KAJIAN *MULTIVARIATE ANALYSIS OF VARIANCE* (*MANOVA*) PADA RANCANGAN ACAK LENGKAP (RAL)

Diana Puspitasari[1], Sigit Nugroho[2], dan Baki Swita[2]

1) *Alumni Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Bengkulu*
2) *Staf Pengajar Matematika Fakultas MIPA Universitas Bengkulu*

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji prosedur *Multivariate Analysis of Variance* (*MANOVA)* pada Rancangan Acak Lengkap (RAL). Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur dan studi kasus. Data penelitian untuk studi kasus adalah data RAL yang dikutip dari skripsi Zuhri (1996). Prosedur *MANOVA* pada RAL di mulai dengan perumusan hipotesis, menghitung vektor jumlah kuadrat galat, jumlah kuadrat perlakuan, dan jumlah kuadrat total. Pengujian hipotesis menggunakan Wilks' lambda dan rumus dalam Tabel Bartlett. Berdasarkan hasil penelitian dapat disimpulkan bahwa prosedur *MANOVA* sama dengan *ANOVA* namun variabel yang digunakan pada *MANOVA* berbentuk vektor dan variabel pada *ANOVA* berbentuk skalar. Kelebihan *MANOVA* adalah lebih ringkas dan efisien dibandingkan dengan *ANOVA* bila variabel pengamatan yang diteliti lebih dari satu.

Kata Kunci: Multivariate Analysis of Variance, Jumlah kuadrat, Wilks' lambda.

Pendahuluan

Rancangan Acak Lengkap (RAL) merupakan rancangan percobaan yang paling sederhana dibandingkan rancangan lainnya. Rancangan ini termasuk pada rancangan nonfaktorial karena yang diteliti hanya satu faktor penelitian. Pada RAL kondisi seluruh satuan percobaannya diusahakan seseragam mungkin sehingga tidak ada sumber keragaman lain yang dapat dikendalikan. Pengacakan perlakuan pada RAL dilakukan pada seluruh satuan percobaan sekaligus. Setiap satuan percobaan mempunyai peluang sama untuk menerima perlakuan manapun. Jadi bila ada *n* satuan percobaan, maka setiap perlakuan mempunyai peluang yang sama untuk jatuh pada sembarang satuan percobaan manapun.

Dalam RAL bahan yang digunakan dan lingkungan percobaan diusahakan seseragam mungkin atau dengan kata lain kondisi satuan percobaan seragam. Dengan adanya keseragaman tersebut diharapkan semua satuan percobaan juga memperlihatkan hasil yang seragam. Namun, pada kenyataannya keseragaman tersebut sangat jarang sekali diperoleh meski telah dilakukan kontrol yang cermat. Perbedaan hasil penelitian umumnya timbul karena pengaruh biologi yang terjadi di lapangan. Fakta mengenai ketidaksamaan yang terjadi di alam seperti, tidak semua buah mangga dalam satu pohon mempunyai ukuran persis sama, tidak semua anak ayam dalam satu kandang sama beratnya, dan sebagainya sehingga akan menimbulkan pertanyaan bagaimana menentukan sifat-sifat suatu kelompok yang terdiri dari individu-individu yang berbeda. Dengan konsep *Analysis of Variance* (*ANOVA*) dapat ditentukan sifat-sifat suatu kelompok serta dapat menguraikan ragam total menjadi komponen ragam. Dengan *ANOVA* dapat diadakan pengujian perbedaan dua nilai tengah contoh atau lebih secara serentak. Pengujian apakah perlakuan berpengaruh secara nyata atau tidak pada *ANOVA* berbeda untuk masing-masing variabel pengamatan yang diteliti. Semakin banyak variabel yang ingin diteliti, semakin banyak pula perhitungan yang harus dilakukan. Dengan begitu *ANOVA* tentu akan memakan banyak waktu.

Salah satu bentuk analisis statistika yang dapat mengatasi kelemahan *ANOVA* di atas adalah *Multivariate Analysis of Variance* (*MANOVA*). *MANOVA* merupakan analisis rancangan percobaan banyak variabel yang digunakan untuk menyelidiki perbedaan vektor nilai tengah populasi. *MANOVA* sebenarnya tidak berbeda jauh dengan *ANOVA*, hanya saja *MANOVA* lebih efektif dan efisien bila variabel tak bebas (y) yang diselidiki lebih dari satu. *ANOVA* menggunakan peubah skalar dan *MANOVA* menggunakan vektor.

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mempelajari prosedur *Multivariate Analysis of Variance* (*MANOVA*) pada Rancangan Acak Lengkap (RAL). Manfaat dari penelitian ini adalah untuk memberikan informasi kepada pembaca mengenai analisis untuk banyak variabel (*mutivariable*) pada Rancangan Acak Lengkap (RAL). Selain itu, dapat menambah wawasan penulis tentang RAL, *ANOVA*, dan *MANOVA*.

Rancangan Percobaan

Percobaan merupakan serangkaian kegiatan dimana setiap tahap dalam rangkaian benar-benar terdefinisikan, dilakukan untuk menemukan jawaban tentang permasalahan yang diteliti melalui suatu pengujian hipotesis. Percobaan juga merupakan penyelidikan terencana untuk mendapatkan fakta baru, untuk memperkuat atau menolak hasil-hasil percobaan terdahulu.

Menurut Hanafiah (1991) unsur-unsur dasar suatu percobaan agar hasil percobaan obyektif adalah sebagai berikut.

1. Perlakuan (*treatment*)

   Perlakuan adalah semua tindakan coba-coba yang dilakukan terhadap suatu obyek, yang pengaruhnya akan diselidiki untuk menguji hipotesis. Perlakuan juga disebut sebagai prosedur yang pengaruhnya hendak diukur dan dibandingkan dengan perlakuan lain. Perlakuan ini dapat berasal dari faktor kualitas (mutu), misalnya mutu pupuk, mutu pestisida, mutu alat, dan berbagai mutu lainnya. Perlakuan juga dapat berupa faktor kuantitas (takaran), seperti takaran pupuk, takaran pestisida, dan lain sebagainya.

2. Ulangan (*replication*)

   Ulangan adalah frekuensi suatu perlakuan yang diselidiki dalam suatu percobaan. Jumlah ulangan suatu perlakuan tergantung pada derajat ketelitian yang diinginkan oleh si peneliti terhadap kesimpulan hasil percobaannya. Sebagai suatu patokan, jumlah ulangan dianggap cukup baik bila memenuhi ketentuan $(t-1)\ (r-1) \geq 15$ dimana t = jumlah perlakuan dan r = jumlah ulangan. Aturan ini bukanlah suatu patokan yang baku.

Percobaan merupakan ajang pengujian hipotesis secara empirik, oleh karena itu himpunan perlakuan yang akan diuji dalam suatu percobaan harus dirancang sesuai dengan fungsi percobaan tersebut. Rancangan percobaan merupakan cara mengatur pemberian perlakuan kepada satuan-satuan percobaan, sehingga keragaman respon yang ditimbulkan oleh keadaan lingkungan dan keheterogenan bahan percobaan dapat ditampung dan disingkirkan (Sastrosupadi, 2000). Satuan percobaan merupakan unit terkecil dari rancangan percobaan yang mendapat satu macam perlakuan. Perbedaan hasil dari petak-petak yang diasumsikan kesuburannya homogen dinamakan galat percobaan. Galat percobaan adalah ukuran keragaman diantara semua pengamatan yang berasal dari satuan percobaan dan mendapat perlakuan sama. Untuk memperoleh hasil percobaan yang baik, terjadinya galat harus seminimum mungkin.

Rancangan Acak Lengkap (RAL)

RAL digunakan untuk percobaan yang mempunyai media atau tempat percobaan yang seragam atau homogen, sehingga RAL banyak digunakan untuk percobaan laboratorium, rumah kaca, dan peternakan. Karena media homogen maka media atau tempat percobaan tidak memberikan pengaruh pada respon yang diamati. Banyaknya pengamatan pada berbagai perlakuan tidak dipandang sebagai pembatasan pada pengacakan.

Beberapa asumsi-asumsi yang digunakan pada RAL adalah sebagai berikut.

1. μ adalah konstanta bernilai tetap.
2. $\varepsilon_{ij} \sim N(0,\sigma^2)$ artinya ε_{ij} menyebar secara normal dengan nilai tengah sama dengan nol dan ragam sebesar σ^2.
3. Pada model tetap, τ adalah pengaruh tetap yang memenuhi $\sum_{i=1}^{t} r_i\tau_i = 0$. Pada pengaruh acak, τ berdistribusi normal dengan nilai tengah nol dan varian σ_τ^2, atau ditulis $\tau_i \sim N(0,\sigma_\tau^2)$. τ dan ε saling bebas.

Model linier untuk RAL yang terdiri dari t perlakuan dan r_i ulangan dituliskan sebagai berikut.

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \tag{1}$$

dimana:

i = $1,2,...,t$, i menunjukkan indeks untuk perlakuan dimana banyaknya perlakuan adalah t perlakuan.

j = $1,2,...,r_i$, j menunjukkan indeks ulangan dimana banyaknya ulangan adalah r_i ulangan.

y_{ij} = Respon atau nilai pengamatan dari perlakuan ke-i dan ulangan ke-j.

μ = Nilai tengah umum $= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{t} r_i\mu_i$ dengan $n = \sum_{i=1}^{t} r_i$

τ_i = Pengaruh perlakuan ke-i = $\mu_i - \mu$

ε_{ij} = Galat percobaan = $y_{ij} - \mu_i$

Ada beberapa keuntungan menggunakan RAL, yaitu sebagai berikut.

1. Analisis statistiknya mudah karena komponen perhitungannya sesuai dengan sumber keragaman yaitu terdiri dari perlakuan, galat, serta total sumber perlakuan. Analisis statistik pada RAL juga mudah dilakukan pada percobaan yang ulangannya tidak sama.
2. Derajat bebas galat maksimum memungkinkan memperoleh kuadrat tengah galat yang kecil, sehingga peluang mendapatkan F hitung dengan nilai tinggi cukup besar.
3. Memiliki keluwesan, artinya tidak ada pembatasan dalam hal banyak perlakuan ataupun banyaknya ulangan. Besarnya ulangan boleh berbeda-beda dari perlakuan satu ke lainnya. Meskipun demikian, sebaiknya ulangan dibuat sama agar memudahkan perhitungan.

Analysis of Variance (*ANOVA*) pada RAL

Analisis data pada RAL dapat dilakukan dengan *ANOVA*. Setiap komponen jumlah kuadrat dipakai untuk menaksir besarnya ragam. Hasilnya adalah satu ragam atau lebih untuk perlakuan dan hanya satu ragam untuk galat percobaan.

Analisis ragam (*ANOVA*) merupakan suatu cara untuk menguraikan ragam total menjadi komponen ragam. Langkah pertama yang diambil untuk analisis ragam adalah menetapkan hipotesis nol yang menyatakan tidak ada perbedaan nyata di antara ragam, yang berarti tidak ada perbedaan nyata diantara harga rata-rata setiap perlakuan yang diuji. Hipotesis nol yang diajukan mengambil asumsi bahwa semua pengukuran berasal dari satu populasi yang homogen. Hipotesis nol menyatakan tidak ada perbedaan pengaruh perlakuan pada penelitian, yang dirumuskan sebagai berikut.

H_0 : $\tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_t$

H_1 : Sedikitnya ada $\tau_i \neq \tau_j$ dimana $i \neq j$.

Kedua hipotesis tersebut akan diuji, setelah diketahui hipotesis yang diterima atau ditolak, dapat ditentukan kesimpulan dan pengambilan keputusan untuk mengambil tindakan berikutnya. Masing-masing persamaan jumlah kuadrat dapat ditulis sebagai berikut.

Jumlah Kuadrat Total

$$\text{JK (T)} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\left(y_{ij} - \bar{y}_{\bullet\bullet}\right)^2 = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i} y_{ij}^2 - \frac{y_{\bullet\bullet}^2}{n} \tag{2}$$

Rumus $\frac{y_{\bullet\bullet}^2}{n}$ dinamakan faktor koreksi (FK).

Jumlah Kuadrat Perlakuan

$$\text{JK (P)} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\left(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet}\right)^2 = \sum_{i=1}^{t}\frac{y_{i\bullet}^2}{r_i} - \frac{y_{\bullet\bullet}^2}{n} \tag{3}$$

Jumlah Kuadrat Galat

$$\text{JK (G)} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\left(y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet}\right)^2 = \text{JK (T)} - \text{JK (P)} \tag{4}$$

Berdasarkan persamaan (3) dan (4) diperoleh kuadrat tengah perlakuan (KTP) dan kuadrat tengah galat (KTG), dimana

$$\text{KT (P)} = \frac{\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\left(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet}\right)^2}{t-1} = \frac{\text{JK (P)}}{\text{db (P)}} \tag{5}$$

$$\text{KT (G)} = \frac{\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\left(y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet}\right)^2}{n-t} = \frac{\text{JK (G)}}{\text{db (G)}} \tag{6}$$

Selanjutnya, dari kuadrat tengah perlakuan dan kuadrat tengah galat diperoleh F hitung dengan rumus,

$$\mathrm{F_{hit}} = \frac{n-t\left(\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\left(\bar{y}_{i\bullet}-\bar{y}_{\bullet\bullet}\right)^2\right)}{t-1\left(\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\left(y_{ij}-\bar{y}_{i\bullet}\right)^2\right)} = \frac{\text{KT (P)}}{\text{KT (G)}} \quad (7)$$

Keterangan:

y_{ij} = Respon atau nilai pengamatan dari perlakuan ke-i dan ulangan ke-j.

t = Jumlah perlakuan.

r_i = Jumlah ulangan.

n = Jumlah pengamatan.

$y_{\bullet\bullet}$ = Jumlah keseluruhan.

$\bar{y}_{\bullet\bullet}$ = Rata-rata keseluruhan.

$y_{i\bullet}$ = Jumlah perlakuan ke-i.

$\bar{y}_{i\bullet}$ = rata-rata perlakuan ke-i.

Hasil perhitungan jumlah kuadrat, kuadrat tengah dan F hitung ditulis ke dalam Tabel *ANOVA*.

Tabel 1. Tabel *ANOVA*

Sumber Keragaman	Derajat Bebas (db)	Jumlah Kuadrat (JK)	Kuadrat Tengah (KT)	F hitung	F tabel
Perlakuan	$t-1$	JK (P)	KT (P)	$\frac{\text{KT (P)}}{\text{KT (G)}}$	$\mathrm{F}_{\alpha(\upsilon_1,\upsilon_2)}$
Galat	$n-t$	JK (G)	KT (G)		
Total	$n-1$	JK (T)			

Pengujian hipotesis didasarkan pada F hitung dan F tabel dengan derajat bebas (υ_1) dan (υ_2). Jika nilai $\mathrm{F_{hit}} > \mathrm{F}_{\alpha(\upsilon_1,\upsilon_2)}$ maka H_0 ditolak dan jika $\mathrm{F_{hit}} < \mathrm{F}_{\alpha(\upsilon_1,\upsilon_2)}$ maka H_0 diterima. Taraf uji (α) yang umum digunakan adalah $\alpha = 5\%$ dan $\alpha = 1\%$. Jika $\mathrm{F_{hit}} > \mathrm{F}_{\alpha(\upsilon_1,\upsilon_2)}$ pada $\alpha = 5\%$ berarti H_0 ditolak, berarti perlakuan berpengaruh nyata pada pengamatan. Jika $\mathrm{F_{hit}} > \mathrm{F}_{\alpha(\upsilon_1,\upsilon_2)}$ pada $\alpha = 1\%$ maka H_0 ditolak, berarti perlakuan berpengaruh sangat nyata pada pengamatan. Jika $\mathrm{F_{hit}} < \mathrm{F}_{\alpha(\upsilon_1,\upsilon_2)}$ pada $\alpha = 5\%$ maka perlakuan berpengaruh tidak nyata pada pengamatan.

Multivariate Analysis of Variance (MANOVA) pada RAL

MANOVA merupakan analisis keragaman yang menguji apakah vektor nilai tengah populasi sama atau berbeda. Analisis ragam dengan *MANOVA*, dapat dilakukan sekaligus pada beberapa variabel yang diamati dengan melibatkan matriks ragam peragam (*variance covariance matrix*). Rumus untuk menentukan penduga matriks ragam peragam perlakuan ke-i dinyatakan seperti di bawah ini.

$$\mathbf{S}_i = \frac{1}{r_i-1}\sum_{j=1}^{r_i}(\mathbf{y}_{ij}-\bar{\mathbf{y}}_{i\bullet})(\mathbf{y}_{ij}-\bar{\mathbf{y}}_{i\bullet})' \qquad i=1,2,\cdots,t \text{ dan } j=1,2,\cdots,r_i \quad (8)$$

dimana:

$\mathbf{S}_i$ = Matriks ragam peragam perlakuan ke-i.

r_i = Banyaknya ulangan.

$\mathbf{y}_{ij}$ = Vektor pengamatan perlakuan ke-i ulangan ke-j.

$\bar{\mathbf{y}}_{i\bullet}$ = Vektor rata-rata pengamatan perlakuan ke-i.

Asumsi-asumsi yang berlaku pada *MANOVA* akan diuraikan sebagai berikut:

1. $\mathbf{y}_{i1}, \mathbf{y}_{i2}, \ldots, \mathbf{y}_{ir_i}$, adalah contoh acak berukuran r_i dari populasi ke-i dengan nilai tengah $\boldsymbol{\mu}_i$, $i = 1, 2, \ldots, t$. Contoh acak dari populasi yang berbeda saling bebas.
2. Semua populasi memiliki matriks ragam peragam bersama Σ.
3. Setiap populasi berdistribusi normal $\mathbf{y}_{ij} \sim N(\boldsymbol{\mu}_i, \Sigma)$.

Model *MANOVA* untuk pembandingan vektor nilai tengah t populasi pada Rancangan Acak Lengkap (RAL) dengan t perlakuan dan r_i ulangan adalah

$$\mathbf{y}_{ij} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \qquad j = 1, 2, \ldots, r_i \text{ dan } i = 1, 2, \ldots, t \tag{9}$$

Pada model ini $\mathbf{y}_{ij}$, $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\tau}_i$, dan $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$ adalah vektor berdimensi p, dimana

p = Jumlah variabel yang diamati.

i = $1, 2, ..., t$, i menunjukkan indeks untuk perlakuan dimana banyaknya perlakuan adalah t perlakuan.

j = $1, 2, ..., r_i$, j menunjukkan indeks ulangan dimana banyaknya ulangan adalah r_i ulangan.

$\mathbf{y}_{ij}$ = Vektor respon atau nilai pengamatan dari perlakuan ke-i, ulangan ke-j.

$\boldsymbol{\mu}$ = Vektor parameter nilai tengah umum.

$\boldsymbol{\tau}_i$ = Vektor pengaruh perlakuan ke- i dengan $\sum_{i=1}^{t} r_i \boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{0}$.

