster dihitung dengan:

$$d_{(UV)W} = \max \{d_{UW}, d_{VW}\} \quad (12)$$

keterangan:

$d_{UW}$  adalah jarak terjauh dari kluster  $U$  dan  $W$

$d_{VW}$  adalah jarak terjauh dari kluster  $V$  dan  $W$

### 3. Metode Pautan Rata-rata (*Average Linkage Methods*)

Metode ini mengklusterkan objek berdasarkan jarak rata-rata yang didapat dengan melakukan rata-rata semua jarak antar objek terlebih dahulu. Jarak antara dua kluster didefinisikan sebagai rata-rata jarak antara semua pasangan objek, di mana salah satu anggota dari pasangan berasal dari setiap kluster. Jarak metode pautan rata-rata dinyatakan dengan:

$$d_{(UV)W} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n d_{ik}}{N_{(UV)}N_W} \quad (13)$$

keterangan:

$d_{ik}$  adalah jarak antara objek  $i$  pada klaster ( $UV$ ) dengan objek  $k$  pada klaster  $W$

$N_{(UV)}$  adalah jumlah objek pada klaster ( $UV$ )

$N_W$  adalah jumlah objek pada klaster  $W$

### Metode Centroid

Metode *centroid* adalah metode yang menggunakan rata-rata jarak pada sebuah klaster, yang diperoleh dengan cara menghitung rata-rata pada setiap variabel untuk semua objek. Pada metode ini, jarak antar dua klaster adalah jarak diantara dua *centroid* klaster-klaster tersebut. Dengan metode ini, setiap terjadi klaster baru segera terjadi perhitungan ulang *centroid* sampai terbentuk klaster yang tetap (Sokal & Michener, 1958 dalam Seber, 1984).

Jika  $\bar{x}_1 = \sum_{i \in U} \frac{x_i}{N_1}$  adalah *centroid* dari objek-objek dalam klaster  $U$  dan  $\bar{x}_2 = \sum_{i \in V} \frac{x_i}{N_2}$

adalah *centroid* dari objek-objek dalam klaster  $V$ , maka jarak antara dua klaster didefinisikan sebagai berikut:

$$d_{(UV)W} = d(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \quad (14)$$

dimana  $d$  adalah ukuran matriks *proximity*

*Centroid* klaster baru yang terbentuk didapat dengan rumus

$$\bar{x} = \frac{N_1 \bar{x}_1 + N_2 \bar{x}_2}{N_1 + N_2} \quad (15)$$

keterangan:

$N_1 = N_2$  adalah banyaknya objek

### Metode Varian

Metode varian sering juga disebut sebagai metode *Ward*. Metode ini menggunakan perhitungan yang lengkap dan memaksimalkan homogenitas di dalam satu klaster. Homogenitas atau kemiripan pada setiap klaster diukur dengan jumlah kuadrat objek-objek di dalam klaster, yang lebih dikenal sebagai *error sum of squares* (ESS). Nilai ESS digunakan sebagai fungsi objektif dan didefinisikan sebagai berikut (Dillon & Goldstein (1984)):

$$ESS = \sum_{j=1}^k \left( \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 - \frac{1}{n_j} \left( \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij} \right)^2 \right) \quad (16)$$

Keterangan

$x_{ij}$  : Nilai objek ke-  $i$  pada klaster ke-  $j$

$k$  : Jumlah klaster setiap *stage*

$n_j$  : Jumlah objek ke-  $i$  pada klaster ke-  $j$

Ward (1963) dalam Anonim (2008a), mengusulkan penggunaan metode yang didasarkan pada hasil informasi yang minimum dari kenaikan pada jumlah kuadrat deviasi rata-rata klaster. Metode *Ward* juga dikenal dengan metode varian minimum dan harus menggunakan jarak kuadrat *Euclid* dengan menggunakan bantuan komputer.

### Metode Pemecahan (*Devisive Methods*)

Metode pemecahan sering juga disebut sebagai metode *devisif*. Metode ini merupakan kebalikan dari metode *aglomeratif*. Metode *devisif* yaitu metode yang pada mulanya seluruh

objek dianggap berada dalam satu kluster. Kemudian kluster tersebut dipecah menjadi beberapa kluster kecil. Objek yang berada dalam satu kluster kecil sangat berbeda dengan objek yang berada pada kluster kecil lainnya. Selanjutnya setiap kluster kecil dipecah lagi menjadi beberapa kluster kecil berdasarkan ukuran ketidakmiripannya.

William & Lance *dalam* Seber (1984), menyatakan metode devisif lebih menguntungkan dibandingkan dengan metode aglomeratif. Metode devisif tidak dilanjutkan ketika didapat  $n$  kluster yang mempunyai satu objek. Jika terdapat jumlah variabel yang lebih sedikit dibandingkan objek, maka perhitungan yang dibutuhkan juga sedikit yaitu  $d^2$  jika dibandingkan dengan perhitungan devisif yang didekati oleh  $(n-1)^2$ . Tetapi metode ini jarang digunakan karena tidak semua *software* menyediakan fasilitas metode devisif (Anonim, 2008a).

## Aplikasi Metode Pengklasteran Hirarki

### *Deskripsi Data*

Data yang digunakan pada penelitian ini adalah data sekunder, pengujian nilai awal, Pada data tersebut tidak terlihat adanya variasi dalam satuan atau tidak terdapat perbedaan yang mencolok. Perbedaan data yang besar akan membuat perhitungan menjadi tidak valid (Santoso, 2004). Oleh karena itu, data tidak perlu ditransformasi.

Sebelum dilakukan pengklasteran hirarki terlebih dahulu dilakukan pengujian terhadap asumsi-asumsi yang harus dipenuhi. Asumsi-asumsi tersebut yaitu sampel yang diambil harus mewakili populasi yang ada dan tidak terjadi multikolinearitas.

Penelitian ini menggunakan total sampling yaitu populasi. Dengan demikian asumsi bahwa sampel yang diambil harus benar-benar dapat mewakili populasi yang ada telah terpenuhi.

Multikolinearitas terjadi jika ada hubungan linier yang sempurna di antara beberapa atau semua variabel bebas (Rahardianto, 2008). Untuk mengetahui ada tidaknya multikolinearitas antar variabel dilakukan dengan menggunakan matriks korelasi (Lampiran 2). Untuk nilai korelasi negatif yang digunakan adalah nilai mutlaknya (Winchern, 2002).

### *Proses dan Hasil Pengklasteran*

Proses pengklasteran hirarki dilakukan dengan menggunakan *software* SPSS versi 11.5 *for Windows* dan Microsoft EXCEL. Pemilihan *software* SPSS dikarenakan hampir setiap literatur menyarankan menggunakan *software* ini. Sedangkan Microsoft EXCEL digunakan karena ada tiga metode jarak yang tidak terdapat di *software* SPSS. Metode jarak tersebut yaitu: jarak *Mahalanobis*, *Canberra*, dan *Czekanowski*.

Jarak *Mahalanobis* menggunakan sampel matriks varian-kovarian. Untuk mendapatkan nilai matriks varian-kovarian dengan jarak *Mahalanobis* dapat dicari dengan menggunakan *software* MINITAB 14.

Metode pengklasteran hirarki dilakukan dengan memperhatikan ukuran kemiripan antar objek yang terdapat dalam matriks *proximity*.