$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$ = Vektor galat.

Misal akan diteliti pengaruh t perlakuan terhadap p variabel pengamatan, maka dalam bentuk vektor data pengamatan dapat dinyatakan sebagai berikut.

Perlakuan 1 : $\mathbf{y}_{11}, \mathbf{y}_{12}, \ldots, \mathbf{y}_{1r_1}$

Perlakuan 2 : $\mathbf{y}_{21}, \mathbf{y}_{22}, \ldots, \mathbf{y}_{2r_2}$

$\vdots$ $\qquad\qquad \vdots$

Perlakuan t : $\mathbf{y}_{t1}, \mathbf{y}_{t2}, \ldots, \mathbf{y}_{tr_i}$

Setiap vektor $\mathbf{y}_{ij}$ adalah suatu vektor berdimensi p. Vektor $\mathbf{y}_{ij}$ menyatakan vektor perlakuan ke-i ($i = 1, 2, \cdots, t$) dan ulangan ke-j ($j = 1, 2, \cdots, r_i$).

Prosedur *MANOVA*

Langkah awal untuk analisis pada MANOVA yaitu merumuskan hipotesis yang bersesuaian dengan masalah yang akan dianalisis. Pada *MANOVA* hipotesis nol dan hipotesis tandingannya dirumuskan sebagai berikut.

$$H_0 : \begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{12} \\ \vdots \\ \tau_{1p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{21} \\ \tau_{22} \\ \vdots \\ \tau_{2p} \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} \tau_{t1} \\ \tau_{t2} \\ \vdots \\ \tau_{tp} \end{bmatrix}$$

H_1 : Sedikitnya ada $\boldsymbol{\tau}_i \neq \boldsymbol{\tau}_j$ dimana $i \neq j$.

Hipotesis di atas menunjukkan ada t perlakuan yang akan diteliti pengaruhnya terhadap p variabel pengamatan. Satu vektor menunjukkan satu perlakuan. Analog dengan hasil pada kasus peubah tunggal, hipotesis tidak adanya pengaruh perlakuan, diuji dengan membandingkan besarnya jumlah kuadrat dan hasil kali perlakuan relatif terhadap galat. Analog dengan *ANOVA* jumlah kuadrat pada *MANOVA* dapat ditulis sebagai berikut.

Jumlah kuadrat perlakuan.

$$\mathbf{JK(P)} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}(\bar{\mathbf{y}}_{i.}-\bar{\mathbf{y}}_{..})(\bar{\mathbf{y}}_{i.}-\bar{\mathbf{y}}_{..})' = \sum_{i=1}^{t}\frac{1}{r_i}\mathbf{y}_{i.}\times\mathbf{y}_{i.}^{'}-\frac{1}{r_i t}\mathbf{y}_{..}\times\mathbf{y}_{..}^{'} \tag{10}$$

Jumlah kuadrat galat.

$$\mathbf{JK(G)} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}(\mathbf{y}_{ij}-\bar{\mathbf{y}}_{i.})(\mathbf{y}_{ij}-\bar{\mathbf{y}}_{i.})' = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\mathbf{y}_{ij}\mathbf{y}_{ij}^{'}-\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{r_i}\mathbf{y}_{i.}\mathbf{y}_{i.}^{'} \tag{11}$$

Dengan menggunakan rumus matriks ragam peragam pada persamaan (8), persamaan (11) bisa juga ditulis sebagai,

$$\mathbf{JK(G)} = (r_1-1)\mathbf{S}_1+(r_2-1)\mathbf{S}_2+\cdots+(r_t-1)\mathbf{S}_t \tag{12}$$

Rumus-rumus di atas secara formal, dapat diringkas pada satu Tabel *MANOVA* berikut.

Tabel 2. Tabel *MANOVA*

Sumber Keragaman	Matriks Jumlah Kuadrat dan Hasil Kali	Derajat Bebas
Perlakuan	$\sum_{i=1}^{t} r_i(\bar{\mathbf{y}}_{i.}-\bar{\mathbf{y}}_{..})(\bar{\mathbf{y}}_{i.}-\bar{\mathbf{y}}_{..})'$	$t-1$
Galat	$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}(\mathbf{y}_{ij}-\bar{\mathbf{y}}_{i.})(\mathbf{y}_{ij}-\bar{\mathbf{y}}_{i.})'$	$\sum_{i=1}^{t} n_i - t$
Total (terkoreksi dengan nilai tengah)	$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}(\mathbf{y}_{ij}-\bar{\mathbf{y}}_{..})(\mathbf{y}_{ij}-\bar{\mathbf{y}}_{..})'$	$\sum_{i=1}^{t} n_i - 1$

Tabel ini memiliki bentuk persis sama dengan tabel *ANOVA*, kecuali bahwa kuadrat skalar digantikan dengan vektor padanannya. Sebagai ilustrasi, $(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2$ menjadi $(\bar{\mathbf{y}}_{i.}-\bar{\mathbf{y}}_{..})(\bar{\mathbf{y}}_{i.}-\bar{\mathbf{y}}_{..})'$. Untuk melihat ada tidaknya pengaruh perlakuan perlu dihitung statistik uji pada *MANOVA* yang dinamakan uji Wilks' lambda.

$$\Lambda = \frac{|\mathbf{JK(G)}|}{|\mathbf{JK(G)}+\mathbf{JK(P)}|} \tag{13}$$

dimana $\mathbf{JK(G)}$ dan $\mathbf{JK(P)}$ telah didefinisikan pada persamaan (10) dan (11).

Setelah diperoleh nilai jumlah kuadrat galat dan jumlah kuadrat perlakuan, substitusikan nilai tersebut ke dalam rumus uji Wilks' lambda. Hasil perhitungan uji Wilks' lambda akan disubstitusikan ke dalam rumus uji pada Tabel 3 sesuai dengan nilai p dan t.

Hasil perhitungan dari rumus-rumus dalam Tabel 4 dibandingkan dengan F tabel dengan derajat bebas sesuai pada uji yang dipakai dalam Tabel Bartlett. Pengujian hipotesis didasarkan pada F hitung dan F tabel dengan derajat bebas (υ_1) dan (υ_2). Jika nilai $F_{hit} > F_{\alpha(\upsilon_1,\upsilon_2)}$, maka H_0 ditolak dan jika $F_{hit} < F_{\alpha(\upsilon_1,\upsilon_2)}$, maka H_0 diterima. Taraf uji (α) yang umum digunakan adalah $\alpha = 5\%$ dan $\alpha = 1\%$. Pengujian hipotesis selain menggunakan tabel F, dapat juga menggunakan tabel Wilks' lambda dengan ketentuan hipotesis nol ditolak jika $\Lambda \le \Lambda_{\alpha,p,\upsilon_1,\upsilon 2}$. Tabel Wilks' lambda hanya berlaku untuk selang kepercayaan 95% atau $\alpha = 5\%$.

Tabel 3. Tabel Bartlett

Banyaknya Variabel Pengamatan	Banyaknya Perlakuan	Sebaran Percontohan Untuk Data Normal Ganda
$p = 1$	$t \ge 2$	$\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{t} r_i - t}{t-1}\right)\left(\dfrac{1-\Lambda}{\Lambda}\right) \sim F_{t-1,\sum_{i=1}^{t} r_i}$
$p = 2$	$t \ge 2$	$\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{t} r_i - t - 1}{t-1}\right)\left(\dfrac{1-\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda}}\right) \sim F_{2(t-1),2\left(\sum_{i=1}^{t} r_i - t - 1\right)}$
$p \ge 1$	$t = 2$	$\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{t} r_i - p - 1}{p}\right)\left(\dfrac{1-\Lambda}{\Lambda}\right) \sim F_{p,\sum_{i=1}^{t} r_i - p - 1}$
$p \ge 1$	$t = 3$	$\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{t} r_i - p - 2}{p}\right)\left(\dfrac{1-\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda}}\right) \sim F_{2p,2\left(\sum_{i=1}^{t} r_i - p - 2\right)}$
Untuk p dan t selain empat kategori di atas		$\left[(n-1) - \left(\dfrac{p+t}{2}\right)\right]\ln\Lambda \sim \chi^2_{p(t-1)}$

Studi Kasus

Contoh kasus diambil dari skripsi mahasiswa pertanian dengan judul "Beberapa Perlakuan Fisik Terhadap Perkecambahan Benih Kemiri (Zuhri, 1996). Data RAL untuk masing-masing variabel pengamatan dituliskan menjadi satu tabel untuk memudahkan perhitungan. Jika pada *ANOVA* satu tabel berisi satu variabel pengamatan, maka pada *MANOVA* banyak variabel pengamatan digabungkan, seperti data pada Tabel 4.

Tabel 4. Data RAL Untuk *MANOVA*

Perlakuan	Pengamatan	Ulangan					Jumlah	Rata-rata
		1	2	3	4	5		
Rendam Air (A)	Daya cambah (D)	39,23	41,55	41,55	39,23	34,45	196,01	39,20
	Laju cambah (L)	9,17	8,67	8,75	7,33	8,20	42,12	8,42
	Tinggi batang (T)	30,73	25,60	27,80	22,53	16,97	123,63	24,73
	Panjang akar (P)	11,06	9,08	10,73	10,74	11,49	53,10	10,62
	Berat benih (B)	1,73	1,51	1,35	1,29	0,92	6,80	1,36
Rendam Air dan Kikis (AK)	Daya cambah (D)	39,23	43,85	39,23	46,15	48,45	216,91	43,38
	Laju cambah (L)	6,26	7,80	5,38	6,33	5,17	30,94	6,19
	Tinggi batang (T)	33,66	25,53	31,99	34,44	30,08	155,70	31,14
	Panjang akar (P)	13,87	14,74	11,79	14,70	11,92	67,02	13,40
	Berat benih (B)	1,82	2,74	2,00	2,79	1,98	11,33	2,27
Rendam Air dan Retak (AR)	Daya cambah (D)	63,44	63,44	69,73	66,42	60,68	323,71	64,74
	Laju cambah (L)	2,84	2,83	1,96	3,06	2,71	13,40	2,68
	Tinggi batang (T)	36,23	40,97	27,21	33,81	35,66	173,54	34,71
	Panjang akar (P)	15,24	16,28	16,15	16,01	15,06	79,28	15,86
	Berat benih (B)	3,34	2,85	3,37	2,79	4,17	16,52	3,30

Data di atas akan dianalisis dengan MANOVA. Pertama hipotesis yang diajukan yaitu:

$$H_0 : \begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{14} \\ \tau_{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{21} \\ \tau_{22} \\ \tau_{23} \\ \tau_{24} \\ \tau_{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{31} \\ \tau_{32} \\ \tau_{33} \\ \tau_{34} \\ \tau_{35} \end{bmatrix}$$

H_1 : Paling sedikit ada $\boldsymbol{\tau}_{ip} \neq \boldsymbol{\tau}_{jp}$ dimana $i \neq j$.

Dari hasil perhitungan *MANOVA* diperoleh nilai-nilai yang ditulis ke dalam tabel *MANOVA* berikut.

Tabel 5. *MANOVA* Pada RAL

Sumber Keragaman	Derajat Bebas	Matriks Jumlah Kuadrat
Perlakuan	2	$\begin{bmatrix} 1876,70 & -384,80 & 602,05 & 321,40 & 126,35 \\ -384,80 & 83,75 & -141,3 & -73,15 & -28,50 \\ 602,05 & -141,3 & 258,90 & 129,90 & 48,80 \\ 321,40 & -73,15 & 129,90 & 65,95 & 24,95 \\ 126,35 & -28,50 & 48,80 & 24,95 & 9,50 \end{bmatrix}$
Galat	12	$\begin{bmatrix} 149,24 & -2,04 & -19,52 & -2,96 & 2,04 \\ -2,04 & 7,00 & 8,12 & 4,56 & 1,52 \\ -19,52 & 8,12 & 261,24 & -12,08 & 1,96 \\ -2,96 & 4,56 & -12,08 & 13,00 & 0,36 \\ 2,04 & 1,52 & 1,96 & 0,36 & 2,44 \end{bmatrix}$
Total	14	$\begin{bmatrix} 2025,91 & -386,82 & 582,50 & 318,45 & 128,44 \\ -386,82 & 90,08 & -133,19 & -68,62 & -27,35 \\ 582,50 & -133,19 & 520,12 & 117,88 & 50,76 \\ 318,45 & -68,62 & 117,88 & 79,30 & 25,27 \\ 128,44 & -27,35 & 50,76 & 25,27 & 11,91 \end{bmatrix}$

Nilai Lambda Wilks' (Λ) adalah $0,007342$. F hitung yang digunakan untuk lima pengaruh perlakuan yang diamati $(p=5)$ dan perlakuan tiga kali $(t=3)$ berdasarkan Tabel Barlett adalah $17,072542$. Berdasarkan tabel diperoleh $F_{(0,05);(10,16)} = 3,69$ untuk tingkat kepercayaan 95% dan $F_{(0,01);(10,16)} = 2,49$ untuk tingkat kepercayaan 99%. Karena F hitung lebih besar daripada F tabel berarti H_0 ditolak artinya perlakuan berpengaruh sangat nyata terhadap daya kecambah, laju perkecambahan, tinggi batang, panjang akar, dan berat benih. Dengan tabel Wilks' lambda diperoleh $\Lambda_{0,05;5,2,12} = 0,153$ yang berarti H_0 ditolak.

Kesimpulan dan Saran

Prosedur perhitungan pada *MANOVA* tidak berbeda jauh dengan *ANOVA*. Perbedaannya yaitu jika pada *ANOVA* menggunakan variabel skalar, maka pada *MANOVA* menggunakan variabel vektor. Prosedur perhitungan *ANOVA* maupun *MANOVA* berawal dari penentuan hipotesis yang akan diuji, kemudian menghitung jumlah kuadrat total, jumlah kuadrat perlakuan, dan jumlah kuadrat galat. Uji F yang digunakan pada *ANOVA* berbeda dengan uji F pada *MANOVA* . uji pada *MANOVA* didahului mencari nilai Lambda Wilk's yang selanjutnya digunakan untuk mencari F hitung dengan rumus yang tertera pada Tabel Barlett (Tabel 4) ke uji F yang digunakan. Setelah nilai F hitung diperoleh, barulah dibandingkan dengan nilai F tabel pada tingkat kepercayaan 95% atau 99% untuk menarik kesimpulan hipotesis mana yang akan ditolak ataupun diterima. Jika F hitung lebih besar dari F tabel, maka hipotesis nol ditolak dan jika F hitung lebih kecil dari F tabel, maka hipotesis nol diterima.

MANOVA lebih ringkas dan efisien dibandingkan dengan *ANOVA* bila variabel pengamatan lebih dari satu (*multivariable*). Nilai Λ yang diperoleh sebesar $0,007342$. Jika dibandingkan dengan $\Lambda_{0,05;5,2,12} = 0,153$, maka nilainya lebih kecil daripada nilai Lambda hitung. Oleh karena ketentuan tolak H_0 jika $\Lambda_{\text{hitung}} > \Lambda_{0,05;5,2,12}$, berarti hipotesis nol harus ditolak. Untuk prosedur lainnya menggunakan ketentuan tolak H_0 jika $F_{\text{hitung}} > F_{(\alpha;\upsilon_1,\upsilon_2)}$. Hasil F hitung yang diperoleh adalah $17,072542$ dan nilai F tabel dengan derajat bebas 2 dan 12 adalah $F_{(0,05);(10,16)} = 3,69$. Artinya tolak H_0 atau dengan kata lain perlakuan berpengaruh nyata pada pengamatan.

Untuk menganalisis keragaman data penelitian pada RAL yang memiliki lebih dari satu variabel pengamatan atau lebih dari satu variabel tak bebas seperti penelitian bidang pertanian lebih baik peneliti menggunakan *MANOVA* karena perhitungannya lebih ringkas sehingga tidak terlalu banyak membuang waktu dalam menganalisis data.

Daftar Pustaka

Anonim. 2003. *Analisis Peubah Ganda*. IPB. Bandung.

Cochran and Cox. 1957. *Experimental Designs*. John Willey and Sons. New York.

Christensen. 1996. *Analysis Of Variance, Design, and Regression*. Chapman and Hall. London.

French and Friends. *Multivariate Analysis Of Variance (MANOVA)*. http://ibgwww.colorado.edu/~carey/p7291dir/handouts/manova2.pdf

Hanafiah, K. A. 1991. *Rancangan Percobaan Teori dan Aplikasi*. Universitas Sriwijaya. Palembang.

Harlow, L. 2005. *The Essence of Multivariate Thinking Basic Themes and Methods.* Lawrence Erlbaum Associates. London.
Lentner, M and Thomas. B. 1986. *Experimental Design and Analysis*. Valey Book Company. Blacksburg.
Morrison. 1978. *Multivariate Statistical Method*. Mcgraw-Hill International Book Company. Auckland.
Rencher, A. 1998. *Multivariate Statistical Inference and Aplications*. Jhon Willey & Sons Inc. Canada.
Rencher, A. 2002. *Methods of Multivariate Analysis*. Jhon Willey & Sons Inc. Canada.
Richard and Dean. 2002. *Applied Multivariate Statistical Analysis*. Prentice Hall. USA.
Riduwan. 2006. *Dasar-Dasar Statistika*. Alfabeta. Bandung.
Simon, H. 2007. *Metode Inventore Hutan*. Pustaka Pelajar. Yogyakarta.
Sastrosupadi, A. 2000. *Rancangan Percobaan Praktis Bidang Pertanian*. Kanisius. Malang.
Steel dan James. 1991. *Terjemahan Prinsip dan Prosedur Statistika.* Gramedia Pustaka Utama. Jakarta.
Walpole. R. 1990. *Terjemahan Pengantar Statistika*. PT. Gramedia. Jakarta.
Walpole dan Raymond. 1995. *Terjemahan Ilmu Peluang dan Statistika Untuk Insinyur dan Ilmuwan*. ITB. Bandung.
Yang, K and Jayant. T. 2004. *Multivariate Statistical Method in Quality Management.* Mcgraw-Hill International Book Company. Auckland.
Zuhri, S. 1996. *Beberapa Perlakuan Fisik terhadap Perkecambahan Benih Kemiri (Aleurites moluccana Wild.)*. Skripsi Fakultas Pertanian UNIB. Bengkulu.

KAJIAN KORELASI ANTAR PEUBAH BEBAS DALAM REGRESI LINIER BERGANDA TERHADAP KOEFISIEN DETERMINASINYA

Hernales Sunardi[1], **Sigit Nugroho**[2], **dan Baki Swita**[2]

1 Alumni Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Bengkulu

2 Staf Pengajar Matematika Fakultas MIPA Universitas Bengkulu

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan mengkaji dan mempelajari tentang hubungan korelasi yang terjadi antar peubah bebas dalam regresi linier berganda serta mengetahui pengaruh korelasi tersebut terhadap koefisien determinasinya. Metode yang digunakan dalam penulisan ini adalah studi literatur dan data yang digunakan adalah data *trial and error* yang dibuat menggunakan program komputer Microsoft EXCEL. Hasil penelitian menunjukkan bahwa korelasi yang terjadi antar peubah bebas dalam regresi linier berganda akan berpengaruh terhadap nilai koefisien determinasi yang dihasilkan dan model regresi yang baik dihasilkan jika antar peubah bebasnya tidak saling berkorelasi.