Metode pautan (*Linkage Methods*) terdiri dari pautan tunggal (*Single Linkage*), pautan lengkap (*Complete Linkage*), dan pautan rata-rata (*Average Linkage*). Pada metode ini tidak ada sumber yang mengharuskan menggunakan jarak tertentu untuk mendapatkan matriks *proximity*nya. Untuk itulah digunakan semua metode jarak.

Hasil pengklasteran berdasarkan konsep pengukuran jarak menunjukkan bahwa jarak yang berbeda memberikan hasil pengklasteran yang hampir sama. Dari analisis yang dilakukan diperoleh hasil pengklasteran dengan metode pengukuran jarak *Euclid*, Kuadrat *Euclid*, dan *Minkowski* memberikan hasil pengklasteran yang sama persis pada setiap metode pengklasteran hirarki. Sedangkan pengukuran jarak *City-Block* atau *Manhattan*, *Chebyshev*, *Mahalanobis*, *Canberra*, dan *Czekanowski* menghasilkan pengklasteran yang berbeda, namun perbedaannya tidak terlalu mencolok.

Output metode pengklasteran hirarki disajikan secara visual berbentuk dendogram yaitu suatu bagan yang menyajikan banyaknya klaster terbesar hingga terkecil. Dendogram masing-masing metode dengan berbagai konsep pengukuran jarak yang menghasilkan pengklasteran yang berbeda-beda dapat dilihat pada Lampiran 4.

Dendogram dibaca dari kiri ke kanan. Garis tegak lurus menunjukkan objek yang digabung membentuk satu klaster. Sedangkan posisi garis pada skala menunjukkan jarak klaster yang digabung. Adapun skala yang digunakan bukanlah koefisien yang ada pada tabel *Agglomeration*, namun telah dilakukan proses skala ulang dengan batasan 0 sampai 25. Proses agglomerasi dimulai pada skala 0, dengan ketentuan jika sebuah garis dekat dengan angka 0, maka variabel-variabel yang mewakili garis tersebut semakin membentuk sebuah klaster.

Tabel Agglomerasi di bawah ini menunjukkan cara penggabungan klaster setiap tahap pada metode pautan tunggal (*Single Linkage*) dengan menggunakan jarak *Euclid*.

Pada tahap pertama terbentuk satu klaster dengan objek 5 (Kaur) dan objek 9 (Kepahiang). Nilai pada kolom koefisien menyatakan jarak antar objek seperti yang terlihat pada matriks *proximity*. Nilai koefisien tersebut didapat dari jarak yang digunakan. Karena proses agglomerasi dimulai dengan menggabungkan dua variabel yang terdekat, maka jarak kedua variabel tersebut merupakan jarak terdekat dari sekian banyak kombinasi jarak dari 9 objek. Sehingga semakin kecil nilai koefisien pada tabel agglomerasi berarti semakin mirip atau dekat satu objek dengan objek yang lain. Sebaliknya, semakin besar nilai koefisien pada tabel agglomerasi berarti semakin tidak mirip satu objek dengan objek yang lain.

Kolom *next stage* menyatakan tahapan lanjutan dari penggabungan objek dengan objek yang baru saja digabungkan. Pada tahap pertama terlihat angka 2. Hal ini berarti langkah pengklasteran selanjutnya adalah menggabungkan objek 2 dengan klaster yang baru saja terbentuk, yaitu objek 5 dan 9. Demikian seterusnya sampai langkah terakhir yakni langkah 8.

Pada dendogram metode pautan tunggal (*Single Linkage*) dengan jarak *Euclid*, terlihat sebagai tahap pertama objek (Kaur, Lebong, dan Kepahiang) membentuk satu klaster tersendiri, karena mempunyai panjang garis yang sama dan bergabung menjadi satu kesatuan. Demikian juga dengan objek (Bengkulu Utara dan Seluma) membentuk klaster tersendiri. Hasil dendogram metode ini dapat dilihat pada Gambar 4.1.

Sebaliknya objek (Mukomuko, Bengkulu Selatan, Rejang Lebong, dan kota Bengkulu) tidak bergabung dengan objek-objek sebelumnya, karena mempunyai garis yang lebih panjang. Dengan demikian, pada proses pertama telah terbentuk enam klaster yaitu: dua klaster yang mempunyai anggota lebih dari satu objek (Kaur, Lebong, dan Kepahiang), (Bengkulu Utara dan Seluma), dan empat klaster berdiri sendiri.

Kemudian proses dilanjutkan, objek (Bengkulu Selatan) bergabung dengan objek (Bengkulu Utara dan Seluma). Demikian seterusnya, proses ini berjalan ke arah kanan, dengan menggunakan petunjuk panjang garis yang semakin ke kanan. Sehingga pada akhirnya, semua objek akan bergabung menjadi satu klaster.



### Interpretasi Profil dan Akses Validitas Klaster

Hasil dari pemecahan metode pengklasteran hirarki diperoleh 3 pemecahan hasil pengklasteran dan pengambilan banyaknya klaster ini bersifat subjektif. Hasil pemecahan dari anggota metode pengklasteran hirarki dengan menggunakan metode pautan tunggal (*Single Linkage*), pautan lengkap (*Complete Linkage*), pautan rata-rata (*Average Linkage*), *Ward method*, dan metode *centroid* berdasarkan konsep pengukuran jarak Kuadrat *Euclid*, menghasilkan *Cluster membership* yang sama.

Hasil pemecahan pengklasteran dengan metode pautan tunggal (*Single Linkage*) berdasarkan konsep pengukuran jarak *Euclid*, *Minkowski*, *Chebychev*, *City-Block* atau *Manhattan*, dan *Canberra*, diperoleh hasil pemecahan pengklasteran yang sama persis dengan pengukuran jarak Kuadrat *Euclid*. Tetapi, pada pengukuran jarak *Mahalanobis* dan *Czekanowski* menghasilkan *cluster membership* yang berbeda dengan jarak-jarak yang lain.

Pada metode pautan rata-rata (*Average Linkage*) dengan menggunakan konsep pengukuran jarak *Euclid*, *Minkowski*, *Chebychev*, *City-Block* atau *Manhattan*, juga diperoleh hasil pemecahan *cluster membership* yang sama persis dengan jarak Kuadrat *Euclid*. Tetapi, pada pengukuran jarak *Mahalanobis*, *Canberra*, dan *Czekanowski* menghasilkan *cluster membership* yang berbeda dengan jarak-jarak yang lain.

Pada metode pautan lengkap (*Complete Linkage*) hanya pengukuran jarak *City-Block* atau *Manhattan* yang hasil pemecahan *cluster membership* sama dengan Kuadrat *Euclid*. Sedangkan pada pengukuran jarak-jarak yang lain hasil pemecahan *cluster membership* berbeda-beda.

### Kesimpulan dan Saran

Dari delapan pengukuran jarak yang digunakan dengan data yang ada, jarak *Mahalanobis* dan *Czekanowski* menghasilkan pengklasteran yang sangat berbeda. Hal ini terlihat dari hasil dendrogram dan tabel *cluster membership*. Jarak *Euclid* dan *Minkowski* menghasilkan pengklasteran yang sama, karena pengukuran jarak *Euclid* merupakan turunan umum dari jarak *Minkowski*. Selanjutnya, hasil analisis menunjukkan bahwa jarak yang paling baik adalah jarak Kuadrat *Euclid* dan *City-Block* atau *Manhattan*, karena setiap metode yang digunakan menghasilkan pengklasteran yang sama, baik dilihat dari dendrogram maupun *cluster membership*-nya. Tetapi, pada metode *Ward* dan *Centroid* tidak menggunakan jarak *City-Block* atau *Manhattan* melainkan harus menggunakan jarak Kuadrat *Euclid*.