Kata Kunci : Korelasi, Regresi Linier Berganda, Koefisien Determinasi.

1. PENDAHULUAN

Pada proses pengolahan data peneliti akan selalu berkepentingan untuk menentukan hubungan antara dua peubah atau lebih dan seberapa kuat hubungan antara peubah-peubah tersebut. Jika ingin mengetahui keeratan antar peubah maka digunakan analisis korelasi, sedangkan jika ingin mengetahui bentuk hubungan dua peubah atau lebih, digunakan analisis regresi.

Korelasi dan Regresi keduanya mempunyai kaitan yang sangat erat. Setiap regresi pasti ada korelasinya, sedangkan korelasi belum tentu dilanjutkan dengan regresi. Hubungan antara peubah-peubah yaitu antara peubah yang telah diketahui dengan peubah yang akan diramalkan, diformulasikan dalam bentuk persamaan matematis. Persamaan matematis yang memungkinkan untuk meramalkan nilai-nilai suatu peubah tak bebas dari nilai-nilai satu atau lebih peubah bebas disebut persaaman regresi. Peubah yang nilainya ingin diduga berdasarkan persamaan regresi disebut peubah tak bebas, dan peubah yang digunakan sebagai dasar untuk membuat pendugaan disebut peubah bebas.

Secara umum regresi merupakan metode statistika yang digunakan untuk mengetahui ada tidaknya hubungan linier antara satu atau beberapa peubah bebas terhadap satu peubah tak bebas. Jika nilai peubah tak bebas diduga berdasarkan satu peubah bebas saja, maka dinamakan regresi sederhana (*Simple Regression*). Jika nilai peubah tak bebas diduga berdasarkan dua atau lebih peubah bebas, maka dinamakan regresi linier berganda (*Multiple Regression*).

Analisis regresi juga dapat digunakan untuk melakukan pendugaan terhadap parameter yang ada dalam model serta untuk kepentingan peramalan. Jika tujuan utama dari pembentukan model regresi adalah untuk meramalkan peubah tak bebas dari peubah-peubah bebas tertentu, maka model yang terbentuk haruslah model regresi terbaik, yaitu model yang mencerminkan pola hubungan yang sesungguhnya antara peubah bebas dengan peubah tak bebas. Setiap pembentukan model regresi terbaik dapat dilakukan dengan melihat berbagai kriteria, diantaranya adalah koefisien determinasi $\left(R^2\right)$, koefisien determinasi yang disesuaikan $\left(\bar{R}^2\right)$, uji analisis varians, uji parsial (uji-t), dan kuadrat tengah galat.

Demikian juga dalam pembentukkan model regresi linier berganda, dapat dilihat dengan salah satu dari kriteria tersebut, yaitu dengan koefisien determinasi (R^2), dan koefisien determinasi yang disesuaikan $\left(\bar{R}^2\right)$. Dalam regresi linier berganda, kebaikan model dari R^2 dan pengujian hipotesis dilihat dari koefisien regresi. Jika nilai R^2 dekat dengan satu maka makin baik kecocokan model dengan data dan sebaliknya, jika nilai R^2 dekat dengan nol maka kecocokan model dengan data kurang baik.

Akan tetapi pada regresi linier berganda sering terjadi korelasi yang tinggi antar peubah-peubah bebasnya yang dikenal dengan istilah multikolinieritas. Multikolinieritas berarti adanya hubungan linier yang sempurna atau pasti diantara beberapa atau semua peubah bebas dari model regresi berganda. Jika multikolinieritas terjadi, maka pendugaan menggunakan metode kuadrat terkecil akan menghasilkan penduga yang masih tetap tak bias dan konsisten, tetapi tidak efisien sehingga varian dari koefisien regresi menjadi tidak minimum.

2. REGRESI LINIER BERGANDA

2.1 Model Regresi Linier Berganda

Regresi linier berganda merupakan perluasan langsung dari regresi linier sederhana. Pada regresi linier sederhana hanya satu peubah bebas (*X*) yang digunakan, sedangkan regresi linier berganda ada sebanyak *k* peubah bebas yang digunakan yaitu $X_1, X_2, ..., X_k$ (Paulson, 2007).

Persamaan regresi linier berganda yang mengandung *k* peubah bebas dan *n* pengamatan secara umum dapat dirumuskan dalam bentuk berikut:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + ... + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i,\ i = 1, 2, ..., n$$

Model Regresi Linier Berganda pada persamaan diatas dapat dituliskan dalam bentuk matriks. Dengan menggunakan lambang matriks model regresi linier berganda dapat ditulis sebagai model regresi linier umum, yaitu:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

2.2 Asumsi Regresi Linier Berganda

Asumsi yang digunakan pada model regresi linier berganda pada dasarnya sama dengan asumsi untuk model regresi linier sederhana. Manurung *et al*., (2005) *dalam* Naftali mengatakan bahwa pada regresi ada sepuluh asumsi yang harus dipenuhi yang disebut dengan asumsi linier klasik. Adapun sepuluh asumsi tersebut yaitu:

1. Model regresi linier,
2. Nilai *X* tetap dalam sampel yang dilakukan berulang-ulang,
3. $E\left(\varepsilon_i\right) = 0$,
4. Homokedastisitas atau $\text{var}(\varepsilon_i)$ tetap untuk semua pengamatan,
5. Tidak ada Autokorelasi,
6. $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ untuk $i \neq j$,

7. $n > k+1$ (jumlah pangamatan harus lebih besar dari jumlah koefisien yang diduga),
8. Nilai X bervariasi,
9. Spesifikasi model harus benar,
10. Tidak ada multikolinieritas.

2.3 Metode Kuadrat Terkecil Pada Regresi Linier Berganda

Metode yang paling umum digunakan untuk menduga koefisien regresi adalah metode kuadrat terkecil. Metode ini dipilih karena mudah digunakan dan dibawah asumsi-asumsi tertentu memiliki sifat-sifat yang yang dapat menghasilkan penduga yang baik.

Rencher & Schaalje (2008) mengatakan nilai penduga untuk koefisien $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_k$ pada model regresi persamaan (1) atau (3) dapat diduga menggunakan metode kuadrat terkecil yaitu dengan cara meminimumkan jumlah kuadrat galat:

$$JKG = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_{i1} - ... - \beta_k X_{ik})^2$$

Peminimuman JKG dapat diperoleh dengan cara menurunkan JKG secara parsial terhadap koefisien $\beta_0, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$ kemudian menyamakan hasil turunan tersebut dengan nol. Sehingga diperoleh persamaan normal sebagai berikut:

$$(\boldsymbol{X'X})\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X'Y})$$

Jika $(\boldsymbol{X'X})$ tidak singular atau $(\boldsymbol{X'X})$ merupakan matriks dengan $\det(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}) \neq 0$ sehingga matriks $(\boldsymbol{X'X})$ mempunyai invers, maka persamaan normal mempunyai jawab yang tunggal yaitu:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X'X})^{-1} (\boldsymbol{X'Y})$$

Penduga kuadrat terkecil $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, ..., \hat{\beta}_k$ bersifat *best linier unbiased estimator* (*BLUE*). *Best* maksudnya adalah varian minimum dan *linier* menunjukkan bahwa penduga adalah fungsi linier dari Y (Rencher dan Schaalje, 2008).

2.4 Pengujian Hipotesis Koefisien Regresi Linier Berganda

Untuk melihat pengaruh variable bebas terhadap variable tak bebas baik secara keseluruhan maupun secara individual maka dilakukan pengujian koefisien regresi.

2.5 Koefisien Determinasi

Setelah menaksir persamaan regresi dari data, masalah berikutnya yang dihadapi ialah menilai baik buruknya kecocokan model regresi yang digunakan dengan data. Untuk menilai kecocokan model dengan data, diperlukan suatu ukuran yang dinamakan dengan koefisien determinasi atau koefisien penentu yang dilambangkan dengan R^2.

Koefisien determinasi biasanya dinyatakan dalam bentuk persen, karena koefisien determinasi merupakan persentase keragaman peubah bebas yang dapat dijelaskan oleh model persamaan regresi. Nilai R^2 persamaan regresi yang makin mendekati 100% menunjukkan bahwa makin banyak keragaman peubah bebas yang dapat dijelaskan dari persamaan regresi tersebut. Koefisien Determinasi memiliki dua sifat penting yaitu :

1. Koefisien determinasi $\left(R^2\right)$ merupakan besaran non negatif artinya selalu bernilai positif, batasnya adalah $0 \le R^2 \le 1$.
2. Jika R^2 bernilai 1 berarti suatu kecocokan sempurna, sedangkan R^2 bernilai 0 berarti tidak ada hubungan antara peubah tak bebas dengan peubah yang menjelaskannya.

Rumus yang digunakan untuk mencari nilai Koefisien Determinasi yaitu :

$$R^2 = \frac{JKR}{JKT}$$

3. KOEFISIEN KORELASI ANTAR PEUBAH BEBAS DALAM REGRESI LINIER BERGANDA

3.1 Koefisien Korelasi

Korelasi merupakan suatu hubungan antar peubah. Korelasi ada yang positif dan negatif. Uji statistik yang mengukur hubungan antar peubah disebut analisis korelasi. Indeks yang mengukur hubungan antar peubah disebut koefisien korelasi.

Koefisien korelasi digunakan untuk mengukur hubungan keeratan antar dua peubah. Pada proses perhitungannya korelasi tidak menggunakan model meskipun hubungan yang diukur bersifat linier. Dengan kata lain besaran koefisien korelasi tidak menggambarkan hubungan sebab akibat antar dua peubah atau lebih tetapi hanya menggambarkan hubungan linier antar peubah.

Koefisien korelasi bivariat yang paling lama dan banyak digunakan yaitu korelasi yang dikembangkan oleh *Karl Pearson* yang disebut dengan koefisien korelasi momen hasil kali Pearson atau sering disingkat dengan koefisien korelasi Pearson. Perhitungan dalam korelasi ini didasarkan pada data sebenarnya (peubah asli).

Misalkan $\left(X_1,Y_1\right),\left(X_2,Y_2\right),\ldots,\left(X_n,Y_n\right)$ merupakan pasangan data yang diperoleh dari dua peubah *X* dan *Y*. Koefisien korelasi antar *X* dan *Y* dinotasikan dengan r_{xy} dan dirumuskan sebagai berikut :

$$r = \frac{\operatorname{cov}\left(X_i,Y_i\right)}{\sqrt{\operatorname{var}\left(X\right)\cdot\operatorname{var}\left(Y\right)}}$$

atau

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}}$$

Jika penyebut dan pembilang dari persamaan diatas dibagi dengan *n*, maka *r* menjadi:

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)\left(Y_i-\bar{Y}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2\right)}}$$

Jika antara kedua peubah bebas yang dihitung nilai korelasinya (*X* dan *Y*) di bentuk kedalam model maka akan membentuk suatu model regresi linier sederhana. Kecocokan model regresinya dapat dilihat dari kuadrat koefisien korelasi antara *X* dan *Y* (r^2). Pada regresi linier sederhana nilai r^2 tersebut sama dengan nilai koefisien determinasinya (R^2).

Akan tetapi hubungan $r^2 = R^2$ tersebut hanya benar untuk dua peubah karena koefisien korelasi hanya mengukur hubungan linier antar dua peubah, sedangkan R^2 berlaku untuk banyak peubah karena definisi R^2 tidak tergantung pada *X*. *R* dapat dipandang sebagai perluasan dari korelasi sederhana *r* untuk banyak peubah.

Koefisien korelasi mempunyai standar error (S_r) yang dapat dihitung menggunakan persamaan berikut:

$$S_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}$$

Pada analisis korelasi tidak ada asumsi statistika yang diperlukan dalam menghitung koefisien korelasi, tetapi ada asumsi tentang uji hipotesis dan selang kepercayaan dalam koefisien korelasi. Hipotesis untuk koefisien korelasi dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 1. Hipotesis koefisien korelasi

H_0	H_1	Daerah penolakan H_0
$r = 0$	$r \neq 0$	$\lvert t\rvert \geq t_{\alpha,n-2}$

Sedangkan untuk pengujian koefisien korelasi dapat digunakan uji-t. Statistik uji yang digunakan yaitu:

$$t = \frac{r}{S_r}$$

3.2 Multikolinieritas

Pada prakteknya jarang ditemukan adanya peubah bebas yang berhubungan secara sempurna atau data yang tidak memuat beberapa komponen galat. Akan tetapi jika terdapat beberapa atau semua peubah yang korelasi (kolinier) satu sama lain merupakan suatu peristiwa yang umum dalam praktek regresi linier berganda. Kolinier berarti terdapat beberapa peubah bebas (X_i) yang berkorelasi satu sama lain, sehingga menghasilkan data dalam kondisi yang buruk (*ill-conditioned*).

Pada regresi linier berganda korelasi antar peubah bebas dikenal dengan istilah multikolinieritas yang pertama kali diperkenalkan oleh Ragnar Frisch pada tahun 1934, yang menyatakan bahwa multikolinieritas terjadi jika adanya hubungan linier yang sempurna *(perfect)* atau pasti *(exact)* diantara beberapa atau semua peubah bebas dari model regresi berganda (Rahardiantoro, 2008). Jadi dalam regresi linier berganda multikolinieritas merupakan masalah yang selalu terjadi ketika dua atau lebih peubah bebas saling berkorelasi satu sama lain.

Kasus pada multikolinieritas yang sering terjadi ada dua yaitu multikolinieritas sempurna dan multikolinieritas tak sempurna. Multikolinieritas sempurna terjadi jika suatu peubah bebas bergantung sepenuhnya pada peubah bebas yang lain, sedangkan multikolinieritas tak sempurna dapat terjadi bila dua atau lebih peubah dalam model saling berkaitan.

Menurut Montgomery & Peck *dalam* Naftali (2007) adanya multikolinieritas dalam regresi linier berganda disebabkan oleh berbagai hal antara lain metode pengumpulan data yang digunakan, kendala model pada populasi yang diamati, spesifikasi model, dan penentuan jumlah peubah bebas yang lebih banyak dari jumlah pengamatan. Oleh karena itu, dalam suatu penelitian harus benar-benar diperhatikan metode, model, spesifikasi model dan jumlah peubah bebas yang digunakan.

3.2.1 Pengaruh Multikolinieritas

Sembiring (2003) menyatakan jika korelasi terjadi antara dua peubah atau lebih dalam suatu persamaan regresi maka pendugaan koefisien dari peubah yang bersangkutan tidak lagi tunggal, melainkan tidak terhingga banyaknya sehingga tidak mungkin lagi menduganya. Hal ini disebabkan $(\boldsymbol{X'X})$ menjadi singular sehingga matriks $(\boldsymbol{X'X})^{-1}$ tidak dapat dihitung karena satu atau lebih kolom merupakan kombinasi linier dari kolom-kolom lainnya sehingga $|\boldsymbol{X'X}| = 0$. Akibatnya nilai dugaan yang diperoleh tidak unik atau tunggal lagi (Draper & Smith, 1992).

Pendugaan yang umum suatu koefisien regresi berfungsi untuk mengukur perubahan nilai harapan dari peubah tak bebas jika diberikan peubah bebas yang meningkat oleh satu unit sementara semua peubah bebas yang lain dianggap tetap. Akan tetapi hal ini tidak sepenuhnya bisa diterapkan jika terjadi multikolinieritas. Demikian juga pendugaan menggunakan metode kuadrat terkecil akan menghasilkan penduga yang masih tak bias dan konsisten tetapi tidak efisien lagi karena varian yang dihasilkan menjadi lebih besar atau tidak minimum. Varian yang seperti itu tidak sesuai dengan sifat penduga kuadrat terkecil, sehingga pendugaan dengan metode kuadrat terkecil untuk regresi linier berganda ini kurang efisien dan kurang tepat lagi.

Multikolinieritas juga menyebabkan koefisien regresi untuk suatu peubah bergantung pada nilai peubah bebas yang lain. Koefisien regresi yang akan diduga cenderung mempunyai variabilitas sampel yang besar dan bertukar-tukar secara luas dari satu sampel kesampel yang berikutnya. Akibatnya hasil yang diperoleh merupakan informasi yang tidak tepat mengenai koefisien regresi yang sebenarnya sehingga koefisien regresi tidak mencerminkan pengaruh apapun dari peubah bebas terhadap peubah tak bebas tetapi hanya pengaruh secara parsial (sebagian).

Montgomery & Hines (1990) *dalam* Rahardiantoro (2008) menjelaskan bahwa dampak multikolinieritas dapat mengakibatkan koefisien regresi yang dihasilkan oleh analisis regresi berganda menjadi sangat lemah atau tidak dapat memberikan hasil analisis yang mewakili sifat atau pengaruh dari peubah bebas yang bersangkutan. Masalah multikolinieritas dapat menyebabkan uji-t menjadi tidak signifikan padahal jika masing-masing peubah bebas diregresikan secara terpisah dengan peubah tak bebas (*simple regression*) uji-t menunjukkan hasil yang signifikan.

3.2.2 Mendeteksi Multikolinier

Ada beberapa pendekatan umum yang dapat digunakan untuk mendeteksi dan mengevaluasi kolinier antara peubah bebas baik secara informal maupun formal. Nachrowi dan Usman (2006) *dalam* Naftali (2007) menyatakan multikolinieritas dapat dideteksi dengan adanya koefisien determinasi $\left(R^2\right)$ yang tinggi dan uji-F yang signifikan. Cara ini merupakan pendeteksian adanya multikolinieritas secara informal, sedangkan secara formal, dapat dilihat dari matriks korelasi antar peubah bebas, nilai *Variance Inflation Factor* (*VIF*), dan nilai eigen matriks $(\boldsymbol{X'X})$.

Cara mendeteksi adanya multikolinier yang serius dapat dilakukan dengan cara informal berikut:

1. Perubahan besar pada koefisien regresi yang diduga jika peubah bebas ditambah atau dihapus.
2. Tidak ada hasil yang signifikan pada pengujian koefisien regresi secara individu untuk peubah bebas yang penting.
3. Koefisien regresi yang di duga dengan tanda secara aljabar yang adalah kebalikan dari nilai yang diharapkan dari pertimbangan teoritis atau pengalaman sebelumnya.
4. Koefisien yang besar dari korelasi sederhana antar pasangan peubah bebas pada matriks korelasi.
5. Interval kepercayaan yang luas untuk koefisien regresi yang mewakili peubah bebas yang penting.