Untuk mengetahui ada atau tidaknya perbedaan yang berarti dalam pengklasteran berdasarkan konsep pengukuran jarak yang berbeda-beda, disarankan untuk melanjutkan penelitian ini pada metode nonhirarki seperti *fuzzy clustering*

### DAFTAR PUSTAKA

- Agusta, Y. 2007. *K-Means-Penerapan, Permasalahan, dan Metode Terkait*.  
<http://www.yudiagusta.file.wordpress.com/2008/03/K-Means.pdf>.
- Anonim. 2000. *An Introduction to Cluster Analysis for Data Mining*.  
<http://www.clustan.com/whatisclusteranalysis.html-11k>.
- Anonim. 2008a. *Cluster Analysis*.  
[http://paleo.cortland.edu/class/stats/lecture Notes/11-cluster.pdf](http://paleo.cortland.edu/class/stats/lecture%20Notes/11-cluster.pdf).
- Anonim. 2008b. *Cluster Analysis*.  
<http://www.ilmustatistik.org>.
- Anonim. 2008c. *Cluster Analysis*.  
<http://www.stasoft.com/textbook/stcluan.html>.

- Anonim. 2008d. *Statistical Analysis of Microarray Data*.  
<http://www-users.itlabs.umn.edu/clases/spring-2008/csci5980-FGB/lecture10.ppt>.
- Johnson, R.A and D.W. Wichern. 2002. *Applied Multivariate Statistical Analysis*. 5<sup>th</sup> edition. Prentice Hall. New Jersey.  
<http://faculty.smu.edu/tfomby/eco5385/lecture/Scoring%20Measures%20for%20Prediction%20Problems.pdf>
- Rencher, A.C. 2002. *Methods of Multivariate Analysis*. 2<sup>nd</sup> edition. John Wiley & Sons, Inc. New York
- Rahardiantoro, D. 2008. *Principal Component Analysis (PCA) Sebagai Metode Jitu untuk Mengatasi Masalah Multikolinearitas*.  
<http://dickyrahardi.wordpress.com/2006/2/9/principal-component-analysis-pca-sebagai-metode-jitu-untuk-mengatasi-multikolinearitas>
- Santoso, S. 2004. *Buku Latihan SPSS Statistik Multivariat*. Elex Media Komputindo. Jakarta.
- Seber, G.A.F. 1984. *Multivariate Observation*. John Wiley & Sons, Inc. NewYork.

# REGRESI RIDGE UNTUK MENGATASI MULTIKOLINIERITAS

Reny Mulyasari<sup>1</sup>, Sigit Nugroho<sup>2</sup> dan Jose Rizal<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Alumni Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Bengkulu

<sup>2</sup>Dosen Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Bengkulu

## ABSTRACT

This research aim to study about multicollinearity problem, Ridge Regression and its application. Method used in this research is literature study using simulation data. Variance Inflation Factor (VIF) is used to test if there is multicollinearity. The result shows that Ridge Regression can be used to handle the problem and give the biased estimator though having better variance than those one derived using ordinary least square.

Keyword : *Multicollinearity, Ridge Regression, Biased, Variance Inflation Factor (VIF)*

## 1. PENDAHULUAN

Regresi merupakan suatu teknik statistika yang dapat digunakan untuk menggambarkan hubungan diantara dua peubah atau lebih, yaitu hubungan antara satu atau lebih peubah bebas (*independent*) dengan satu peubah tak bebas (*dependent*). Menurut Draper dan Smith (1992) analisis regresi merupakan metode analisis yang dapat digunakan untuk menganalisis data dan mengambil kesimpulan yang bermakna tentang hubungan ketergantungan peubah terhadap peubah lainnya.

Dalam perkembangannya terdapat dua jenis regresi yang sangat terkenal, yaitu regresi linier sederhana dan regresi linier berganda. Regresi linear sederhana digunakan untuk menggambarkan hubungan antara satu peubah bebas ( $X$ ) dengan satu peubah tak bebas ( $Y$ ) dalam bentuk persamaan linier sederhana.

$$\beta_0 + \beta_1 X_{i1} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.1)$$

Sedangkan regresi linier berganda menggambarkan hubungan antara dua atau lebih peubah bebas ( $X_1, X_2, \dots, X_k$ ) dengan satu peubah tak bebas ( $Y$ ).

$$\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik} + \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.2)$$

Keterangan :

$Y_i$  = peubah tak bebas (respon)

$X_{i1}, \dots, X_{ik}$  = peubah bebas (*predictor*)

$\beta_0, \dots, \beta_k$  = parameter regresi

$\varepsilon_i$  = galat (error),  $N(0, \sigma^2)$

Parameter regresi linier sederhana dan regresi linier berganda pada persamaan di atas dicari penduganya dengan menggunakan metode kuadrat terkecil. Penduga kuadrat terkecil diperoleh dengan meminimumkan jumlah kuadrat galat untuk model regresinya. Penduga yang dihasilkan oleh metode kuadrat terkecil ini bersifat *BLUE (Best Linear Unbiased Estimator)* dengan beberapa persyaratan.

Persyaratan yang harus dipenuhi ini lebih dikenal dengan nama asumsi klasik regresi linier. Asumsi klasik regresi linier tersebut adalah sebagai berikut : (1) model regresi benar-benar linier, (2) nilai peubah bebas ( $X$ ) tetap pada sampel berulang, (3) nilai rata-rata dari error adalah nol, (4) homoskedastisitas sama untuk setiap observasi, (5) tidak ada otokorelasi antara unsur pengganggu, (6) kovarian antar unsur pengganggu regresi adalah nol, (7) jumlah observasi harus lebih besar dari jumlah

parameter yang yang diobservasi, (8) nilai peubah bebas bervariasi, (9) Spesifikasi model harus benar dan (10) tidak ada multikolinieritas (Manurung, *et al* (2005) dalam Naftali (2007)).

Akan tetapi, yang menjadi permasalahan pada regresi linier berganda adalah terjadinya multikolinieritas. Multikolinieritas menyebabkan penduga yang dihasilkan dari metode kuadrat terkecil tidak bersifat *BLUE*. Penduga yang dihasilkan masih tetap tak bias dan konsisten, tetapi tidak efisien sehingga varian dari parameter regresi menjadi tidak minimum.

Berdasarkan hal tersebut maka penulis tertarik untuk mempelajari masalah multikolinieritas dan metode dalam menanggulangi masalah multikolinieritas ini, yaitu dengan menggunakan metode Regresi Ridge serta memberikan aplikasinya.

Metode Regresi Ridge ini merupakan salah satu dari metode regresi bias yang mempunyai tujuan sebagai solusi untuk masalah multikolinieritas. Regresi Ridge mengatasi masalah multikolinieritas ini dengan menentukan penduga yang bias tetapi mempunyai varian yang lebih kecil dari varian penduga regresi linier berganda.

## 2. LANDASAN TEORI

### 2.1 Regresi Linier Berganda

Regresi linier berganda adalah perluasan langsung dari regresi linier sederhana. Perluasannya terlihat dari banyaknya peubah bebas pada model regresi tersebut. Pada model regresi linier sederhana hanya ada satu peubah bebas ( $X$ ), sedangkan pada regresi linier berganda ada lebih dari satu peubah bebas (Paulson, 2007). Model regresi linier berganda tersebut dapat dilihat pada persamaan (1.2).

Model regresi linier berganda pada (1.2) dapat juga ditulis dalam bentuk matriks, yaitu

$$Y = X\beta + \varepsilon \quad (2.1)$$

(Montgomery, 1976).

#### 2.1.1 Asumsi Regresi Linier Berganda

Berdasarkan model regresi linier berganda pada (2.1) maka asumsi untuk  $\varepsilon_i$  pada dasarnya sama dengan asumsi untuk regresi linier sederhana, yaitu

1.  $E(\varepsilon_i) = 0$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$  atau ini sama dengan

$$E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik}$$

2.  $\text{var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$

3.  $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$  untuk setiap  $i \neq j$

#### 2.1.2 Metode Kuadrat Terkecil

Metode kuadrat terkecil merupakan salah satu metode yang paling banyak digunakan untuk menduga parameter-parameter regresi. Pada model regresi linier berganda juga digunakan metode kuadrat terkecil untuk mencari penduga  $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_k$  dari parameter  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ . Biasanya penduga kuadrat terkecil ini diperoleh dengan meminimumkan jumlah kuadrat galat.

$$JKG = \sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \quad (2.2)$$

Sehingga diperoleh penduga kuadrat terkecil dari  $\beta$  sebagai berikut

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y \quad (2.3)$$

(Montgomery, 1976).

#### 2.1.3 Sifat Penduga Kuadrat Terkecil

Menurut Sembiring (2003) kuadrat terkecil memiliki beberapa sifat yang baik. Untuk menyelidiki sifatnya, pandang kembali model umum regresi linier pada persamaan (2.1). Disini

dianggap bahwa  $\varepsilon$  bebas satu sama lain dan  $E(\varepsilon) = 0$ ,  $\text{var}(\varepsilon) = \sigma^2$ . Dengan demikian maka  $E(\mathbf{Y}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$  dan  $\text{cov}(\mathbf{Y}) = \sigma^2 \mathbf{I}$ . Jadi sifat penduga kuadrat terkecil adalah

1. Takbias

Jika  $E(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\beta}$  maka  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  adalah penduga takbias untuk  $\boldsymbol{\beta}$ .

2. Varian Minimum

Jika  $\text{cov}(\mathbf{Y}) = \sigma^2 \mathbf{I}$  maka matriks kovarian untuk  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  diberikan oleh  $\sigma^2 (\mathbf{X}\mathbf{X})^{-1}$ . Jika  $E(\mathbf{Y}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$  dan  $\text{cov}(\mathbf{Y}) = \sigma^2 \mathbf{I}$  maka penduga kuadrat terkecil  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  mempunyai varian minimum diantara semua penduga tak bias linier (Rencher dan Schaalje, 2008).

## 2.2 Multikolinieritas

Istilah multikolinieritas pertama kali diperkenalkan oleh Ragnar Frisch pada tahun 1934, yang menyatakan bahwa multikolinieritas terjadi jika adanya hubungan linier yang sempurna (*perfect*) atau pasti (*exact*) diantara beberapa atau semua peubah bebas dari model regresi berganda (Rahardiantoro, 2008).

Multikolinieritas menyebabkan  $\mathbf{X}\mathbf{X}$ -singular sehingga  $(\mathbf{X}\mathbf{X})^{-1}$ -nya tidak ada. Hal ini berarti bahwa satu atau lebih kolom merupakan kombinasi linier dari kolom-kolom lainnya sehingga  $|\mathbf{X}\mathbf{X}| = 0$ . Akibatnya nilai dugaan yang diperoleh tidak unik atau tunggal lagi (Draper dan Smith, 1992).

Menurut Montgomery dan Hines (1990) dalam Rahardiantoro (2008) multikolinieritas dapat mengakibatkan parameter regresi yang dihasilkan oleh analisis regresi berganda menjadi sangat lemah atau tidak dapat memberikan hasil analisis yang mewakili sifat atau pengaruh dari peubah bebas yang bersangkutan. Hal ini disebabkan oleh penduga yang dihasilkan dari metode kuadrat terkecil tidak lagi bersifat *BLUE*.

Pendugaan dengan metode kuadrat terkecil akan menghasilkan penduga yang masih tak bias dan konsisten tetapi tidak efisien lagi. Karena varian yang dihasilkan menjadi lebih besar atau tidak minimum.

Menurut Montgomery dan Peck dalam Naftali (2007) adanya multikolinieritas dalam regresi linier berganda disebabkan oleh berbagai hal antara lain metode pengumpulan data yang digunakan, kendala model pada populasi yang diamati, spesifikasi model, dan penentuan jumlah peubah bebas yang lebih banyak dari jumlah observasi. Oleh karena itu, dalam suatu penelitian harus benar-benar diperhatikan metode, model, spesifikasi model dan jumlah peubah bebas yang digunakan. Akan tetapi, jika hal itu terjadi, gejala multikolinieritas ini masih dapat dideteksi.

Terdapat beberapa cara untuk mendeteksi adanya multikolinieritas ini baik secara informal maupun formal. Menurut Nachrowi dan Usman (2006) dalam Naftali (2007), multikolinieritas dapat dideteksi dengan adanya koefisien determinasi ( $R^2$ ) yang tinggi dan uji-F yang signifikan. Ini merupakan pendeteksian adanya multikolinieritas secara informal.

Sedangkan secara formal, pertama dapat dilihat pada matriks korelasi (korelasi antar peubah bebas), yaitu jika korelasi antar peubah melebihi 0,50 diduga terdapat gejala multikolinieritas (Gujarati (2003) dalam Naftali, 2007). Kedua, dapat dilihat dari nilai *Variance Inflation Factor (VIF)*, yaitu jika nilai *VIF* kurang dari 10 maka tidak terdapat multikolinieritas. Ketiga, dengan menggunakan bilangan kondisi yang memerlukan nilai eigen matriks  $\mathbf{X}\mathbf{X}$ , yaitu makin kecil nilai eigen maka makin tinggi multikolinieritas antar peubah bebas (Sembiring, 2003).

## 2.3 Regresi Ridge

Regresi Ridge adalah suatu teknik yang dikembangkan untuk menstabilkan parameter regresi karena adanya multikolinieritas. Metode Regresi Ridge pertama kali dikemukakan oleh A.E. Hoerl pada tahun 1962. Metode ini ditujukan untuk mengatasi kondisi buruk (*ill-conditioned*) yang diakibatkan oleh korelasi yang tinggi antara beberapa peubah bebas di dalam model regresi, sehingga

menyebabkan matriks  $\mathbf{X'X}$ -nya hampir singular, yang pada gilirannya menghasilkan nilai dugaan parameter model regresi yang tidak stabil (Draper dan Smith, 1992).

Regresi Ridge merupakan modifikasi dari metode kuadrat terkecil yang menghasilkan penduga bias dari parameter regresi (Kutner, *et al.*, 2005).

### 2.3.1 Pemusatan dan Penskalaan

Pemusatan dan penskalaan data merupakan bagian dari membakukan (*standardized*) peubah. Modifikasi sederhana dari pembakuan atau standarisasi peubah ini adalah transformasi korelasi (*correlation transformation*).