Metode informal hanya yang dideskripsikan mempunyai pembatasan penting dan tidak memberikan pengukuran yang kualitatif dari dampak multikolinier dan tidak akan mengidentifikasi sifat alami dari multikolinier. Sebagai contoh, jika peubah bebas X_1, X_2 dan X_3 mempunyai korelasi berpasangan yang rendah, maka pengujian untuk koefisien korelasi sederhana tidak akan memperlihatkan keberadaan dari hubungan antar kelompok peubah bebas sehingga korelasi yang tinggi antara X_1 dan kombinasi linier dari X_2 dan X_3. Pembatasan yang lain dari metode informal yaitu kadang-kadang perilaku yang diamati boleh terjadi tanpa adanya multikolinier.

Suatu cara yang lebih formal dan sering digunakan untuk mendeteksi korelasi antar peubah bebas yaitu dengan cara menghitung nilai *variance inflation factor* (VIF). *variance inflation factor* yang mengukur berapa banyak varian dari penduga koefisien regresi yang dibandingkan jika peubah bebas tidak berhubungan secara linier. Nilai VIF dapat dihitung menggunakan persamaan berikut:

$$\text{VIF} = \frac{1}{1-R^2}$$

di mana R^2 adalah koefisien determinasi. Jika nilai VIF suatu peubah melebihi 10 dan nilai R^2 melebihi 0,90 maka suatu peubah dikatakan berkorelasi sangat tinggi dan dapat dipastikan adanya multikolinieritas terjadi.

Cara formal lain yang digunakan untuk mendeteksi dan mengevaluasi mutikolinieritas yaitu dengan cara menghitung nilai eigen (λ) dari matriks $(X'X)$. Semakin kecil nilai eigen yang diperoleh maka makin tinggi korelasi yang terjadi antar peubah bebas (Sembiring, 2003). Jumlah dari nilai eigen yang diperoleh akan sama dengan banyaknya nilai eigen. Nilai eigen (λ) diperoleh dengan cara menghitung:

$$|A - \lambda I| = 0$$

Keterangan:

A : Matriks kuadrat $(\boldsymbol{X'X})$

I : Matriks identitas

λ : Nilai eigen

Nilai eigen memiliki beberapa metode penting untuk mendeteksi multikolinieritas, yaitu:

1. Index Kondisi (*Condition Index*)

CI dapat dihitung untuk masing-masing nilai eigen(λ). Pertama, nilai eigen diurutkan dari nilai yang besar ke nilai yang kecil, di mana λ_{maks} = nilai eigen yang paling besar dan λ_j = nilai eigen yang paling kecil. CI diperoleh dengan cara membagi nilai eigen yang terbesar (λ_{maks}) dengan masing-masing nilai eigen yang lain, sehingga diperoleh:

$$CI = \frac{\lambda_{\text{maks}}}{\lambda_j}, j = 1, 2, ..., k$$

2. Bilangan Kondisi (*Condition Number*)

Bilangan kondisi (CN) merupakan rasio antara nilai eigen yang terbesar dan nilai eigen yang terkecil, sehingga diperoleh:

$$CN = \frac{\lambda_{\text{maks}}}{\lambda_{\text{min}}}$$

Jika $CN < 100$ berarti tidak ada multikolinier, jika $100 \leq CN \leq 1000$ maka terjadi kolinier yang wajar, sedangkan jika $CN > 1000$ maka terjadi kolinier yang berarti. Belsley *et al*. (1980) *dalam* Paulson (2007) mengatakan bahwa jika $\sqrt{CN} > 30$ maka terjadi kolinier yang berarti dan mengarah ke kolinier yang serius.

3. Proporsi Varian

Cara lain yang bermanfaat yaitu menggunakan proporsi varian untuk masing-masing peubah bebas (X_i) dimana proporsi total varian dari penduga untuk komponen utama tertentu. Nilai eigen merupakan varian dari komponen utama. Analisi komponen utama hanya suatu nilai peubah bebas yang baru merupakan kombinasi linier dari peubah bebas yang asli. Nilai eigen yang mendekati nol menunjukkan adanya kolinier. Jika nilai eigen meningkat maka nilai CI akan meningkat. Proporsi varian merupakan jumlah total variabilitas yang dijelaskan oleh nilai eigen komponen utama dari peubah bebas. Baris yang kumulatif adalah kontribusi beberapa atau semua nilai eigen untuk memasukkan peubah bebas yang spesifik. Jumlah dari semua proporsi varian akan sama dengan 1 dan jumlah dari nilai eigen merupakan banyaknya nilai eigen.

4. TELADAN PENERAPAN

Teladan penerapan ini bertujuan agar penjelasan tentang hubungan antara korelasi antar peubah bebas yang terjadi dalam regresi linier berganda terhadap koefisien determinasinya dapat dipahami dengan mudah. Dalam hal ini, data yang digunakan adalah data yang dibentuk dengan metode *trial & error* menggunakan program Microsoft Excel.

Data yang dibentuk adalah untuk model regresi linier berganda yang terdiri dari dua peubah bebas (X_1 dan X_2) dan peubah tak bebas (*Y*). Berdasarkan data tersebut akan diamati korelasi untuk pasangan peubah-peubah yang digunakan. Pasangan peubah yang akan diamati tersebut yaitu $(X_1, X_2), (X_1, Y), (X_2, Y)$.

Dari pasangan peubah tersebut tersebut terdapat beberapa kemungkinan bentuk data yang mungkin terjadi. Kemungkinan bentuk tersebut tersebut dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 2. Bentuk Kemungkinan Data

Kemungkinan	(X_1, X_2)	(X_1, Y)	(X_2, Y)
1	✗	✗	✗
2	✗	✗	✓
3	✗	✓	✗
4	✗	✓	✓
5	✓	✓	✓
6	✓	✓	✗
7	✓	✗	✓
8	✓	✗	✗

Keterangan:

X_i	:	Peubah bebas ke-*i*, $i = 1, 2$
Y	:	Peubah yang dianggap sebagai peubah tak bebas
✗	:	Menyatakan bahwa tidak ada korelasi antar peubah
✓	:	Menyatakan bahwa ada korelasi antar peubah

Berdasarkan kemungkinan bentuk data tersebut akan diketahui bagaimana pengaruh korelasi yang terjadi antar peubah bebas terhadap koefisien determinasinya

4.1 Perhitungan dan Uji Korelasi terhadap Pasangan Peubah

Seperti penjelasan diatas, sebelum melakukan perhitungan koefisien korelasi terhadap pasangan peubah yang digunakan terlebih dahulu dibentuk data dengan metode *trial & error* menggunakan program Microsoft Excel. Data yang dibentuk adalah untuk model regresi linier berganda yang terdiri dari dua peubah bebas (X_1 dan X_2) dan satu peubah tak bebas (*Y*). Secara umum, model regresi berganda untuk kasus diatas dapat ditulis sebagai berikut:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \varepsilon_i \text{, } i = 1, 2, ..., 20$$

Langkah-langkah yang dilakukan dalam membentuk data tersebut adalah sebagai berikut:

- Bentuk terlebih dahulu data X_1 dan X_2 , kemudian bentuk data tersebut menjadi matriks.
- Lakukan pengujian terhadap X_1 dan X_2 menggunakan uji-t
- Buat hipotesis sebagai berikut:

$$H_0 : r(X_1, X_2) = 0$$

$H_1 : r(X_1, X_2) \neq 0$

- Hitung korelasi antar X_1 dan X_2 mengunakan rumus:

$$r(X_i,Y_i)=\frac{n\sum_{i=1}^{n}X_iY_i-\sum_{i=1}^{n}X_i\sum_{i=1}^{n}Y_i}{\left[\left(n\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\sum_{i=1}^{n}(X_i)^2\right)\left(n\sum_{i=1}^{n}Y_i^2-\sum_{i=1}^{n}(Y_i)^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

  Atau menggunakan fungsi yang ada pada program microsoft excel yaitu fungsi CORREL yang dapat digunakan untuk menghitung $r\left(X_i, Y_i\right)$.

- Hitung standar error dari koefisien korelasi tersebut menggunakan rumus:

$$S_r=\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}$$

- Hitung nilai t hitung menggunakan rumus:

$$t_{hitung}=\frac{r}{S_r}$$

- Bandingkan t_{hitung} dengan t_{tabel}, dimana $t_{tabel}=t_{\alpha;n-2}$, dengan kriteria pengujian yaitu Tolak H_0 jika $|t_{hitung}| \geq t_{tabel}$
- Tentukan kesimpulan yang diperoleh dari hasil perbandingan antara t_{hitung} dengan t_{tabel}.

Setelah data X_1 dan X_2 telah dibentuk dan memenuhi kondisi yang diinginkan, langkah selanjutnya yang harus dilakukan yaitu membentuk data *Y*. Data *Y* yang dibentuk tersebut harus dilakukan pengujian menggunakan uji-t terlebih dahulu agar terpenuhi kondisi yang diinginkan. Langkah yang dilakukan sama dengan langkah yang dilakukan untuk peubah X_1 dan X_2.

Berikut ini salah satu contoh dari simulasi data menggunakan program Microsoft Excel yang telah memenuhi kondisi yang ditentukan:

Tabel 3. Kemungkinan Data yang dihasilkan

n	X_0	X_1	X_2	Y
1	1	31	-18	-13
2	1	-1	-17	15
3	1	-1	3	-2
4	1	5	-7	-7
5	1	11	-5	0
6	1	-15	-15	6
7	1	7	-6	14
8	1	9	10	-7
9	1	10	-3	-8
10	1	11	-6	-9
11	1	6	5	2
12	1	0	9	-3
13	1	2	3	13
14	1	11	5	9
15	1	-6	-3	-11
16	1	13	3	3
17	1	1	4	14
18	1	-10	-7	-8
19	1	-3	-3	-14
20	1	-6	-7	18

Setelah setiap bentuk kemungkinan data berhasil di bentuk, langkah selanjutnya adalah menghitung nilai koefisien determinasi (R^2) model. Langkah-langkah yang harus dilakukan adalah:

- Namakan matriks yang memuat semua peubah dengan matriks A
- Lakukan pemfaktoran QR terhadap matriks A, sehingga di dapat matriks Q dan matriks R.
- Hitung Jumlah kuadrat Regresi (*JKR*), Jumlah Kuadrat Galat (*JKG*) dan Jumlah Kuadrat Total (*JKT*) berdasarkan matriks R.
- Hitung nilai koefisien determinasi (R^2) model regresi dengan rumus:

$$R^2 = \frac{JKR}{JKT}$$

Berikut salah satu contoh hasil perhitungan nilai korelasi antar peubah berdasarkan data yang telah dibentuk:

Tabel 4. Hasil Perhitungan

Pasangan Peubah	(X1,X2)	(X1,Y)	(X2,Y)
Nilai Korelasi (r)	0.01448	-0.23276	0.01641
Kesalahan dari r (Sr)	0.23568	0.22923	0.23567
t-hitung	0.06146	-1.01539	0.06962
t-tabel	2.10092		
Kesimpulan	Ho diterima	Ho diterima	Ho diterima
R^2 Model regresi	0.0579		

4.2 Pembahasan

Data yang diamati pada penelitian ini yaitu data untuk model regresi linier berganda yang terdiri dari dua peubah bebas (X_1 dan X_2) dan peubah tak bebas (*Y*). Dari peubah tersebut akan dibentuk pasangan antar peubah bebas dan tak bebas maupun sesama peubah bebas sehingga terbentu pasangan (X_i, X_j) dan (X_i, Y) .

Untuk model regresi dengan dua peubah bebas, pasangan peubah yang akan diamati tersebut yaitu $(X_1, X_2), (X_1, Y), (X_2, Y)$ dan banyaknya pasangan data yang mungkin terjadi yaitu sebanyak 2^3 atau delapan kemungkinan.

Secara umum banyak pasangan data yang akan diamati dapat diperoleh dari persamaan $C_2^m + m$, dimana *C* menyatakan kombinasi dan *m* menyatakan banyaknya peubah bebas yang digunakan. Sedangkan untuk banyaknya kemungkinan data yang akan diamati diperoleh dari persamaan $2^{C_2^m + m}$. Misalkan $Q = C_2^m + m$, sehingga diperoleh banyaknya kemungkinan data yang mungkin terjadi yaitu 2^Q .

Berdasarkan pada pasangan data dan kemungkinan bentuk data tersebut akan diamati korelasi yang terjadi antar peubah. Korelasi yang terjadi antar peubah dipengaruhi oleh faktor langsung dan faktor tak langsung. Faktor langsung yaitu dipengaruhi langsung oleh peubah yang saling berkorelasi sedangkan faktor tidak lansung yaitu faktor yang berasal dari peubah lain.

Hasil korelasi yang diamati tersebut kemudian dibandingkan dengan nilai koefisien determinasi (R^2) model regresi yang digunakan. Pada model regresi nilai R^2 tersebut digunakan untuk menilai kecocokan data dengan model regresi. Semakin tinggi nilai R^2 maka kecocokan data dengan model yang digunakan semakin baik, dan sebaliknya.

Berdasarkan hasil pengamatan yang dilakukan dapat dilihat bahwa korelasi yang terjadi antar peubah akan berpengaruh nilai R^2 yang dihasilkan. Demikian juga jika terjadi korelasi antar peubah bebas akan mempengaruhi nilai korelasi masing-masing peubah bebas terhadap peubah tak bebas.

Dari hasil pengamatan yang dilakukan diketahui bahwa persamaan regresi yang baik jika antar peubah bebas tidak berkorelasi satu sama lain, sedangkan antara peubah bebas dan tak bebas berkorelasi tinggi.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil simulasi data dan pembahasan sebelumnya, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut :

1. Korelasi yang terjadi antar peubah bebas dalam regresi linier berganda akan mempengaruhi nilai R^2 .
2. Model regresi yang baik dihasilkan dari kemungkinan data yang antar peubah bebasnya tidak berkorelasi.

DAFTAR PUSTAKA

Christensen, R. 1996. *Analysis of Variance, Design and Regression Applied Statistical Method*. Chapman & Hall. London.

Draper, N. R. dan H. Smith. 1992. *Analisis Regresi Terapan, edisi kedua (terjemahan)*. PT. Gramedia Pustaka Utama. Jakarta.

Montgomery, D.C. 1976. *Design and Analysis of Experiments*. Jhon Wiley & Sons. New York.

Naftali, Y. 2007. *Regresi dan Multikolinieritas*. http://yohanli.wordpress.com/2007/12/18/multikolinieritas-dalam-regresi/

Kutner, *et al*,. 2005. *Applied Linier Statistical Models*. McGraw-Hill. New York.

Paulson, D. S. 2007. *Handbook of Regression and Modeling Apliplication for the Clinical and Pharmaceutical Industries*. Chapman & Hall. London.

Rahardiantoro, D. 2008. *Principal Component Analysis (PCA) sebagai Metode Jitu untuk Mengatasi Masalah Multikolinieritas*. http://dickyRahardiantoro.blogspot.com/2006/12/Principal-Component-Analysis-pca.htm

Rencher, A. C. dan G. B. Schaalje. 2007. *Linier Model in Statistics*. John Willey & Sons. London.

Sembiring, R. K. 2003. *Analisis Regresi.* ITB Bandung. Bandung.

Walpole, R.E dan R.H. Myers 1995. *Ilmu Peluang dan Statistik untuk Insyinyur dan Ilmuwan, Terjemahan R.K Sembiring, Edisi Keempat*. ITB. Bandung.

Weisberg, S. 2007. *Applied Linear Regression*. John Wiley & Sons. New York.

Model Estimasi Kebutuhan Listrik Pelanggan PLN Untuk Satu Bulan Berikutnya Menggunakan Recursive Least Square
(studi kasus : Pelanggan PLN Kota Bengkulu)

Zazili Mustofa[1], **Fachri Faisal**[2], **dan Jose Rizal**[2]

1. *Alumni Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Bengkulu*
2. *Staf Pengajar Matematika Fakultas MIPA Universitas Bengkulu*

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan memperkenalkan dan mengulas metode *Recursive Least Square* dalam pendugaan koefisien regresi dari model pemakaian listrik Pelanggan PLN Kota Bengkulu. Penelitian ini membandingkan metode *Recursive Least Square* dengan metode *Least Square* biasa dan melihat hasilnya dalam keakuratan hasil dan kecepatan pemrosesan data. Hasil yang diperoleh adalah tidak terdapat perbedaan antara metode *Recursive Least Square* dengan metode *Least Square* biasa dalam hal keakuratan hasil, tetapi dalam keefisienan perhitungan *Recursive Least Square* lebih efisien dibandingkan dengan metode *Least Square* biasa dimana tidak terjadi pengulangan penghitungan terhadap data lama. Variabel jumlah pelanggan jenis tarif sosial, jenis tarif rumah tangga, jenis tarif bisnis, jenis tarif industri dan jenis tarif pemerintah berpengaruh nyata terhadap total pemakaian listrik pelanggan PLN Kota Bengkulu dengan model sebagai berikut:

$$Total = 2.213x_{Ts2}(t) + 166.78x_{R2}(t) + 96216.94x_{R6}(t) + 601.38x_{B2}(t) + 2253.55x_{B5}(t)$$
$$+60158.3x_{I6}(t) + 51177.7x_{I7}(t) + 2.51x_{TP5}(t) + \varepsilon(t)$$
$$t = 1, 2, ..., n$$

.

Penelitian ini telah menghasilkan sebuah aplikasi sederhana menghitung koefisien regresi menggunakan bahasa pemrograman Turbo Pascal for Windows 1.5.

Kata Kunci : *Least Square, Recursive Least Square,* Analisis Regresi, Pemakaian Listrik

PENDAHULUAN

Latar Belakang Masalah

Awal tahun 2008 krisis listrik kembali terjadi di sebagian wilayah Indonesia. Akar masalah terletak pada pasokan sumber energi yang tidak mencukupi, dan sistem yang tidak efisien. Di tingkat lokal masalah serupa terjadi dimana pasokan listrik yang ditargetkan PLN tidak mencukupi kebutuhan pertumbuhan pemakaian listrik. PLN Provinsi Bengkulu setidaknya harus sudah menyiapkan sebuah sistem yang mampu menangani krisis listrik bila hal tersebut terjadi.

Pihak PLN perlu mengetahui besar konsumsi listrik yang dibutuhkan pelanggan untuk tiap bulannya. Analisis regresi dapat diterapkan dalam menduga besar pemakaian listrik pelanggan PLN. Dengan analisis regresi dibuat sebuah model yang menggambarkan pengaruh variabel-variabel bebas **X** yaitu data jumlah pelanggan yang dimiliki PLN, yang mempengaruhi respon **Y** yaitu besarnya pemakaian listrik.

$$y(t) = x_1(t)\beta_1 + x_2(t)\beta_2 + ... + x_p(t)\beta_p + \varepsilon$$

Koefisien-koefisien β_i yang belum diketahui di atas dapat diduga dengan beberapa metode. Salah satu metode yang terkenal adalah metode Kuadrat Terkecil yang selanjutnya akan disebut *Least Square*. Yang dapat ditulis:

$$\vec{\beta}_0 = (\mathbf{X}_0^T\mathbf{X}_0)^{-1}\mathbf{X}_0^T\mathbf{y}_0$$

dimana **X** adalah matriks data variabel bebas, y variabel respon, dan β adalah koefisien-koefisien yang dicari.