Pemusatan merupakan perbedaan antara masing-masing pengamatan dan rata-rata dari semua pengamatan untuk peubah. Sedangkan penskalaan meliputi gambaran pemusatan pengamatan pada kesatuan (unit) standar deviasi dari pengamatan untuk peubah (Kutner, *et al.*, 2005).

Dalam hal ini yang akan dibakukan (distandarisasi) adalah model regresi linier berganda yang ditunjukkan pada persamaan (1.2). Berikut ini merupakan pembakuan peubah respon  $Y$  dan peubah prediktor  $X_1, \dots, X_k$

$$\frac{Y_i - \bar{Y}}{S_Y} \quad , \text{dimana} \quad S_Y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}{n-1}} \quad (2.4)$$

$$\frac{X_{ij} - \bar{X}_j}{S_{X_j}} \quad , \text{dimana} \quad S_{X_j} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_j)^2}{n-1}} \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (2.5)$$

Keterangan :

$\bar{Y}$  = rata-rata dari  $Y$

$\bar{X}_j$  = rata-rata dari pengamatan  $X_j$

$S_Y$  = standar deviasi dari  $Y$

$S_{X_j}$  = standar deviasi dari  $X_j$

Seperti penjelasan sebelumnya bahwa transformasi korelasi merupakan fungsi sederhana dari pembakuan peubah pada persamaan (2.4) dan (2.5). Sehingga melalui transformasi korelasi diperoleh

$$Y_i^* = \frac{1}{\sqrt{n-1}} \left( \frac{Y_i - \bar{Y}}{S_Y} \right) \quad (2.6)$$

$$X_{ij}^* = \frac{1}{\sqrt{n-1}} \left( \frac{X_{ij} - \bar{X}_j}{S_{X_j}} \right) \quad , j = 1, 2, \dots, k \quad (2.7)$$

Berdasarkan transformasi peubah  $Y_i^*$  dan  $X_{ij}^*$  yang didefinisikan dengan transformasi korelasi pada persamaan (2.6) dan (2.7) diatas diperoleh model regresi sebagai berikut

$$Y_i^* = \beta_1^* X_{i1}^* + \beta_2^* X_{i2}^* + \dots + \beta_k^* X_{ik}^* + \varepsilon_i \quad (2.8)$$

Persamaan (2.8) diatas disebut sebagai model regresi yang baku (*standardized regression model*).

Diantara parameter  $\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_k^*$  pada model regresi yang baku dengan parameter asli  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  pada model regresi linier berganda yang biasa terdapat suatu hubungan. Hubungan antara kedua parameter dari dua model yang berbeda tersebut dijabarkan seperti dibawah ini.

$$\beta_j = \left( \frac{S_Y}{S_{X_j}} \right) \beta_j^* \quad , j = 1, 2, \dots, k \quad (2.9)$$

$$\beta_0 = \bar{Y} - \beta_1 \bar{X}_1 - \beta_2 \bar{X}_2 - \dots - \beta_k \bar{X}_k$$

$$= \bar{Y} - \sum_{j=1}^k \beta_j \bar{X}_j \quad (2.10)$$

(Kutner, *et al.*, 2005).

### 2.3.2 Matriks Korelasi

Model regresi untuk model yang dibakukan pada persamaan (2.8) dapat dibuat dalam bentuk matriks seperti berikut ini

$$\begin{bmatrix} Y_1^* \\ Y_2^* \\ \vdots \\ Y_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1^* \\ \beta_2^* \\ \vdots \\ \beta_k^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11}^* & X_{12}^* & \cdots & X_{1k}^* \\ X_{21}^* & X_{22}^* & \cdots & X_{2k}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{n1}^* & X_{n2}^* & \cdots & X_{nk}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1^* \\ \varepsilon_2^* \\ \vdots \\ \varepsilon_n^* \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Dari persamaan (2.11) diperoleh matriks  $X^{*'} X^*$  dan  $X^{*'} Y^*$ , yaitu

$$X^{*'} X^* = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n X_{i1}^{*2} & \sum_{i=1}^n X_{i1}^* X_{i2}^* & \cdots & \sum_{i=1}^n X_{i1}^* X_{ik}^* \\ \sum_{i=1}^n X_{i2}^* X_{i1}^* & \sum_{i=1}^n X_{i2}^{*2} & \cdots & \sum_{i=1}^n X_{i2}^* X_{ik}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^n X_{ik}^* X_{i1}^* & \sum_{i=1}^n X_{ik}^* X_{i2}^* & \cdots & \sum_{i=1}^n X_{ik}^{*2} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

dan

$$X^{*'} Y^* = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n X_{i1}^* Y_i^* \\ \sum_{i=1}^n X_{i2}^* Y_i^* \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n X_{ik}^* Y_i^* \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Matriks  $X^{*'} X^*$  dan  $X^{*'} Y^*$  diatas dapat juga ditulis dalam bentuk matriks korelasi. Hal ini berkaitan dengan penjelasan sebelumnya bahwa peubah  $X^*$  dan  $Y^*$  diperoleh dari transformasi korelasi peubah  $X$  dan  $Y$  sehingga kedua bentuk matriks diatas dapat ditulis dalam bentuk matriks korelasi. Matriks pertama yaitu  $X^{*'} X^*$  dapat ditulis dalam bentuk matriks korelasi dari peubah  $X$  dan dinotasikan dengan  $r_{XX}$ . Matriks ini didefenisikan sebagai berikut :

$$r_{XX} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1k} \\ r_{21} & 1 & \cdots & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{k1} & r_{k2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Berdasarkan persamaan (2.12) dan (2.14) diperoleh persamaan seperti berikut ini

$$X^{*'} X^* = r_{XX} \quad (2.15)$$

Sedangkan matriks kedua, yaitu  $\mathbf{X}^* \mathbf{Y}^*$  adalah vektor yang berisi koefisien korelasi sederhana diantara peubah respon  $Y$  dan setiap peubah  $X$ , yang dinotasikan dengan  $r_{YX}$ . Matriks korelasinya didefinisikan sebagai berikut :

$$r_{YX} = \begin{bmatrix} r_{Y1} \\ r_{Y2} \\ \vdots \\ r_{Yk} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Setelah itu sama seperti matriks  $\mathbf{X}^* \mathbf{X}^*$ , disini berdasarkan persamaan (2.13) dan (2.16) dapat ditulis bahwa

$$\mathbf{X}^* \mathbf{Y}^* = r_{YX} \quad (2.17)$$

(Kutner, *et al.*, 2005).

### 2.3.3 Penduga Regresi Ridge

Dalam menduga parameter Regresi Ridge yaitu  $\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_k^*$  dapat diperoleh dengan menggunakan metode *penalized least square*. Kriteria dari metode *penalized least square* ini adalah mengkombinasikan jumlah kuadrat galat (JKG) dengan *penalty* atau kendala tunggal, yaitu

$$\begin{aligned} PLS &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{Y}_i^* - \hat{\mathbf{Y}}_i^*)^2 + c \sum_{j=1}^k (\hat{\beta}_j^*)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{Y}_i^* - \mathbf{X}_i^* \hat{\beta}^*)^2 + c \sum_{j=1}^k (\hat{\beta}_j^*)^2, \gamma > 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Menurut ketentuannya untuk Regresi Ridge digunakan  $\gamma = 2$ , sehingga metode *penalized least square* bentuknya ditulis seperti berikut ini

$$PLS = \sum_{i=1}^n (\mathbf{Y}_i^* - \mathbf{X}_i^* \hat{\beta}^*)^2 + c \sum_{j=1}^k (\hat{\beta}_j^*)^2 \quad (2.19)$$

(Tutz dan Ulbricht, 2006).

Untuk menghasilkan penduga Regresi Ridge dari metode *penalized least square*, caranya sama seperti pada metode kuadrat terkecil, yaitu dengan meminimumkan jumlah kuadrat galatnya. Akan tetapi, karena metode *penalized least square* terdiri dari kombinasi jumlah kuadrat galat dan *penalty* maka yang diminimumkan adalah jumlah kuadrat galat dan *penalty*-nya.

Jumlah kuadrat galat yang diminimumkan adalah jumlah kuadrat galat untuk model pada (2.8). Sehingga *penalized least square* dapat ditulis seperti berikut ini

$$PLS = \sum_{i=1}^n (\mathbf{Y}_i^* - \hat{\beta}_1^* \mathbf{X}_{i1}^* - \hat{\beta}_2^* \mathbf{X}_{i2}^* - \dots - \hat{\beta}_k^* \mathbf{X}_{ik}^*)^2 + c \left[ \sum_{j=1}^k (\hat{\beta}_j^*)^2 \right] \quad (2.20)$$

(Kutner, *et al.*, 2005; Walpole dan Myers, 1995).

Sehingga diperoleh penduga Regresi Ridge sebagai berikut

$$\hat{\beta}^* = \left( \mathbf{X}^* \mathbf{X}^* + c\mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{X}^* \mathbf{Y}^* \quad (2.21)$$

Untuk  $c \geq 0$ ,  $c$  menggambarkan jumlah bias dalam penduga,  $c$  adalah  $0 \leq c \leq 1$ . Jika  $c = 0$  maka prosedur Ridge kembali ke persamaan normal kuadrat terkecil dan begitu juga penduganya menjadi sama dengan penduga kuadrat terkecil. Tetapi jika  $c > 0$ , koefisien regresi adalah bias dan cenderung lebih stabil daripada penduga kuadrat terkecil biasa (Kutner, *et al.*, 2005).

Menurut Hoerl dan Kennard (1970) terdapat hubungan antara penduga Ridge dengan penduga kuadrat terkecil biasa, yang dituliskan sebagai berikut

$$\hat{\beta}^* = \left( I + c \left( X^{*'} X^* \right)^{-1} \right)^{-1} \hat{\beta} \tag{2.22}$$

Berdasarkan hubungan antara penduga Ridge dan penduga kuadrat terkecil biasa pada persamaan (2.22), dimisalkan bahwa  $Z = \left( I + c \left( X^{*'} X^* \right)^{-1} \right)^{-1}$ . Sehingga persamaan (2.22) dapat

ditulis sebagai  $\hat{\beta}^* = Z\hat{\beta}$ . Sehingga varian dan nilai harapan penduga Regresi Ridge diperoleh sebagai berikut

$$Var(\hat{\beta}^*) = \sigma^2 Z \left( X^{*'} X^* \right)^{-1} Z' \tag{2.23}$$

$$E(\hat{\beta}^*) = Z\beta \tag{2.24}$$

Berdasarkan persamaan (2.24) berarti bahwa penduga Regresi Ridge bukan merupakan penduga takbias dari  $\beta^*$ . Penduga Regresi Ridge merupakan penduga bias.

Oleh karena, Regresi Ridge merupakan penduga bias maka kuadrat tengah galatnya didasarkan pada penduga yang bias sehingga kuadrat tengah galatnya terdiri dari varian bagi unsur-unsur penduga Ridge dan bias kuadrat Ridge, seperti dijelaskan berikut ini

$$KTG = \sigma^2 trace Z \left( X^{*'} X^* \right)^{-1} Z' + \left[ \beta'(Z - I)'(Z - I)\beta \right] \tag{2.25}$$

### 2.3.4 Analisis varian

**Tabel 1. Tabel ANAVA untuk Regresi Ridge**

Sumber Keragaman	Jumlah Kuadrat (JK)	Derajat bebas (db)	Kuadrat Tengah (KT)
Regresi	$\hat{\beta}^{*'} X^{*'} Y^* - \left( \frac{1}{n} \right) Y^{*'} J Y^*$	$k$	$\frac{JKR}{k}$
Galat	$Y^{*'} Y^* - \hat{\beta}^{*'} X^{*'} Y^*$	$n - k - 1$	$\frac{JKG}{n - k - 1}$
TOTAL	$Y^{*'} Y^* - \left( \frac{1}{n} \right) Y^{*'} J Y^*$	$n - 1$	

Sumber : Paulson, D.S. 2007. Handbook of Regression and Modeling

Keterangan :

$J$  adalah matriks kuadrat  $n \times n$  yang didefinisikan sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

### 2.3.5 Pengujian Hipotesis

Langkah-langkah pengujiannya sama seperti pada model regresi linier berganda, yaitu sebagai berikut :

- 1) Menentukan uji hipotesis, yang mana selalu menggunakan uji dua arah.

$$H_0 : \beta_1^* = \beta_2^* = \dots = \beta_k^* = 0 \tag{2.26}$$

$$H_1 : \beta_j^* \neq 0, j = 1, 2, \dots, k \text{ (tidak semua } \beta_j^* = 0)$$

- 2) Menentukan taraf signifikan ( $\alpha$ ) dan ukuran sampel ( $n$ ).
- 3) Memilih dan menuliskan uji statistik yang digunakan, dalam hal ini uji statistik yang digunakan adalah uji- $F$ .

$$F_{hitung} = \frac{KTR}{KTG} \quad (2.27)$$

- 4) Menentukan aturan pengambilan keputusan untuk  $F_{tabel}$  atau  $F_{(1-\alpha; k, (n-k-1))}$ .

Jika  $F_{hitung} > F_{tabel}$  untuk derajat bebas  $k$  dan  $n - k - 1$  maka hipotesis  $H_0$  ditolak pada taraf  $\alpha$  dan berarti juga bahwa  $H_1$  diterima.

Jika  $F_{hitung} \leq F_{tabel}$  maka  $H_0$  diterima pada taraf  $\alpha$ .

- 5) Kemudian hitung nilai  $F_{hitung}$ .
- 6) Tuliskan kesimpulan ketika  $F_{hitung}$  dibandingkan dengan  $F_{tabel}$ .

### 2.3.6 Koefisien Determinasi

Koefisien determinasi merupakan salah satu patokan yang biasa digunakan untuk melihat apakah suatu model regresi yang dicocokkan belum atau sudah memadai, yang dinotasikan dengan  $R^2$ . Koefisien determinasi ini hanya menunjukkan ukuran proporsi variasi total dalam respon  $Y$  yang diterangkan oleh model yang dicocokkan (Walpole dan Myers, 1995).

Koefisien determinasi untuk regresi ridge dapat didefinisikan sama dengan koefisien determinasi untuk kuadrat terkecil, yaitu

$$R^2 = \frac{JKR}{JKT} \quad (2.28)$$

(Kutner, *et al.*, 2005).