Bertambahnya jumlah pelanggan serta catatan baru pemakaian listrik pelanggan lama dalam waktu tersebut memberikan data baru untuk pihak PLN, data baru ini belum tercakup dalam model yang telah dibuat. Model yang telah dibuat perlu dirombak kembali untuk menjaga keakuratan model. Kesulitan yang dihadapi dalam perombakan kembali model lama ini adalah waktu yang cukup lama dibutuhkan untuk menduga kembali koefisien-koefisien baru, penghitungan ulang yang panjang disebabkan invers-invers dihitung ulang dalam jumlah besar, yang mengakibatkan ketidakefisienan perhitungan.

Pendugaan koefisien dengan metode *Recursive Least Square* melibatkan data yang telah ada sebelumnya secara efisien. Penyelesaian metode ini dituliskan sebagai berikut:

$$\vec{\boldsymbol{\beta}} = \vec{\beta}_0 + \mathbf{k}(y - \vec{x}^T\vec{\beta}_0)$$

dimana $\vec{\boldsymbol{\beta}}$ adalah koefisien baru yang diduga, $\vec{\boldsymbol{\beta}}_0$ adalah koefisien lama yang digunakan kembali, **k** adalah tetapan dari data lama, x dan y adalah data baru.

Menanggapi metode yang relatif baru ini, muncul ketertarikan penulis untuk membahas dan mendalami lebih jauh metode *Recursive Least Square* sehingga dapat menjelaskan pengertian *Recursive Least Square*, menduga koefisien persamaan regresi pemakaian listrik pelanggan PLN, dan bagaimana cara menerapkan metode *Recursive Least Square* pada pendugaan koefisien persamaan regresi pemakaian listrik pelanggan PLN.

RECURSIVE LEAST SQUARE

Least Square

Prinsip dasar metode *Least Square* adalah mencari jumlah minimum kuadrat galat. Suatu model linier dengan *i=1,2,...,p* koefisien dan variabel bebas *x(t)*, yang menggambarkan suatu respon *y(t)* pada saat *t* dengan sistem linier *p* koefisien, dapat dituliskan dalam bentuk

$$y(t) = \beta_1 x_1(t) + \beta_2 x_2(t) + ... + \beta_p x_p(t) + \varepsilon(t) \qquad t = 1, 2, ..., n \tag{2.1}$$

Dengan $E(e_i) = 0$ untuk tiap i dan $n \geq p$.

Dengan pendekatan matriks, persamaan (2.1) dapat dituliskan kembali dalam bentuk

$$\vec{Y} = \mathbf{X}\vec{\beta} + \vec{e} \tag{2.2}$$

Diketahui $\vec{Y} \in R^n, \vec{\beta} \in R^p$, X adalah matriks berukuran *nxp*

Keterangan $\vec{Y}=\begin{pmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(n) \end{pmatrix}$, $\vec{\beta}=\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}$, $\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_1(1) & x_2(1) & \dots & x_p(1) \\ x_1(2) & x_2(2) & \dots & x_p(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1(n) & x_2(n) & \dots & x_p(n) \end{pmatrix}$

Dari persamaan (2.2), diperoleh vektor galat $\vec{e}\in R^n$, yaitu

$$\vec{e}=\vec{Y}-\mathbf{X}\vec{\beta} \tag{2.3}$$

Untuk memperoleh $\hat{\vec{\beta}}$ dengan metode *least square,* maka harus meminimumkan jumlah kuadrat galat persamaan (2.3), jumlah kuadrat tersebut dapat dinyatakan sebagai:

$$S=\vec{e}^{T}\vec{e} \tag{2.4}$$

$S(\vec{\beta})$ diturunkan terhadap $\vec{\beta}$ dan menyamakan hasilnya dengan nol, diperoleh

$$\vec{\beta}=(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\vec{Y} \tag{2.5}$$

Agar terdapat solusi unik untuk persamaan tersebut, $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}$ haruslah matriks non singular.

Sifat-sifat Penduga Least Square

Beberapa asumsi diperlukan sebelum menduga suatu parameter regresi linier, diantaranya adalah: 1) Nilai harapan galat adalah nol. 2) Tiap galat tidak saling berkorelasi dan mempunyai varians yang sama. 3) Variabel-variabel bebasnya merupakan bilangan riil, tanpa mengandung kesalahan. 4) Ukuran matriks X adalah *nxp* dimana *p<n.*

Ketika semua asumsi klasik terpenuhi, metode *Least Square* merupakan penduga takbias linier terbaik (BLUE = *best linear unbiased estimator*).

***Recursive Least Square*s**

Pollock (1998) mengatakan bahwa teori pendugaan *Recursive Least Square* pertama kali ditemukan oleh Gauss. Sebelumnya telah dikenal model berikut:

$$y(t)=\beta_1x_1(t)+\beta_2x_2(t)+...+\beta_px_p(t)+\varepsilon(t) \qquad t=1,2,...,n \tag{2.6}$$

keterangan:

$$\vec{Y}=\begin{pmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(n) \end{pmatrix},\quad \vec{\beta}=\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix},\quad \mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_1(1) & x_2(1) & \dots & x_p(1) \\ x_1(2) & x_2(2) & \dots & x_p(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1(n) & x_2(n) & \dots & x_p(n) \end{pmatrix}$$

$x_i(t)=\left[x_1(t)\ x_2(t),...,x_p(t)\right]$ adalah vektor baris *p* koefisien yang diambil pada saat n, kemudian sebuah informasi pengamatan baru pada saat *n+1* yaitu *y(n+1)*,

$$y(n+1)=x_1(n+1)\boldsymbol{\beta}_1+x_2(n+1)\boldsymbol{\beta}_2+...+x_p(n+1)\boldsymbol{\beta}_p \tag{2.7}$$

dan

$$x_i(n+1)=\left[x_1(n+1)\ x_2(n+1)\ ...\ x_p(n+1)\right] \tag{2.8}$$

menghendaki penduga *Least Square* $\hat{\beta}$ ditinjau kembali.

Penambahan persamaan (2.7) ke himpunan persamaan awal, persamaan (2.6), menghendaki solusi persamaan-persamaan dihitung kembali. Dengan kata lain, solusi awal, persamaan (2.5), tidak digunakan dalam memperoleh solusi baru persamaan (2.7).

Recursive Least Square menghitung solusi baru dengan melibatkan solusi awal. Perhatikan kembali solusi *Least Square* awal sebagai berikut:

$$(\mathbf{X}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_0)\hat{\vec{\beta}}_0 = \mathbf{X}_0^{\mathrm{T}}\vec{Y}_0 \tag{2.9}$$

(Haykin, 2002) menyatakan suatu faktor pembobot λ dengan (0<λ<1), dan *t=1,2,...,n*, digunakan untuk mengurangi pengaruh data lama, dituliskan

$$\mathbf{X}_0\sqrt{\lambda^{n-t}} = \mathbf{X}_0^{\bullet} \text{ dan } \vec{Y}_0\sqrt{\lambda^{n-t}} = \vec{Y}_0^{\bullet} \tag{2.10}$$

Persamaan (2.9) dituliskan kembali

$$\hat{\vec{\beta}}_0 = (\mathbf{X}_0^{\bullet\mathrm{T}}\mathbf{X}_0^{\bullet})^{-1}\mathbf{X}_0^{\bullet\mathrm{T}}\vec{Y}_0^{\bullet} \tag{2.11}$$

Sehingga

$$(\mathbf{X}_0^{\bullet\mathrm{T}}\mathbf{X}_0^{\bullet})\hat{\vec{\beta}}_0 = \mathbf{X}_0^{\bullet\mathrm{T}}\vec{Y}_0^{\bullet} \tag{2.12}$$

Dengan memisalkan $\mathbf{X}_0^{\bullet\mathrm{T}}\mathbf{X}_0^{\bullet} = \mathbf{M_0}$ dan $\mathbf{X}_0^{\bullet\mathrm{T}}\vec{Y}_0^{\bullet} = \vec{q}_0$ diperoleh

$$\mathbf{M_0}\hat{\vec{\beta}}_\mathbf{0} = \vec{q}_0 \tag{2.13}$$

Didefinisikan pula $\mathbf{X}_1^{\bullet\mathrm{T}}\mathbf{X}_1^{\bullet} = \mathbf{M}_1$, sehingga

$$\mathbf{M}_1 = \lambda\mathbf{M}_0 + x_i^{\mathrm{T}}(n+1)x_i(n+1) \tag{2.14}$$

Dan

$$\vec{q}_1 = \lambda\vec{q}_0 + x_i^{\mathrm{T}}(n+1)y(n+1) \tag{2.15}$$

Sehingga persamaan untuk menduga $\hat{\beta}$ yang memuat data baru dapat dituliskan

$$\mathbf{M}_1\hat{\vec{\beta}}_1 = \vec{q}_1 \tag{2.16}$$

Sisi kanan dapat dijabarkan sebagai

$$\begin{aligned}\vec{q}_1 &= \lambda\vec{q}_0 + x_i^{\mathrm{T}}(n+1)y(n+1)\\ &= \lambda\mathbf{M}_1\hat{\vec{\beta}}_\mathbf{0} + x_i^{\mathrm{T}}(n+1)(y(n+1) - \lambda x_i(n+1)\hat{\vec{\beta}}_\mathbf{0})\end{aligned} \tag{2.17}$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (2.17) pada persamaan (2.16), diperoleh

$$\begin{aligned}\hat{\vec{\beta}}_1 &= \mathbf{M}_1^{-1}\vec{q}_1\\ &= \lambda\hat{\vec{\beta}}_\mathbf{0} + \mathbf{M}_1^{-1}x_i^{\mathrm{T}}(n+1)(y(n+1) - \lambda x_i(n+1)\hat{\vec{\beta}}_\mathbf{0})\end{aligned} \tag{2.18}$$

Dugaan terbarukan $\hat{\vec{\beta}}_1$ berbeda dari dugaan sebelumnya $\hat{\vec{\beta}}_0$ dengan sebuah fungsi galat $h(n+1) = y(n+1) - \lambda x_i(n+1)\hat{\vec{\beta}}_\mathbf{0}$ yang datang dari penaksiran $x_i(n+1)\hat{\vec{\beta}}_\mathbf{0}$.

Beban penghitungan dapat lebih dipermudah dengan menerapkan sebuah skema untuk menghitung matriks invers $\mathbf{M_1}^{-1}$ yang dilakukan dengan memodifikasi nilai $\mathbf{M_0}^{-1}$. Yaitu

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_1^{-1} &= (\lambda\mathbf{M}_0 + x_i^{\mathrm{T}}(n+1)x_i(n+1))^{-1}\\ &= (\lambda\mathbf{M}_0)^{-1} - \left(\lambda\mathbf{M}_0\right)^{-1}x_i^{\mathrm{T}}(n+1)(x_i(n+1)\\ &\quad \left(\lambda\mathbf{M}_0\right)^{-1}x_i^{\mathrm{T}}(n+1)+1)^{-1}x_i(n+1)\left(\lambda\mathbf{M}_0\right)^{-1}\end{aligned} \tag{2.19}$$

Sehingga persamaan (2.18) dapat dituliskan sebagai

$$\hat{\vec{\beta}}_1 = \hat{\vec{\beta}}_{\mathbf{0}} + \mathbf{k}(n+1)(y(n+1) - x_i(n+1)\hat{\vec{\beta}}_{\mathbf{0}}) \qquad (2.20)$$

Dengan

$$\mathbf{k}(n+1) = \left(\lambda \mathbf{M}_0\right)^{-1} x_i^{\mathrm{T}}(n+1)(x_i\,(n+1)\left(\lambda \mathbf{M}_0\right)^{-1} x_i^{\mathrm{T}}(n+1)+1)^{-1} \qquad (2.21)$$

.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian terapan (*applied research)*. Populasi dalam penelitian ini adalah pelanggan PLN Kota Bengkulu. Sampel yang digunakan adalah pelanggan PLN dari bulan Januari tahun 2005 hingga Oktober 2007.

Data dalam penelitian ini adalah data rasio besar berupa data pemakaian listrik selama 34 bulan, dan data jumlah pelanggan tiap jenis pelanggan PLN berdasarkan pengelompokan kelas tarif. Data ini merupakan data sekunder yang diperoleh dari PLN Kota Bengkulu.

Data akan diolah menggunakan analisis regresi, pendugaan koefisien dalam persamaan regresi diolah menggunakan metode *Least Square* biasa dan metode *Recursive Least Square*. Semua asumsi yang disyaratkan akan diperiksa, hingga mendapatkan kesimpulan yang valid.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Kondisi umum

PT. PLN (Persero) Wilayah IV Cabang Bengkulu berada dibawah koordinasi PT. PLN (Persero) Wilayah IV Sumatera Bagian Selatan. PT. PLN Cabang Bengkulu memiliki 2 Rayon dan 7 Ranting yang tersebar di setiap kabupaten dan kotamadya di Provinsi Bengkulu. Pelanggan PLN Kota Bengkulu yang menjadi objek penelitian ini dibagi menjadi 2 rayon yaitu Rayon Nusa Indah dan Rayon Teluk Segara.

Berdasarkan data yang diperoleh dari bagian informasi PT. PLN Cabang Bengkulu, jumlah pelanggan PLN kota Bengkulu mengalami pertumbuhan setiap bulannya. Semakin banyak pelanggan mengakibatkan semakin banyak pula kebutuhan energi listrik yang didistribusikan.

Kebutuhan listrik total pelanggan PLN kota Bengkulu adalah jumlah dari kebutuhan listrik berbagai tipe pelanggan sebagai berikut: Kebutuhan listrik pelanggan tipe sosial, adalah listrik yang diperuntukkan bagi kepentingan sosial misalnya rumah ibadah. Kebutuhan listrik rumah tangga, adalah listrik yang diperuntukkan bagi pelanggan untuk kepentingan rumah tangga. Kebutuhan listrik bisnis, adalah listrik yang diperuntukkan sebagai penunjang kegiatan bisnis seperti pertokoan. Kebutuhan listrik Industri, adalah listrik yang diperuntukkan bagi kegiatan industri. Kebutuhan listrik pemerintah, adalah listrik untuk menopang kegiatan pemerintahan seperti perkantoran, termasuk penerangan jalan. Selain lima jenis kebutuhan di atas masih ada jenis Multiguna yang merupakan kebutuhan listrik pada saat tertentu, misalnya perayaan besar MTQ.

Pendugaan koefisien antara *Least Square* biasa dan *Recursive Least Square*

Program menghitung koefisien persamaan regresi dikenal luas dan mudah ditemukan oleh para peneliti. Umumnya perangkat lunak ini menggunakan metode *Least Square* biasa dan tidak menggunakan *Recursive Least Square*.

Program mengitung koefisien regresi yang penulis kembangkan mampu memperoleh koefisien regresi menggunakan *Least Square* biasa dan *Recursive Least Square*. Program yang penulis kembangkan menggunakan bahasa pemrograman *Turbo Pascal for windows version. 1.5*.

Penggunaan metode *Least Square* biasa yaitu dengan menggabungkan data baru bersama data lama dan koefisien dicari seperti mencari koefisien awal.

Penggunaan metode *Recursive Least Square* dilakukan dengan menyimpan informasi tentang data awal yaitu nilai koefisien awal dan informasi mengenai M_0^{-1} data awal. Kemudian data baru dioperasikan bersama nilai koefisien awal dan informasi mengenai M_0^{-1} data awal. Dengan mengikuti tahap-tahap pemrosesan data di dalamnya diperoleh data baru berupa koefisien baru dan informasi baru mengenai M_0^{-1} yang berguna untuk penghitungan berikutnya.

Hasil yang diperoleh, koefisien baru yang diperoleh menggunakan metode *Recursive Least Square* sama hasilnya dengan koefisien yang diperoleh dengan menghitung ulang keseluruhan data.

Estimasi Pemakaian Listrik Pelanggan PLN tarif sosial Kota Bengkulu

Plot sisa menunjukkan data memenuhi asumsi kenormalan, statistik Durbin-Watson menunjukkan nilai dimana terjadi autokorelasi sehingga dilakukan transformasi, transformasi yang dilakukan sebagai berikut (Gujarati, 1999):

Untuk data pertama : $\sqrt{\left(1-\hat{\rho}^2\right)}\ln V_i$

Untuk data kedua dan seterusnya : $\left(\ln V_{it} - \hat{\rho}\ln V_{i(t-1)}\right)$

Dengan $\hat{\rho} = 1 - d/2$

d = nilai statistik d Durbin Watson, dan V_i adalah X_i dan Y_i

Pendeteksian heterokedastisitas menggunakan plot antara nilai prediksi Y_i dengan kuadrat residual menunjukkan bahwa tidak terjadi heterokedastisitas.

Pemeriksaan nilai F hitung dan kesignifikanan secara parsial menunjukkan telah terjadi multikolinearitas dimana terlihat F hitung tinggi (signifikan) akan tetapi sebagian kecil atau bahkan tidak satupun koefisien yang signifikan secara parsial (Supranto, 1995). Untuk mengatasi hal ini beberapa variabel bebas tidak dimasukkan.

Persamaan regresi bagi besar pemakaian listrik pelanggan tarif sosial PLN Bengkulu menjadi sebagai berikut:

$$y_{Ts}(t) = 2.213x_{Ts2}(t) + \varepsilon(t)$$

$$t = 1, 2, ..., n$$

y_{Ts} = Hasil transformasi $y_s(t)$ (pemakaian Listrik tarif sosial (kWh))
x_{Ts2} = Hasil transformasi $x_{s2}(t)$ (jumlah pelanggan tarif S2 900 VA)
β = koefisien regresi
ε = Galat

Anava memperlihatkan nilai F-hitung sebesar 13565.53 dengan *p-value* 1.24E-43. Karena *p-value* lebih kecil dari taraf nyata 5%, maka dapat dinyatakan bahwa pengaruh peubah-peubah secara bersamaan adalah nyata pada taraf 5%. Hasil Estimasi dan pengujian secara individual persamaan regresi linier berganda terlihat seperti pada Tabel di bawah ini:

Tabel 4.3.1.7 Pengujian Parsial Persamaan Regresi baru tarif sosial

	Coefficients	*Standard Error*	*t Stat*	*P-value*
S2/900	2.21373	0.019006672	116.47119	9.83E-45

Estimasi Pemakaian Listrik Pelanggan PLN tarif rumah tangga Kota Bengkulu

Plot sisa menunjukkan data memenuhi asumsi kenormalan. Statistik Durbin-Watson menunjukkan nilai sebesar d=1.42658 dengan dL=1.15 dan dU=1.81 sehingga pengujian tidak dapat memberikan kesimpulan, namun berdasarkan plot *residual versus the order of the data* diperlihatkan perubahan yang cukup rapat pada tanda dalam data yang berurutan mengindikasikan tidak terjadi autokorelasi.

Pendeteksian heterokedastisitas menggunakan plot antara nilai prediksi Y_i dengan kuadrat residual menunjukkan bahwa tidak terjadi heterokedastisitas.

Pemeriksaan nilai F hitung dan kesignifikanan secara parsial menunjukkan telah terjadi multikolinearitas dimana terlihat F hitung tinggi (signifikan) akan tetapi sebagian besar tidak signifikan secara parsial (Supranto, 1995), untuk mengatasi hal ini beberapa variabel bebas tidak dimasukkan.

Persamaan regresi bagi besar pemakaian listrik pelanggan tarif sosial PLN Bengkulu menjadi sebagai berikut:

$$y_R(t) = 166.78 x_{R2}(t) + 96216.94 x_{R6}(t) + \varepsilon(t)$$
$$t = 1, 2, \ldots, n$$

Anava memperlihatkan nilai F-hitung sebesar 5739.37 dengan *p-value* 1.47E-40. Karena *p-value* lebih kecil dari taraf nyata 5%, maka dapat dinyatakan bahwa pengaruh peubah-peubah secara bersamaan adalah nyata pada taraf 5%. Hasil Estimasi dan pengujian secara individual persamaan regresi linier berganda terlihat seperti pada Tabel 4.3.2.7 di bawah ini:

Tabel 4.3.2.7 Pengujian Parsial Persamaan Regresi Baru Tarif Rumah Tangga

	Coefficients	*Standard Error*	*t Stat*	*P-value*
R 1/900 VA	166.7884173	18.8230661	8.860852762	4.00699E-10
R3 / > 6600 VA	96216.93886	16993.87736	5.661859083	2.89531E-06

Estimasi Pemakaian Listrik Pelanggan PLN tarif bisnis Kota Bengkulu

Plot sisa menunjukkan data memenuhi asumsi kenormalan. Statistik Durbin-Watson menunjukkan nilai sebesar d=1.95 dengan dL=1.27 dan dU=1.65 dan plot *residual versus the order of the data* memperlihatkan perubahan yang cukup rapat pada tanda dalam data yang berurutan sehingga mengindikasikan tidak terjadi autokorelasi.

Pendeteksian heterokedastisitas menggunakan plot antara nilai prediksi Y_i dengan kuadrat residual menunjukkan bahwa tidak terjadi heterokedastisitas.

Pemeriksaan nilai F hitung dan kesignifikanan secara parsial menunjukkan telah terjadi multikolinearitas yaitu F hitung tinggi (signifikan) akan tetapi sebagian besar tidak signifikan secara parsial (Supranto, 1995), untuk mengatasi hal ini beberapa variabel bebas tidak dimasukkan.

Persamaan regresi bagi besar pemakaian listrik pelanggan tarif sosial PLN Bengkulu menjadi sebagai berikut:

$$y_B(t) = \quad 601.38x_{B2}(t) + 2253.55x_{B5}(t) + \varepsilon(t) \qquad t = 1,2,...,n$$

Anava memperlihatkan nilai F-hitung sebesar 10135.57 dengan *p-value* 2.23E-44. Karena *p-value* lebih kecil dari taraf nyata 5%, maka dapat dinyatakan bahwa pengaruh peubah-peubah secara bersamaan adalah nyata pada taraf 5%. Hasil Estimasi dan pengujian secara individual persamaan regresi linier berganda terlihat seperti pada Tabel di bawah ini:

Tabel 4.3.3.7 Pengujian Parsial Persamaan Regresi Baru Tarif Bisnis

	Coefficients	*Standard Error*	*t Stat*	*P-value*
B I / 900 VA	601.383937	181.2880516	3.317284	0.002273
B2/>2200 VA S.D 200 kVA	2253.54853	268.0237977	8.408017	1.32E-09

Estimasi Pemakaian Listrik Pelanggan PLN tarif industri Kota Bengkulu

Hasil yang diperoleh, koefisien baru yang diperoleh menggunakan metode *Recursive Least Square* sama hasilnya dengan koefisien yang diperoleh dengan menghitung ulang keseluruhan data.

Sehingga disimpulkan persamaan regresi bagi besar pemakaian listrik pelanggan tarif industri PLN Bengkulu sebagai berikut:

$$y_I(t) = 60158.3x_{I6}(t) + 51177.7x_{I7}(t) + \varepsilon(t) \qquad t = 1,2,...,n$$

Anava memperlihatkan nilai F-hitung sebesar 3179.38 dengan *p-value* 1.2E-35. Karena *p-value* lebih kecil dari taraf nyata 5%, maka dapat dinyatakan bahwa pengaruh peubah-peubah secara bersamaan adalah nyata pada taraf 5%. Hasil Estimasi dan pengujian secara individual persamaan regresi linier berganda terlihat seperti pada tabel di bawah ini:

Tabel 4.3.4.6 Pengujian secara parsial Model Regresi tarif industri

	Coefficients	*Standard Error*	*t Stat*	*P-value*
I2 14 sd 200	60158.325	7825.89	7.68709	9.2E-09
I3 > 200 kVA	51177.685	5873.81	8.71286	5.9E-10

Dari tabel tersebut terlihat bahwa kedua peubah nyata pada taraf 5%.

Pemeriksaan asumsi dapat dilihat selengkapnya pada lampiran 12. Plot sisa menunjukkan data memenuhi asumsi kenormalan. Statistik Durbin-Watson menunjukkan nilai sebesar d=1.70641 dengan dL=1.33 dan dU=1.58 dan plot *residual versus the order of the data* memperlihatkan perubahan yang cukup rapat pada tanda dalam data yang berurutan mengindikasikan tidak terjadi autokorelasi.

Pendeteksian heterokedastisitas menggunakan plot antara nilai prediksi Y_i dengan residual menunjukkan bahwa tidak terjadi heterokedastisitas.

Pemeriksaan nilai F hitung dan kesignifikanan secara parsial tidak menunjukkan telah terjadi multikolinearitas, yaitu terlihat F hitung tinggi (signifikan) dan sebagian besar signifikan secara parsial.

Estimasi Pemakaian Listrik Pelanggan PLN tarif pemerintah Kota Bengkulu

Plot sisa menunjukkan data memenuhi asumsi kenormalan. Statistik Durbin-Watson menunjukkan nilai 0.883184 yang mengindikasikan terjadi autokorelasi sehingga dilakukan transformasi.

Pendeteksian heterokedastisitas menggunakan plot antara nilai prediksi Y_i dengan kuadrat residual menunjukkan bahwa tidak terjadi heterokedastisitas.

Pemeriksaan nilai F hitung dan kesignifikanan secara parsial menunjukkan telah terjadi multikolinearitas dimana terlihat F hitung tinggi (signifikan) akan tetapi sebagian besar tidak signifikan secara parsial (Supranto, 1995), untuk mengatasi hal ini beberapa variabel bebas tidak dimasukkan.

Persamaan regresi bagi besar pemakaian listrik pelanggan tarif pemerintah PLN Bengkulu menjadi sebagai berikut:

$$y_{TP}(t) = 2.51 x_{TP5}(t) + \varepsilon(t) \qquad t = 1, 2, \ldots, n$$

y_{TP} = Hasil transformasi $y_P(t)$ (pemakaian Listrik tarif Pemerintah (kWh))

x_{TP5} = Hasil transformasi $x_{P2}(t)$ (jumlah pelanggan tarif P2 2201 VA s.d 200 kVA)

β = koefisien regresi

ε = Galat

Tabel Anava memperlihatkan nilai F-hitung sebesar 315492 dengan *p-value* 1.08E-63. Karena *p-value* lebih kecil dari taraf nyata 5%, maka dapat dinyatakan bahwa pengaruh peubah-peubah secara bersamaan adalah nyata pada taraf 5%. Hasil Estimasi dan pengujian secara individual persamaan regresi linier berganda terlihat seperti pada Tabel di bawah ini:

Tabel 4.3.5.7 Pengujian Parsial Persamaan Regresi baru tarif pemerintah

	Coefficients	*Standard Error*	*t Stat*	*P-value*
P2 2201 VA s.d 200	2.508881	0.004467	561.6872	1.75E-65

Pemakaian Listrik Pelanggan PLN tarif Multiguna Kota Bengkulu

Penulis tidak dapat menentukan estimasi pemakaian listrik untuk jenis tarif ini.Data menunjukkan terdapat pengeluaran listrik yang cukup besar pada jenis ini namun data tentang banyaknya pelanggan adalah nol.

Ada banyak kemungkinan yang terjadi mengapa hal ini terjadi, misalnya terdapat pemakaian listrik yang tidak terdata oleh pihak PLN.

PENUTUP

Kesimpulan

1. Metode *Recursive Least square* dapat diterapkan pada persamaan regresi pemakaian listrik pelanggan tiap jenis tarif PLN kota Bengkulu.
2.Tidak terdapat perbedaan yang besar dalam hal kecepatan pemrosesan data untuk memperoleh koefisien regresi antara metode *Least Square* biasa dan metode *Recursive Least Square*. Hal ini karena perkembangan teknologi komputer yang demikian pesat sehingga pemrosesan data yang rumit dan banyak dapat dilakukan dengan cepat.

Perbedaan akan terlihat bila jumlah data yang dioperasikan sangat besar misalnya data yang terkumpul puluhan tahun dengan jumlah variabel yang banyak. Perbedaan keefektifan juga akan sangat dapat dirasakan bila pemrosesan data tidak didukung oleh perangkat komputer.

3. Metode *Recursive Least square* lebih efektif dibandingkan metode *Least Square* biasa. Hal ini dapat dilihat dari jenis dan banyak pengoperasian yang dilakukan, terutama pengoperasian matriks yang besar yang harus dikerjakan bila menggunakan metode *Least Square* biasa. Pada metode *Recursive Least Square* pengoperasian matriks yang dikerjakan lebih sedikit dari pada metode *least square* biasa.

4. Estimasi pemakaian listrik total berdasarkan jenis tarif pelanggan PLN Kota Bengkulu yaitu,

$$\text{Total} = y_S + y_R + y_B + y_I + y_P$$

$$Total = 2.213x_{Ts2}(t) + 166.78x_{R2}(t) + 96216.94x_{R6}(t) + 601.38x_{B2}(t) + 2253.55x_{B5}(t)$$
$$+60158.3x_{I6}(t) + 51177.7x_{I7}(t) + 2.51x_{TP5}(t) + \varepsilon(t) \qquad t = 1, 2, ..., n$$

Saran

1. Pihak PLN hendaknya menyelidiki peruntukan pemakaian listrik untuk tarif Multiguna. Selain itu ada jenis tarif yang memiliki kecenderungan pengurangan jumlah pelanggan yang diakibatkan mutasi daya yang diajukan pelanggan, hendaknya hal ini dapat dioptimalkan.

2. Perangkat lunak yang penulis kembangkan masih jauh dari kesempurnaan, karenanya pengembangan senjutnya dapat dilakukan.

3. Terdapat kesulitan yang cukup berarti ketika penulis mencoba menerapkan metode *Recursive Least Square* pada persamaan regresi estimasi penggunaan listrik PLN Kota Bengkulu, yaitu bahwa proses pengadaan listrik dari pembangkit hingga ke konsumen tidak sesederhana yang diperkirakan. Misalnya data pemakaian listrik pada bagian pemasaran PLN rayon Teluk Segara menggunakan sistem pembagian pelanggan berdasarkan tarif dan memiliki pembagian wilayah tersendiri, sedangkan pada bagian pembangkit, data pemakai listrik hingga ke pelanggan memiliki sistem berdasarkan penempatan penyulang sumber listrik (Gardu Induk, Gardu Hubung, Pembangkit dan Trafo).

4. Penelitian serupa dapat dilakukan yang akan sangat berguna apabila Estimasi yang dilakukan adalah estimasi beban puncak penyulang. Hal ini tidak penulis lakukan karena kesulitan yang penulis sebutkan pada poin sebelumnya.

DAFTAR PUSTAKA

Anonim. 2003. *Least Squares.* http://en.wikipedia.org/wiki/Least_Squares

Draper, N.R. and Smith, H. 1992. *Analisis Regresi Terapan.* edisi kedua. PT Gramedia Pustaka Utama. Jakarta.

Gujarati, D. 1991. *Ekonometrika Dasar*. Erlangga. Jakarta.

Haykin, S. 2002. *Adaptive Filtering Theory*. Prentice Hall.

Neter, J. *et al*. 1990. *Applied Linear Statistical Models*. 3rd editions. Richard D. Irwin Inc. Tokyo.

Pollock, D.S.G. 1998. *Time Series Analysis Signal Processing And Dynamics*. Academic Press. London.
Poularikas, A.D. 2006. *Adaptive Filtering Primer With Matlab.* CRC Press. USA.
Sembiring, R.K. 2003. *Analisis Regresi*. Penerbit ITB. Bandung.
Supranto, J. 2001. *Statistik Teori dan Aplikasi* Jilid 2. Penerbit Erlangga. Jakarta.
Zhu, Y. 2007. *Communications In Information and Systems*. International Press.

PENENTUAN KOEFISIEN ORTOGONAL POLINOMIAL PADA TARAF PERLAKUAN BERJARAK TAK SAMA

Endah Vivi Damayanti[1], Sigit Nugroho[2], dan Fachri Faisal[2]
1 Alumni Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Bengkulu
2 Staf Pengajar Matematika Fakultas MIPA Universitas Bengkulu

ABSTRACT

Quantitative treatment level is used to see functional relationship between treatment levels and its responses. Since responses is a function of treatment levels only, it can be approximated using a polynomial function. This research aims to study polynomial orthogonal procedure for the unequally spaced quantitative treatment levels, to determine their polynomial orthogonal coefficient values. The result shows polynomial orthogonal coefficient values at unequally spaced quantitative treatment levels depends on their treatment levels.

Key words: *quantitative treatment level, polynomial orthogonal, unequally spaced.*

I. PENDAHULUAN

Percobaan merupakan serangkaian kegiatan dimana setiap tahap dalam rangkaian benar-benar terdefinisikan, dilakukan untuk menemukan jawaban tentang permasalahan yang diteliti melalui suatu pengujian hipotesis. Pola atau tata cara penerapan tindakan-tindakan (perlakuan) dalam suatu percobaan pada kondisi/lingkungan tertentu kemudian menjadi dasar penataan dan metode analisis statistik terhadap data hasilnya disebut *rancangan percobaan* (Hanafiah, 2003). Tujuan utama rancangan percobaan adalah untuk mengetahui taraf atau tingkat signifikan dari pengaruh taraf-taraf perlakuan.

Dalam rancangan percobaan, dengan taraf perlakuan bersifat kuantitatif, bertujuan untuk mengetahui hubungan fungsional antara variabel respon sebagai fungsi dari taraf-taraf suatu faktor atau perlakuan. Respon merupakan fungsi dari taraf-taraf perlakuan, sehingga bentuk fungsinya dapat didekati dengan fungsi polinomial. Metode ortogonal polinomial adalah sebuah metode yang digunakan untuk menentukan hubungan fungsional antara tanggapan (respon) dan perlakuan-perlakuan yang terlibat dalam kisaran taraf faktor penelitian yang dicoba. Tiap polinomial ortogonal akan membentuk suatu kontras sehingga dalam membuat hubungan fungsional tersebut harus diperhatikan masalah kontras.

Taraf perlakuan kuantitatif, dapat dibagi menjadi taraf perlakuan kuantitatif berjarak sama dan taraf perlakuan kuantitatif berjarak tak sama. Dalam suatu percobaan, terkadang peneliti dengan sengaja atau tanpa sengaja menggunakan taraf perlakuan berjarak tak sama dengan berbagai alasan seperti untuk menghemat biaya, menghemat waktu, mempermudah penelitian atau karena terjadinya data hilang. Untuk percobaan yang menggunakan taraf perlakuan berjarak sama, koefisien kontras telah disajikan dalam tabel oleh Little dan Hills. Berdasarkan latar belakang di atas, permasalahan yang akan dijawab dalam penelitian ini adalah bagaimana cara menentukan koefisien ortogonal polinomial pada taraf perlakuan barjarak tak sama.

II. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian studi literatur. Tahapan yang dilakukan dalam penelitian adalah:

1. Penentuan koefisien ortogonal polinomial pada taraf perlakuan yang berjarak tak sama untuk taraf perlakuan 3, 4, dan 5 dengan memperhatikan sifat-sifat kontras dan ortogonal.
2. Penentuan nilai-nilai koefisien ortogonal polinomial untuk taraf perlakuan berjarak tak sama dengan 3, 4, dan 5 taraf.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Ortogonal Polinomial

Metode ortogonal polinomial dapat diterapkan terhadap perlakuan-perlakuan yang bersifat kuantitatif seperti populasi tanaman, takaran pupuk atau konsentrasi pestisida. Pengujian menurut metode ortogonal polinomial dimaksudkan untuk menentukan hubungan fungsional antara tanggapan (respon) dan perlakuan-perlakuan yang terlibat dalam kisaran taraf faktor penelitian yang dicoba.

Secara umum, fungsi matematis yang tepat untuk menggambarkan hubungan numerik antara variabel respon sebagai fungsi dari taraf-taraf suatu faktor atau perlakuan tidak diketahui. Tetapi dapat didekati dengan suatu model polinomial:

$$y_i = a_0 + a_1 X_i + a_2 X_i^2 + a_3 X_i^3 + \cdots + a_{t-1} X_i^{t-1} + \varepsilon_i \,,\; i = 1,2,...,t \qquad (1)$$

dimana x_i merupakan taraf-taraf faktor yang digunakan, y_i adalah respon yang diamati, dan ε_i komponen acak dari galat. Untuk sejumlah t taraf, derajat polinomialnya tidak dapat melebihi $(t-1)$.

Prosedur untuk menentukan koefisien ortogonal polinomial untuk percobaan dengan taraf perlakuan berjarak tak sama sangat kompleks, terutama apabila derajat polinomial besar akan sangat rumit. Sehingga untuk mempermudah pengerjaan, dalam skripsi ini hanya akan dibahas koefisien ortogonal polinomial untuk taraf perlakuan 3, 4, dan 5. Alasanya, karena dalam percobaan biologis khususnya pertanian, hampir tidak ada fenomena alam yang mempunyai bentuk hubungan fungsional hingga berderajat lebih dari 4. Bentuk kuadratik merupakan bentuk yang paling sering dijumpai.

Prosedur sederhana untuk ortogonal polinomial untuk taraf perlakuan berjarak tak sama dapat dilakukan sebagai berikut. Untuk sembarang gugus polinomial,

$$\begin{aligned} P_1 &= L_0 + L_1 x \\ P_2 &= Q_0 + Q_1 x + Q_2 x^2 \\ P_3 &= C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 \\ &\ldots \end{aligned} \qquad \textbf{(2)}$$

Misalkan,

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_x \left(L_0 + L_1 x\right) Y_x \text{ adalah komponen linier}\\&\textstyle\sum_x \left(Q_0 + Q_1 x + Q_2 x^2\right) Y_x \text{ adalah komponen kuadratik}\\&\textstyle\sum_x \left(C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3\right) Y_x \text{ adalah komponen kubik}\\&\ldots\end{aligned} \qquad \mathbf{(3)}$$

Dimana L_0, L_1, Q_0, Q_1, … merupakan konstanta, x adalah taraf suatu faktor kuantitatif, Y_x adalah pengamatan respon bilamana faktor memiliki taraf x, dan penjumlahan dilakukan untuk seluruh kemungkinan nilai-nilai x.