## 3. TELADAN PENERAPAN

Pada teladan penerapan ini, data yang digunakan adalah data simulasi yang dibangkitkan dengan program Microsoft Excel. Data simulasi yang dibangkitkan dengan program Microsoft Excel ini kemudian akan diuji multikolinieritasnya dengan menggunakan *Variance Inflation Factor (VIF)*. Setelah diketahui bahwa data simulasi yang dibangkitkan ini terdapat multikolinieritas, maka langkah selanjutnya adalah mengatasi multikolinieritas ini dengan Regresi Ridge.

Simulasi yang dilakukan pada penelitian ini sebanyak 1000 simulasi. Berdasarkan setiap simulasi inilah nanti akan terlihat bahwa Regresi Ridge dapat mengatasi multikolinieritas dengan menghasilkan nilai kuadrat tengah galat yang lebih kecil daripada yang dihasilkan oleh metode kuadrat terkecil.

### 3.1 Hasil

Berikut ini merupakan salah satu contoh hasil simulasi data dengan program Microsoft Excel. Simulasi data yang dilakukan adalah untuk model regresi linier berganda yang terdiri dari 5 peubah bebas ( $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$ ) dan peubah tak bebas ( $Y$ ) dengan banyaknya pengamatan 30. Secara umum, model regresi linier berganda untuk kasus diatas dapat ditulis sebagai berikut

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \beta_3 X_{i3} + \beta_4 X_{i4} + \beta_5 X_{i5} + \varepsilon_i ; i = 1, 2, \dots, 30 \quad (3.1)$$

**Tabel 2. Hasil Simulasi Data**

No	Simulation Data						
	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$Y$
1	1	0.889	11.614	11.711	12.459	13.746	248.898
2	1	1.830	22.067	23.797	25.827	27.632	480.477
3	1	4.892	59.402	63.814	69.091	74.050	1253.516
4	1	0.726	9.255	9.919	10.643	11.521	211.594
5	1	2.336	28.374	30.863	33.631	35.758	616.363
6	1	3.323	40.179	43.253	46.981	50.748	860.575
7	1	0.987	12.507	12.965	14.688	15.694	279.023
8	1	1.169	14.104	15.737	16.895	18.128	320.879
9	1	2.382	29.248	31.798	33.548	36.669	628.400
10	1	4.561	55.164	59.369	64.157	68.424	1164.252
11	1	2.698	32.410	35.632	38.325	41.384	705.337
12	1	2.547	30.568	33.913	36.458	38.937	668.414
13	1	2.390	28.830	31.264	33.991	36.098	623.380
14	1	1.317	16.316	17.708	19.267	20.480	361.633
15	1	1.610	19.949	21.041	22.752	24.596	429.559
16	1	2.184	26.406	29.251	30.906	33.323	575.223
17	1	2.605	31.288	34.219	37.240	39.222	677.550
18	1	1.128	14.404	15.351	16.157	17.525	312.973
19	1	2.231	26.998	29.541	31.971	34.253	589.019
20	1	4.275	51.809	56.010	60.766	64.595	1099.546
21	1	0.077	1.012	1.494	1.558	1.196	44.193
22	1	0.882	10.736	11.657	12.397	13.309	242.977
23	1	1.596	19.596	21.163	23.277	24.743	432.382
24	1	3.164	38.068	41.291	44.375	47.924	816.005
25	1	2.652	32.779	35.188	37.644	40.753	697.350
26	1	2.544	30.566	33.091	35.932	38.424	660.258
27	1	2.259	27.116	30.268	31.930	33.934	590.798
28	1	3.494	42.358	45.957	49.633	53.086	905.327
29	1	4.750	57.086	62.072	67.247	71.292	1213.270
30	1	3.371	41.405	44.241	47.256	51.552	874.306

**Tabel 3. Beberapa Hasil Perhitungan Nilai  $R^2$  dan  $VIF$**

No	$R^2$	$VIF$
1	0.97640	42.36465
2	0.97160	35.20917
3	0.97676	43.03044
4	0.97709	43.64217
5	0.97847	46.44601
6	0.97518	40.29362
7	0.97403	38.50679
8	0.97725	43.96312
9	0.97357	37.84049
10	0.97038	33.76264

**Tabel 4. Hasil Perhitungan Penduga Regresi Ridge**

No	$c$	$\hat{\beta}_1^*$	$\hat{\beta}_2^*$	$\hat{\beta}_3^*$	$\hat{\beta}_4^*$	$\hat{\beta}_5^*$
1	$c = 0.01$	0.19919	0.19642	0.19878	0.20116	0.20253
2	$c = 0.02$	0.19901	0.19759	0.19879	0.20000	0.20069
3	$c = 0.03$	0.19869	0.19773	0.19854	0.19935	0.19981
4	$c = 0.04$	0.19833	0.19760	0.19821	0.19882	0.19917
5	$c = 0.05$	0.19796	0.19576	0.19601	0.19625	0.19639
6	$c = 0.1$	0.19606	0.19576	0.19601	0.19625	0.19639
7	$c = 0.2$	0.19231	0.19215	0.19228	0.19240	0.19247
8	$c = 0.3$	0.18869	0.18857	0.18866	0.18874	0.18879
9	$c = 0.4$	0.18520	0.18511	0.18517	0.18523	0.18527
10	$c = 0.5$	0.18183	0.18176	0.18181	0.18186	0.18189
11	$c = 0.6$	0.17859	0.17852	0.17857	0.17861	0.17863
12	$c = 0.7$	0.17545	0.17539	0.17544	0.17547	0.17549
13	$c = 0.8$	0.17243	0.17238	0.17241	0.17244	0.17246
14	$c = 0.9$	0.16951	0.16946	0.16949	0.16952	0.16953
15	$c = 1$	0.16668	0.16664	0.16667	0.16669	0.16670

### 3.2 Pembahasan

Salah satu ukuran yang dapat digunakan untuk menguji adanya multikolinieritas pada regresi linier berganda adalah *Variance Inflation Factor (VIF)*. Adanya multikolinieritas dinilai dari nilai *VIF* yang dihasilkan. Nilai *VIF* yang melebihi 10 akan menunjukkan adanya multikolinieritas dan sebaliknya.

Besarnya nilai *VIF* ini bergantung pada nilai koefisien determinasi ( $R^2$ ) yang dihasilkan. Jika nilai *VIF* melebihi 10 maka koefisien determinasi bernilai lebih besar dari 0.9. Hal ini menunjukkan adanya pengaruh nilai  $R^2$  terhadap nilai *VIF* yang dihasilkan, yaitu semakin besar nilai  $R^2$  maka semakin besar pula nilai *VIF* yang dihasilkan.

Berdasarkan hasil perhitungan uji multikolinieritas dengan menggunakan *VIF* dan perhitungan  $R^2$  terlihat bahwa semua data hasil simulasi, yaitu sebanyak 1000 simulasi data mempunyai nilai *VIF* yang lebih besar dari 30 dan nilai  $R^2$  yang lebih besar dari 0.9. Ini berarti bahwa terdapat multikolinieritas pada seluruh data simulasi tersebut.

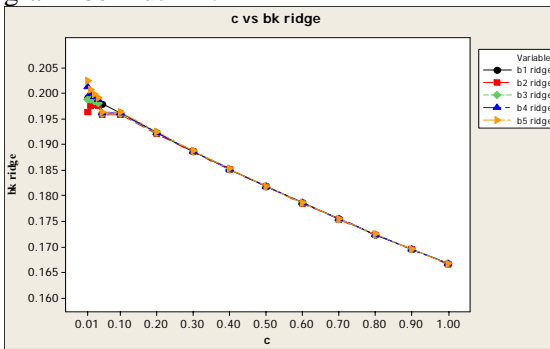
Masalah multikolinieritas pada kasus ini dapat diatasi dengan menggunakan Regresi Ridge. Regresi Ridge dapat menghasilkan penduga yang lebih baik daripada penduga yang dihasilkan kuadrat terkecil. Penduga yang dihasilkan oleh Regresi Ridge merupakan penduga. Hal ini disebabkan karena terdapat penambahan nilai  $c$  pada perhitungan Regresi Ridge (persamaan 2.21).