Alternatif lain dari penulisan komponen linier, kuadratik, kubik dan seterusnya adalah sebagai berikut,

$$\begin{aligned}L_i &= a + X_i\\Q_i &= b + cX_i + X_i^2\\C_i &= d + eX_i + fX_i^2 + X_i^3\\&\ldots\end{aligned} \qquad (4)$$

3.1.1. Faktor yang memiliki Tiga Taraf Perlakuan Kuantitatif

Penulisan komponen untuk 3 taraf kuantitatif ini adalah sebagai berikut. Misalkan terdapat sembarang gugus polinomial yang terdiri dari komponen linier dan komponen kuadratik sebagai berikut,

$$\begin{aligned}L_i &= a + X_i\\Q_i &= b + cX_i + X_i^2\end{aligned} \qquad (5)$$

Dimana $a, b,$ dan c adalah sebarang konstanta. Dengan memperhatikan sifat-sifat kontras dan ortogonal, sehingga untuk faktor yang memiliki 3 taraf kuantitatif persyaratan berikut harus dipenuhi: $\sum_i L_i = 0$, $\sum_i Q_i = 0$, dan $\sum_i L_i Q_i = 0$.

a. $\sum_{i=1}^{t} L_i = 0$

$$\sum_{i=1}^{t} L_i = at + \sum_{i=1}^{t} X_i \qquad (6)$$

b. $\sum_{i=1}^{t} Q_i = 0$

$$\sum_{i=1}^{t} Q_i = bt + c\sum_{i=1}^{t} X_i + \sum_{i=1}^{t} X_i^2 \qquad (7)$$

c. $\sum_{i=1}^{t} L_i Q_i = 0$

$$\sum_{i=1}^{t} L_i Q_i = abt + (ac + b)\sum_{i=1}^{t} X_i + (a + c)\sum_{i=1}^{t} X_i^2 + \sum_{i=1}^{t} X_i^3 \qquad (8)$$

3.1.2. Faktor yang memiliki Empat Taraf Perlakuan Kuantitatif

Penulisan komponen untuk 4 taraf kuantitatif ini adalah sebagai berikut. Misalkan terdapat sembarang gugus polinomial yang terdiri dari komponen linier, komponen kuadratik dan komponen kubik sebagai berikut,

$$\begin{aligned} L_i &= a + X_i \\ Q_i &= b + cX_i + X_i^2 \\ C_i &= d + eX_i + fX_i^2 + X_i^3 \end{aligned} \qquad (9)$$

Di mana nilai $a, b, c, d, e,$ dan f adalah sebarang konstanta. Dengan memperhatikan sifat-sifat kontras dan ortogonal, sehingga untuk faktor yang memiliki 4 taraf kuantitatif persyaratan berikut harus dipenuhi: $\sum_i L_i = 0$, $\sum_i Q_i = 0$, $\sum_i C_i = 0$, $\sum_i L_i Q_i = 0$, $\sum_i L_i C_i = 0$, dan $\sum_i Q_i C_i = 0$.

a. $\sum_{i=1}^{t} C_i = 0$

$$\sum_{i=1}^{t} C_i = dt + e\sum_{i=1}^{t} X_i + f\sum_{i=1}^{t} X_i^2 + \sum_{i=1}^{t} X_i^3 \qquad (10)$$

b. $\sum_{i=1}^{t} L_i C_i = 0$

$$\sum_{i=1}^{t} L_i C_i = adt + (ae + d)\sum_{i=1}^{t} X_i + (af + e)\sum_{i=1}^{t} X_i^2 + (a + f)\sum_{i=1}^{t} X_i^3 + \sum_{i=1}^{t} X_i^4 \qquad (11)$$

c. $\sum_{i=1}^{t} Q_i C_i = 0$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{t} Q_i C_i = bdt &+ (be + dc)\sum_{i=1}^{t} X_i + (bf + ce + d)\sum_{i=1}^{t} X_i^2 + (b + cf + e)\sum_{i=1}^{t} X_i^3 \\ &+ (c + f)\sum_{i=1}^{t} X_i^4 + \sum_{i=1}^{t} X_i^5 \end{aligned} \qquad (12)$$

3.1.3. Faktor yang memiliki Lima Taraf Perlakuan Kuantitatif

Penulisan komponen untuk 5 taraf kuantitatif ini adalah sebagai berikut. Misalkan terdapat sembarang gugus polinomial yang terdiri dari komponen linier, komponen kuadratik, komponen kubik dan komponen kuartik sebagai berikut,

$$\begin{aligned} L_i &= a + X_i \\ Q_i &= b + cX_i + X_i^2 \\ C_i &= d + eX_i + fX_i^2 + X_i^3 \\ Ki &= g + hX_i + jX_i^2 + kX_i^3 + X_i^4 \end{aligned} \qquad (13)$$

Dimana nilai $a, b, c, d, e, f, g, h, j,$ dan k adalah sebarang konstanta. Dengan memperhatikan sifat-sifat kontras dan ortogonal, sehingga untuk faktor yang memiliki 5 taraf kuantitatif persyaratan berikut harus dipenuhi: $\sum_i L_i = 0$, $\sum_i Q_i = 0$, $\sum_i C_i = 0$, $\sum_i K_i = 0$, $\sum_i L_i Q_i = 0$, $\sum_i L_i C_i = 0$, $\sum_i Q_i C_i = 0$, $\sum_i L_i K_i = 0$, $\sum_i Q_i K_i = 0$, dan $\sum_i C_i K_i = 0$.

a. $\sum_{i=1}^{t} K_i = 0$

$$\sum_{i=1}^{t} K_i = gt + h\sum_{i=1}^{t} X_i + j\sum_{i=1}^{t} X_i^2 + k\sum_{i=1}^{t} X_i^3 + \sum_{i=1}^{t} X_i^4 \tag{14}$$

b. $\sum_{i=1}^{t} L_i K_i = 0$

$$\sum_{i=1}^{t} L_i K_i = agt + (ah + g)\sum_{i=1}^{t} X_i + (aj + h)\sum_{i=1}^{t} X_i^2 + (ak + j)\sum_{i=1}^{t} X_i^3 + (a + k)\sum_{i=1}^{t} X_i^4 + \sum_{i=1}^{t} X_i^5 \tag{15}$$

c. $\sum_{i=1}^{t} Q_i K_i = 0$

$$\sum_{i=1}^{t} Q_i K_i = bgt + (bh + cg)\sum_{i=1}^{t} X_i + (bj + hc + g)\sum_{i=1}^{t} X_i^2 + (bk + cj + h)\sum_{i=1}^{t} X_i^3 + (b + ck + j)\sum_{i=1}^{t} X_i^4 + (c + k)\sum_{i=1}^{t} X_i^5 + \sum_{i=1}^{t} X_i^6 \tag{16}$$

d. $\sum_{i=1}^{t} C_i K_i = 0$

$$\sum_{i=1}^{t} C_i K_i = dgt + (dh + eg)\sum_{i=1}^{t} X_i + (jd + eh + fg)\sum_{i=1}^{t} X_i^2 + (dk + ej + fh + g)\sum_{i=1}^{t} X_i^3 + (d + ek + fj + h)\sum_{i=1}^{t} X_i^4 + (e + fk + j)\sum_{i=1}^{t} X_i^5 + (f + k)\sum_{i=1}^{t} X_i^6 + \sum_{i=1}^{t} X_i^7 \tag{17}$$

3.2. Koefisien Ortogonal Polinomial

Misalkan dipilih 3 taraf perlakuan yang berjarak tak sama yaitu $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 3,$ artinya nilai $t = 3$ sehingga untuk mendapatkan nilai koefisien ortogonal polinomial harus dipenuhi syarat kontras ortogonal yang telah dirumuskan sebelumnya. Dari hasil perhitungan didapat koefisien kontras sederhana untuk taraf perlakuan tersebut adalah seperti yang terdapat dalam tabel berikut:

Tabel 1. Koefisien Ortogonal Polinomial Sederhana untuk 3 Taraf

X_i	Linier	Kuadratik
0	-4	2
1	-1	-3
3	5	1

Untuk 4 taraf, misalkan dipilih 4 taraf perlakuan yang berjarak tak sama yaitu $X_1 = 0,\ X_2 = 1,\ X_3 = 2,\ X_4 = 4$ artinya nilai $t = 4$ sehingga untuk mendapatkan nilai koefisien ortogonal polinomial harus dipenuhi syarat kontras ortogonal yang telah dirumuskan sebelumnya. Dari hasil perhitungan didapat koefisien kontras sederhana untuk taraf perlakuan tersebut adalah seperti yang terdapat dalam tabel berikut

Tabel 2 Koefisien Ortogonal Polinomial Sederhana untuk 4 Taraf

X_i	Linier	Kuadratik	Kubik
0	-7	7	-3
1	-3	-4	8
2	1	-8	-6
4	9	5	1

Untuk 5 taraf, misalkan dipilih 5 taraf perlakuan yang berjarak tak sama yaitu $X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 2, X_4 = 3, X_5 = 5$ artinya nilai $t = 5$ sehingga untuk mendapatkan nilai koefisien ortogonal polinomial harus dipenuhi syarat kontras ortogonal yang telah dirumuskan sebelumnya. Dari hasil perhitungan didapat koefisien kontras sederhana untuk taraf perlakuan tersebut adalah seperti yang terdapat dalam tabel berikut

Tabel 3. Koefisien Ortogonal Polinomial Sederhana untuk 5 Taraf

X_i	Linier	Kuadratik	Kubik	Kuartik
0	-11	125	-38	4
1	-6	-26	63	-15
2	-1	-103	22	20
3	4	-106	-64	-10
5	14	110	17	1

IV. KESIMPULAN DAN SARAN

Dari hasil penelitian yang telah dilakukan disimpulkan adalah bahwa setiap taraf perlakuan yang berjarak tak sama memiliki beragam kemungkinan nilai koefisien ortogonal polinomial untuk masing-masing jarak taraf perlakuan. Nilai-nilai koefisien ortogonal polinomial yang dihasilkan akan sangat dipengaruhi oleh jarak antara masing-masing taraf perlakuan.

DAFTAR PUSTAKA

Gomez. K.A and A.A. Gomez. 1984. *Statistical Procedures for Agricultural Research*. 2nd ed. An International Rice Research Institute Book. John Wiley & Sons. Singapore.

Hanafiah, K.A. 2003. *Rancangan Percobaan Teori & Aplikasi*. Raja Grafindo Persada. Jakarta.

Hines, W and Montgomery, D.C. 1990. *Probabilita dan Statistik dalam Ilmu Rekayasa dan Manajemen*. John Willey & Sons, Inc. Singapore

Lentner, M and Bishop, T. 1986. *Experimental Design and Analysis*. Valley Book Company.

Little, T.M and F.J. Hills. 1978. *Agricultural Experimentation Design and Analysis*. John Wiley and Sons. Singapore.
Nugroho, S. 2008. *Dasar-Dasar Rancangan Percobaan*. Unib Press. Bengkulu
Peng, K.C. 1967. *The Design and Analysis of Scientific Experiments. An Introduction with Some Emphasis on Computation*. Addison-Wesley Publishing Company.
Sudjana. 1989. *Desain dan Analisis Eksperimen*. Tarsito. Bandung.

Kajian Penentuan Fungsi Polinomial Dengan Metode Ortogonal Polinomial Untuk Taraf Kuantitatif Berjarak Sama

Winika Eka Widyastuti[1], Sigit Nugroho[2], dan Jose Rizal[2]

1 Alumni Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Bengkulu

2 Staf Pengajar Matematika Fakultas MIPA Universitas Bengkulu

ABSTRACT

One reason of using quantitative level in design of experiments is to obtain formula or relationship between treatment levels and their responses in the form of polinomial function. This can be done using polynomial ortogonal method. In addition, the functional relationship can also be determined using regression analysis method. This research aims to determine polynomial function with polynomial ortogonal method and regression analysis method. The result shows that treatment having quantitative levels with 2, 3 and 4 treatment levels be concluded that polynomial ortogonal method can be used without having to analyse using regression analysis method again to get its function.

Keywords: Quantitative Treatment Level, Polynomial Ortogonal, Equally Spaced, Regression Analysis

1. Pendahuluan

Percobaan merupakan suatu tindakan atau kegiatan yang dilakukan secara seksama dalam rangka menentukan beberapa pengaruh yang tidak diketahui atau menguji suatu hipotesis. Dapat dikatakan suatu percobaan merupakan suatu penelaahan ilmiah terencana yang dirancang untuk meneliti satu atau lebih populasi (Nugroho, 2008).

Metode statistika yang berkaitan dengan pelaksanaan suatu percobaan disebut dengan Rancangan Percobaan. Model rancangan percobaan yang paling sederhana merupakan fungsi respon terhadap perlakuan. Respon disebut dengan variabel terikat atau variabel tak bebas (*dependent variable*), sedangkan perlakuan yang mempengaruhinya disebut variabel bebas (*independent variable*).

Jika H_0 ditolak pada suatu pengujian perlakuan, maka perlu dikaji lebih jauh tentang perlakuan tersebut. Pada pengaruh tetap, ada sedikitnya sepasang pengaruh perlakuan yang berbeda. Perlakuan yang mana yang memiliki pengaruh berbeda dapat ditentukan dengan taraf perlakuannya.

Pada umumnya penggunaan taraf perlakuan kuantitatif bertujuan untuk mencari formulasi atau rumus hubungan antara perlakuan dan respon sebagai fungsi dari taraf-taraf perlakuan dalam bentuk polinomial. Metode ortogonal polinomial digunakan dalam penentuan fungsi polinomial tersebut untuk taraf perlakuan berjarak sama.

Selain itu, penentuan fungsi polinomial juga dapat ditentukan dengan pendekatan persamaan dalam analisis regresi. Oleh karena itu, dalam penulisan skripsi ini akan dikaji penentuan fungsi dengan metode ortogonal polinomial yang selanjutnya dikaji dengan teknik analisis regresi.

2. Penentuan Fungsi Polinomial Untuk Taraf Kuantitatif Berjarak Sama

2.1 Penentuan Fungsi dengan Metode Ortogonal Polinomial

Banyak percobaan yang dirancang untuk menentukan sifat alamiah suatu kurva respon bila taraf perlakuan menunjukkan adanya peningkatan jumlah dari perlakuan tersebut (Nugroho, 2008). Dalam rancangan percobaan, penggunaan taraf perlakuan yang bersifat kuantitatif, seringkali bertujuan untuk mengetahui hubungan fungsional antara variabel terikat (respon) sebagai fungsi dari taraf-taraf suatu perlakuan. Pada umumnya, fungsi matematis yang tepat untuk menggambarkan hubungan tersebut tidak diketahui, tetapi dapat didekati dengan suatu model polinomial yaitu (Peng, 1967):

$$Y_i = a_0 + a_1 X_i + a_2 X_i^2 + a_3 X_i^3 + \cdots + a_{t-1} X_i^{t-1} + \varepsilon_i \quad \text{untuk } i = 1, 2, \ldots, t \qquad (2\text{-}1)$$

dimana

Y_i = respon ke-i yang diamati

X_i = taraf-taraf perlakuan ke-i yang digunakan

ε_i = komponen acak dari galat (error)

Jika nilai-nilai X_i dan Y_i diberikan, maka koefisien-koefisien $a_0, a_1, \ldots, a_{t-1}$ dapat diduga dengan menggunakan metode jumlah kuadrat galat terkecil. Jelas bahwa, untuk sejumlah t taraf, derajat polinomialnya tidak dapat melebihi $(t-1)$.

Dapat ditunjukkan bahwa persamaan diatas dapat dituliskan sebagai

$$Y_i = A_0 P_{0i} + A_1 P_{1i} + A_2 P_{2i} + \cdots + A_{t-1} P_{(t-1)i} + \varepsilon_i \quad \text{untuk } i = 1, 2, \cdots, t \qquad (2\text{-}2)$$

dimana $P_{0i} = 1$, P_{mi} adalah polinom berderajat m ($m = 1, 2, \cdots, t-1$) dalam X_i dan juga harus memenuhi persyaratan kontras dan ortogonal, yaitu :

$$\sum_{i=1}^{t} P_{mi} = 0, \quad \sum_{i=1}^{t} P_{mi} P_{m'i} = 0 \quad (m \neq m') \qquad (2\text{-}3)$$

yang harus berlaku pada gugus nilai X_i. Polinom P_m disebut dengan ortogonal polinomial. Menurut Nugroho (2008). Lima polinomial pertama untuk taraf kuantitatif berjarak sama, dapat diturunkan yaitu:

$$\begin{aligned}
P_{1i} &= \frac{X_i - \overline{X}}{d} \\
P_{2i} &= P_{1i}^2 - \frac{N^2 - 1}{12} \\
P_{3i} &= P_{1i}^3 - \frac{3N^2 - 7}{20} P_{1i} \\
P_{4i} &= P_{1i}^4 - \frac{3N^2 - 13}{14} P_{1i}^2 + \frac{3(N^2-1)(N^2-9)}{560} \\
P_{5i} &= P_{1i}^5 - \frac{5(N^2 - 7)}{18} P_{1i}^3 + \frac{15N^4 - 230N^2 + 407}{1008} P_{1i}
\end{aligned} \qquad (2\text{-}4)$$

dimana $\overline{X}$ adalah rata-rata X_i, P_{1i} adalah syarat pengkodean dan nilai P_{mi} kadang untuk kemudahan dilakukan penskalaan sedemikian rupa sehingga nilai-nilainya bilangan-bilangan bulat sekecil mungkin untuk semua X_i. Secara umum P_{mi} dapat dicari melalui relasi rekuren (*recurrent relation*) berikut (Peng, 1967):

$$P_{(m+1)i} = P_{1i} P_{mi} - \frac{m^2 (N^2 - m^2)}{4(4m^2 - 1)} P_{(m-1)i} \qquad (2\text{-}5)$$

Perhatikan bahwa jika $i = 1, 2, \ldots, N$ dengan N adalah banyaknya taraf perlakuan, maka untuk taraf perlakuan berjarak sama berlaku bahwa

- jika $X_i = i$ artinya jarak antar perlakuan d adalah 1, berlaku $P_{1i} = X_i - \overline{X}$ dan
$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i = \frac{N+1}{2}$$
- Jika $x_i \neq i$ dan $d \neq 1$, maka berlaku $P_{1i} = \dfrac{X_i - \overline{X}}{d}$ dan $\overline{X} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$.