Untuk setiap nilai  $c$  yang digunakan, penduga Regresi Ridge yang dihasilkan bergerak menuju ke nol. Jika dibuat grafik antara nilai  $c$  dengan penduga Ridge yang dihasilkan persamaan (2.21), maka akan terlihat lebih jelas penduga Ridge ( $\hat{\beta}_k^*$ ) yang dihasilkan bergerak menuju ke nol. Gambar 1. dibawah ini menunjukkan kondisi tersebut.

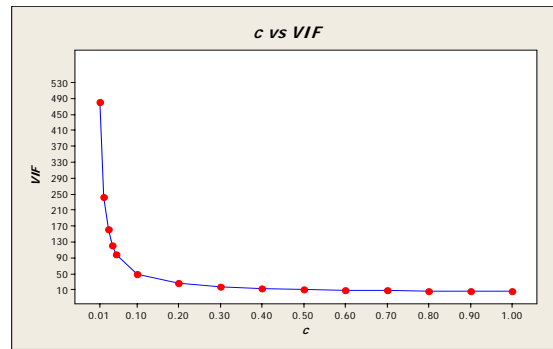
Selain Regresi Ridge dapat menghasilkan penduga yang bias dengan adanya penambahan nilai  $c$ . Regresi Ridge juga menghasilkan varian yang lebih minimum daripada varian yang dihasilkan kuadrat terkecil. Varian yang minimum ini dapat dilihat dari nilai kuadrat tengah galat (KTG) yang dihasilkan.

Pada kasus untuk 1000 simulasi data yang dilakukan, Regresi Ridge menghasilkan KTG yang lebih minimum daripada kuadrat terkecil. Hal ini disebabkan karena terdapat nilai  $c$  yang dipilih untuk meminimumkan kuadrat tengah galat.

Peningkatan nilai  $c$  yang digunakan juga mengakibatkan penurunan nilai  $VIF$  dan  $R^2$  yang dihasilkan Regresi Ridge. Penurunan nilai  $VIF$  terhadap kenaikan nilai  $c$  tersebut digambarkan pada grafik berikut ini :



**Gambar 1. Grafik Antara  $c$  vs  $b_k$  Ridge**



**Gambar 2. Grafik Antara  $c$  vs  $VIF$**

Pada Gambar 2. terlihat bahwa nilai  $VIF$  yang dihasilkan semakin kecil dengan semakin meningkatnya nilai  $c$  yang digunakan.

Seperti yang dijelaskan sebelumnya bahwa nilai  $VIF$  ini digunakan untuk mengukur multikolinieritas. Oleh karena itu, pada kasus ini Regresi Ridge dapat mengatasi multikolinieritas dimulai pada saat  $c = 0.6$ . Karena dimulai pada saat  $c = 0.6$ ,  $VIF$ nya bernilai kurang dari 10.

Berdasarkan uraian diatas Regresi Ridge ini dapat mengatasi multikolinieritas dengan menghasilkan penduga yang bias tetapi mempunyai varian yang minimum daripada kuadrat terkecil yang dapat dilihat dari nilai kuadrat tengah galat yang dihasilkan.

#### 4. KESIMPULAN DAN SARAN

##### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil simulasi data dan pembahasan sebelumnya, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut :

1. Multikolinieritas terjadi ketika dua atau lebih peubah bebas saling berkorelasi secara signifikan satu sama lain.
2. Adanya multikolinieritas dapat dilihat dari nilai  $R^2$  dan  $VIF$  yang dihasilkan dari data tersebut, yaitu semakin besar nilai  $R^2$  yang dihasilkan maka semakin besar pula nilai  $VIF$ nya.
3. Regresi Ridge merupakan metode untuk mengatasi multikolinieritas dengan menghasilkan penduga yang bias tetapi mempunyai varian yang minimum dari varian kuadrat terkecil.
4. Regresi Ridge menghasilkan penduga yang bias karena adanya penambahan nilai  $c$  pada perhitungan Regresi Ridge.
5. Nilai kuadrat tengah galat (KTG) menjadi ukuran bahwa varian yang dihasilkan minimum. KTG yang minimum menunjukkan juga bahwa variannya minimum.

##### 4.2 Saran

1. Untuk mendapatkan nilai penduga Regresi Ridge dan nilai Kuadrat Tengah Galat (KTG) yang terbaik, maka perlu dilakukan kajian lebih lanjut mengenai pemilihan nilai  $c$  sehingga Regresi Ridge dapat benar-benar menjadi solusi yang baik dalam mengatasi masalah multikolinieritas.
2. Agar masalah multikolinieritas ini dapat teratasi dengan lebih tepat, maka perlu dilakukan kajian terhadap metode-metode lain yang dapat juga mengatasi masalah multikolinieritas, seperti *Principal Component Regression (PCR)*, *Partial Least Square (PLS)* dan lain-lain.

#### DAFTAR PUSTAKA

Draper, N dan H. Smith. 1992. *Analisis Regresi Terapan, Terjemahan Edisi Kedua*. PT. Gramedia Pustaka Utama. Jakarta.

- Hoerl, A.E. dan R.W. Kennard. 1970. *Ridge Regression : Biased Estimation for Nonorthogonal Problems*. <http://statgen.ucr.edu/file/STAT288/hoerl70a.pdf>
- Kutner, M.H., et al. 2005. *Applied Linear Statistical Models, Fifth Edition*. McGraw-Hill. New York.
- Montgomery, D.C. 1976. *Design and Analysis of Experiments*. Jhon Wiley & Sons. New York.
- Naftali, Y. 2007. *Regresi dan Multikolinieritas dalam Regresi*.  
<http://yohanli.wordpress.com/category/science/>
- Paulson, D.S. 2007. *Handbook of Regression and Modeling*. Chapman & Hall/CRC. United State of America.
- Rahardiantoro, D. 2008. *Principal Component Analysis (PCA) sebagai Metode Jitu Untuk Mengatasi Masalah Multikolinieritas*. <http://dickyrahardi.wordpress.com/2006/2/9/principal-component-analysis-pca-sebagai-metode-jitu-untuk-mengatasi-multikolinieritas>
- Rencher, A.C. dan G.B. Schaalje. 2008. *Linier Models in Statistics, Second Edition*. Jhon Wiley & Sons. New York.
- Sembiring, R.K. 2003. *Analisis Regresi*. ITB Bandung. Bandung.
- Tutz, G. dan J. Ulbricht. 2006. *Penalized Regression with Correlation Based Penalty*.  
<http://www.stat.uni-muenchen.de/sfb386/papers/dsp/paper486.pdf>
- Walpole, R.E dan R.H. Myers 1995. *Ilmu Peluang dan Statistik untuk Insinyur dan Ilmuwan, Terjemahan Edisi Keempat*. ITB. Bandung.
- Weisberg, S. 1980. *Applied Linear Regression*. John Wiley & Sons. New York.