Koefisien-koefisien $A_0, A_1, \ldots, A_{t-1}$ pada persamaan (2-2) dapat diperoleh dengan menggunakan metode jumlah kuadrat galat terkecil, yaitu nilai-nilai $A_0, A_1, \ldots, A_{t-1}$ dipilih sedemikian rupa sehingga

$$\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{t}\Big(Y_i - \big(A_0 P_{oi} + A_1 P_{1i} + A_2 P_{2i} + A_3 P_{3i} + \cdots + A_{t-1} P_{(t-1)i}\big)\Big)^2 \qquad (2\text{-}6)$$

minimum (Peng, 1967). Selanjutnya, persamaan (2-6) diturunkan terhadap A_m untuk $m = 0, 1, ..., t-1$, kemudian menyamakannya dengan nol. Dengan demikian, persamaan normal untuk menentukan A_m adalah

$$\begin{aligned}
A_0 \sum_i P_{0i} P_{0i} + A_1 \sum_i P_{0i} P_{1i} + \cdots + A_{t-1} \sum_i P_{0i} P_{(t-1)i} &= \sum_i Y_i P_{0i} \\
A_0 \sum_i P_{1i} P_{0i} + A_1 \sum_i P_{1i} P_{1i} + \cdots + A_{t-1} \sum_i P_{1i} P_{(t-1)i} &= \sum_i Y_i P_{1i} \\
A_0 \sum_i P_{2i} P_{0i} + A_1 \sum_i P_{2i} P_{1i} + \cdots + A_{t-1} \sum_i P_{2i} P_{(t-1)i} &= \sum_i Y_i P_{2i} \\
&\cdots \\
A_0 \sum_i P_{(t-1)i} P_{0i} + A_1 \sum_i P_{(t-1)i} P_{1i} + \cdots + A_{t-1} \sum_i P_{(t-1)i} P_{(t-1)i} &= \sum_i Y_i P_{(t-1)i}
\end{aligned} \qquad (2\text{-}7)$$

Karena $P_{0i} = 1$ dan $\sum_{i=1}^{t} P_{mi} P_{m'i} = 0 \quad (m \neq m')$, maka jawab dari gugus persamaan (2-7) dapat dicari dengan cara sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
A_0 N &= \sum_i Y_i \\
A_1 \sum_i P_{1i}^2 &= \sum_i Y_i P_{1i} \\
A_2 \sum_i P_{2i}^2 &= \sum_i Y_i P_{2i} \\
&\cdots \\
A_{t-1} \sum_i P_{(t-1)i}^2 &= \sum_i Y_i P_{(t-1)i}
\end{aligned}$$

Secara umum diperoleh,

$$A_m = \frac{\sum_i Y_i P_{mi}}{\sum_i P_{mi}^2}, \quad m = 0, 1, 2, ..., t-1 \qquad (2\text{-}8)$$

Jika $Y_u^{'} = f(u, u^2, u^3, u^{N-1})$ merupakan persamaan polinomial dalam u, maka persamaan (2-2) dapat disajikan dalam bentuk koding seperti berikut (Hicks, 1982):

$$Y_u^{'} = A_0 \xi_0^{'} + A_1 \xi_1^{'} + \cdots + A_i \xi_i^{'}, \text{ untuk } i = 0, 1, 2, \cdots, N \qquad (2\text{-}9)$$

dimana polinomial dalam bentuk koding yaitu:

$$\xi_0^{'} = 1$$
$$\xi_1^{'} = \lambda_1 u$$

$$\xi_2' = \lambda_2\left[u^2 - \frac{N^2-1}{12}\right] \tag{2-10}$$

$$\xi_3' = \lambda_3\left[u^3 - u\left(\frac{3N^2-7}{20}\right)\right]$$

$$\xi_4' = \lambda_4\left[u^4 - \frac{u^2}{14}\left(3N^2-13\right) + \frac{3}{560}\left(N^2-1\right)\left(N^2-9\right)\right]$$

$$\xi_5' = \lambda_5\left[u^5 - \frac{5u^3}{18}\left(N^2-7\right) + \frac{u}{1008}\left(15N^4-230N^2+407\right)\right]$$

dengan $u = \frac{\left(X-\overline{X}\right)}{d}$, N adalah banyaknya taraf suatu perlakuan, ξ_i' adalah polinom berderajat i. Koefisien polinomial A_i dapat ditentukan dengan rumus sebagai berikut:

$$A_i = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{r} Y_{ij}\xi_i'}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{r}\left(\xi_i'\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_{i.}\xi_i'}{r\sum_{i=1}^{r}\left(\xi_i'\right)^2} = \frac{Kontras}{r\sum_{i=1}^{r}\left(\xi_i'\right)^2} \tag{2-11}$$

Pada pengkodingan, polinomial dikalikan dengan suatu pengali λ. Nilai λ dipilih sedemikian sehingga nilai polinomial tersebut adalah bilangan bulat untuk semua u (Hicks, 1982). Koefisien untuk polinomial dapat ditentukan berdasarkan tabel korfisien ortogonal polinomial pada tabel 1. Selanjutnya, substitusikan nilai-nilai polinomial dan koefisiennya kedalam persamaan (2-9) sesuai dengan jumlah taraf perlakuan, misalnya untuk 2 dan 3 taraf perlakuan bentuk fungsinya berturut-turut adalah $Y_u' = A_0\xi_0' + A_1\xi_1'$ dan $Y_u' = A_0\xi_0' + A_1\xi_1' + A_2\xi_2'$.

Untuk sejumlah N taraf perlakuan dengan r ulangan perlakuan yang sama, derajat polinomial tertingginya adalah $N-1$. Akan tetapi, fungsi polinomial untuk N hingga lebih dari 4 taraf perlakuan jarang ditemui. Untuk itu bila perlu, dilakukan pengujian derajat polinomial tertinggi yang paling nyata. Sehingga, bentuk fungsi polinomial dapat ditentukan.

Kontras Ortogonal Polinomial

Penduga respon dalam bentuk polinomial kemudian dapat dituliskan menjadi

$$\hat{Y}_i = \frac{\sum_i Y_i}{N} + \frac{\sum_i Y_i P_{1i}}{\sum_i P_{1i}^2} P_{1i} + \frac{\sum_i Y_i P_{2i}}{\sum_i P_{2i}^2} P_{2i} + \cdots + \frac{\sum_i Y_i P_{(t-1)i}}{\sum_i P_{(t-1)i}^2} P_{(t-1)i}$$

Karena P_{mi} ortogonal, setelah melalui beberapa penyederhanaan, maka jumlah kuadrat deviasi antara nilai respon sesungguhnya dan nilai dugaannya dapat ditentukan yaitu (Peng 1967)

$$\sum_i\left(Y_i-\hat{Y}_i\right)^2 = \sum_i Y_i^2 - \frac{\left(\sum_i Y_i\right)^2}{N} - \frac{\left(\sum_i Y_i P_{1i}\right)^2}{\sum_i P_{1i}^2} - \frac{\left(\sum_i Y_i P_{2i}\right)^2}{\sum_i P_{2i}^2} - \cdots - \frac{\left(\sum_i Y_i P_{(t-1)i}\right)^2}{\sum_i P_{(t-1)i}^2} \tag{2-10}$$

Perlu diketahui bahwa tiap suku $\frac{\left(\sum_i Y_i P_{mi}\right)^2}{\sum_i P_{mi}^2}$ dalam persamaan (2-10) adalah jumlah kuadrat dari $\sum_i Y_i P_{mi}$ dengan derajat bebas 1 dan merupakan reduksi yang saling bebas dari polinom P_m. Besaran $\sum_i Y_i P_{1i}$, $\sum_i Y_i P_{2i}$, $\sum_i Y_i P_{3i}$, $\sum_i Y_i P_{4i}$, $\sum_i Y_i P_{5i}$, ... merupakan komponen linier, kuadratik, kubik, kuartik, kuintik, ... Jika polinom yang digunakan dalam pendugaan hingga derajat $(t-1)$, maka

$$\sum_i Y_i^2 - \frac{\left(\sum_i Y_i\right)^2}{N} = \frac{\left(\sum_i Y_i P_{1i}\right)^2}{\sum_i P_{1i}^2} + \frac{\left(\sum_i Y_i P_{2i}\right)^2}{\sum_i P_{2i}^2} + \cdots + \frac{\left(\sum_i Y_i P_{(t-1)i}\right)^2}{\sum_i P_{(t-1)i}^2} \tag{2-11}$$

Dalam analisis keragaman, biasanya rata-rata dari $Y_{i.}$ dihitung dari jumlah total T_i yang masing-masing dihitung dari sejumlah r pengamatan. Dengan demikian, $\sum_i Y_{i.} P_{mi}$ $(i = 1, 2, \ldots, t-1)$ membentuk suatu gugus kontras ortogonal yang lengkap. Jumlah kuadrat kontras $\sum_i Y_{i.} P_{mi}$ adalah

$$JK\left(\sum_i Y_{i.} P_{mi}\right) = \frac{\left(\sum_i T_i P_{mi}\right)^2}{r\sum_i P_{mi}^2} \tag{2-12}$$

Pengujian Kontras Ortogonal Polinomial

Derajat polinomial tertentu yang diperkirakan paling nyata untuk fungsi polinomial dapat ditentukan dengan pengujian derajat nyata untuk masing-masing kontras ortogonal polinomial menggunakan statistik uji yang dirumuskan sebagai berikut:

$$F = \frac{JK(kontras)/db\ kontras}{JK(galat)/db\ galat} \tag{2-13}$$

Dalam percobaan biologis khususnya pertanian, dapat dipahami bahwa hampir tidak ada fenomena alam yang mempunyai bentuk hubungan fungsional hingga berderajat lebih dari 4, bahkan mungkin lebih dari 3 atau 2. Oleh karena itu, bentuk kuadratik merupakan bentuk yang paling sering dijumpai.

Koefisien ortogonal polinomial untuk kasus-kasus taraf perlakuan kuantitatif berjarak sama hingga 5 taraf dapat disajikan pada Tabel 1 berikut:

Tabel 1. Koefisien Ortogonal Polinomial Hingga Taraf Perlakuan 5

Jumlah Perlakuan	Derajat Polinom	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	$\sum_i (\xi'_i)^2$	λ
2	1	-1	+1				2	2
3	1	-1	0	+1			2	1
	2	+1	-2	+1			6	3
4	1	-3	-1	+1	+3		20	2
	2	+1	-1	-1	+1		4	1
	3	-1	+3	-3	+1		20	10/3
5	1	-2	-1	0	+1	+2	10	1
	2	+2	-1	-2	-1	+2	14	1
	3	-1	+2	0	-2	+1	10	5/6
	4	+1	-4	+6	-4	+1	70	35/12

2.2 Penentuan Fungsi dengan Teknik Analisis Regresi

Regresi linier berganda digunakan untuk mengambarkan hubungan antar dua atau lebih variabel bebas dengan satu variabel tak bebas dalam bentuk linier. Secara umum model regresi linier berganda dapat dituliskan sebagai berikut:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + ... + \beta_j X_{ji} + \varepsilon_i \quad , \ i = 1, 2, ... , n \tag{2-14}$$

Dimana $Y_i =$ nilai pengamatan atau respon ke-i, $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_j =$ koefisien atau parameter-parameter regresi yang nilainya tidak diketahui, dan $\varepsilon_i =$ Komponen galat ke-i.

Dalam bentuk matriks persamaan (2-14) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\underline{Y} \quad = \underline{X}\underline{\beta} + \underline{\varepsilon} \tag{2-15}$$

dimana $\underline{Y}$ adalah vektor acak teramati berukuran $n \text{ x } 1$ yang tergantung pada peubah Y_i, $\underline{X}$ adalah matriks berukuran $n \text{ x } (j+1)$ dari sejumlah bilangan tetap yang teramati (elemen X bukan variabel acak), $\underline{\beta}$ adalah vektor parameter-parameter yang tidak teramati dan akan diduga berukuran $(j+1) \text{ x } 1$, dan $\underline{\varepsilon}$ adalah vektor acak yang teramati berukuran $n \text{ x } 1$ dengan $E(\underline{\varepsilon}) = \underline{0}$ dan $\text{cov}(\underline{\varepsilon}) = \sum$.

Pendugaan Koefisien Regresi

Koefisien-koefisien fungsi dalam persamaan regresi linier berganda dapat diduga, salah satunya dengan metode kuadrat terkecil. Penduga bagi model linier pada persamaan (2-15) adalah:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \cdots + \hat{\beta}_j X_{ji} \tag{2-16}$$

Seperti pada metode ortogonal polinomial, akan dicari $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_j$ yang meminimumkan jumlah kuadrat galat. Jumlah kuadrat galat dalam bentuk matriks kuadrat, $\underline{\varepsilon}'\underline{\varepsilon}$ adalah

$$\begin{aligned}
\underline{\varepsilon}'\underline{\varepsilon} &= \left(\underline{Y} - \underline{X}\underline{\hat{\beta}}\right)'\left(\underline{Y} - \underline{X}\underline{\hat{\beta}}\right) \\
&= \underline{Y}'\underline{Y} - \underline{Y}'\underline{X}\underline{\hat{\beta}} - \underline{\hat{\beta}}'\underline{X}'\underline{Y} + \underline{\hat{\beta}}'\underline{X}'\underline{X}\underline{\hat{\beta}} \\
&= \underline{Y}'\underline{Y} - 2\,\underline{Y}'\underline{X}\underline{\hat{\beta}} + \underline{\hat{\beta}}'\underline{X}'\underline{X}\underline{\hat{\beta}}
\end{aligned} \tag{2-17}$$

Perhatikan bahwa $\underline{Y}'\underline{X}\underline{\hat{\beta}} = \underline{\hat{\beta}}'\underline{X}'\underline{Y}$ karena keduanya skalar (Sembiring, 1995).

Selanjutnya, persamaan (2-17) diturunkan terhadap $\underline{\hat{\beta}}$ dan menyamakannya dengan nol, yaitu

$$\frac{\partial \underline{\varepsilon}'\underline{\varepsilon}}{\partial \underline{\hat{\beta}}} = -2\,\underline{Y}'\underline{X} + 2\,\underline{X}'\underline{X}\underline{\beta} = 0$$

sehingga

$$\underline{X}'\underline{X}\underline{\hat{\beta}} = \underline{X}'\underline{Y} \tag{2-18}$$

Persamaan (2-18) disebut persamaan normal. Kalikan setiap ruas persamaan dengan $\left(\underline{X}'\underline{X}\right)^{-1}$, sehingga diperoleh penduga $\underline{\beta}$ berbentuk persamaan

$$\underline{\hat{\beta}} = \left(\underline{X}'\underline{X}\right)^{-1}\underline{X}'\underline{Y} \tag{2-19}$$

Regresi Polinomial

Regresi polinomial merupakan regresi yang menggambarkan hubungan antara satu variabel respon terhadap dua atau lebih variabel perlakuan dalam bentuk non linier. Secara umum model regresi polinomial dapat dituliskan sebagai berikut:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + \cdots + \beta_j X_i^j + \varepsilon_i \qquad (2\text{-}20)$$

Dimana $X, X^2, \ldots, X^j$ merupakan bentuk-bentuk linier, kuadratik, ... dari taraf–taraf perlakuan berjarak sama yang ditentukan. Jika $X_{1i} = X_i$, $X_{2i} = X_i^2$, ..., $X_{ji} = X_i^j$, maka model pada persamaan (2-20) menjadi model regresi linier berganda. Oleh karena itu, koefisien regresi polinomial ini merupakan penduga $\underline{\beta}$ untuk sejumlah n pengamatan dari $(X_1, X_2, \ldots, X_j \text{ dan } Y)$ berbentuk persamaan (2-19) dengan

$$\underline{X}'\underline{X} = \begin{bmatrix} n & \sum X_i & \sum X_i^2 & \ldots & \sum X_i^j \\ \sum X_i & \sum X_i^2 & \sum X_i^3 & \ldots & \sum X_i^{j+1} \\ \sum X_i^2 & \sum X_i^3 & \sum X_i^4 & \ldots & \sum X_i^{j+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum X_i^j & \sum X_i^{j+1} & \sum X_i^{j+2} & \ldots & \sum X_i^{2j} \end{bmatrix} \text{ dan } \underline{X}'\underline{Y} = \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_i Y_i \\ \sum X_i^2 Y_i \\ \vdots \\ \sum X_i^j Y_i \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}21)$$

Terlihat jelas bahwa semakin besar nilai j, artinya dengan semakin banyaknya peubah bebas yang digunakan didalam model, semakin rumit cara mendapatkan nilai $\hat{\underline{\beta}}$ secara manual karena ukuran matriks $(\underline{X}'\underline{X})$ sudah semakin besar.

Jika $N = n$, maka untuk sejumlah n taraf perlakuan dan r ulangan perlakuan yang sama, gambaran analisis penentuan fungsi polinomial dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 2. n Taraf Perlakuan dan r Ulangan Perlakuan yang Sama

Y	X_1	X_2	X_3	$\ldots$	X_n
1	Y_{11}	Y_{21}	Y_{31}	$\ldots$	Y_{n1}
2	Y_{12}	Y_{22}	Y_{32}	$\ldots$	Y_{n2}
3	Y_{13}	Y_{23}	Y_{33}	$\ldots$	Y_{n3}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
r	Y_{1r}	Y_{2r}	Y_{3r}	$\ldots$	Y_{nr}

Dari tabel diatas dapat ditentukan fungsi-fungsi polinomial yaitu

- Untuk 2 taraf perlakuan

Misalkan diberikan dua perlakuan pada satuan percobaan yaitu X_1 dan X_2. Untuk taraf perlakuan berjarak sama berlaku $X_2 = X_1 + d$, dengan d adalah jarak antar perlakuan. Persamaan regresi polinomial untuk dua taraf perlakuan adalah

$$\hat{Y} = \beta_0 + \beta_1 X$$

Untuk sejumlah r ulangan perlakuan yang sama, diperoleh

$$\underline{X}'\underline{X} = \begin{bmatrix} 2r & r(X_1 + X_2) \\ r(X_1 + X_2) & r(X_1^2 + X_2^2) \end{bmatrix} \text{ dan } \underline{X}'\underline{Y} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{r} (Y_{1k} + Y_{2k}) \\ X_1 \sum_{k=1}^{r} Y_{1k} + X_2 \sum_{k=1}^{r} Y_{2k} \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}22)$$

Tentukan invers matriks $\underline{X'X}$ dan kalikan dengan matriks $\underline{X'Y}$, sehingga diperoleh penduga koefisien β_0 dan β_1.

- Untuk 3 taraf perlakuan

Misalkan diberikan tiga perlakuan pada satuan percobaan yaitu X_1, X_2 dan X_3. Untuk taraf perlakuan berjarak sama berlaku $X_2 = X_1 + d$ dan $X_3 = X_2 + d$. Persamaan regresi polinomial untuk tiga taraf perlakuan adalah

$$\hat{Y} = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2$$

Untuk sejumlah r ulangan perlakuan yang sama, diperoleh

$$\underline{X'X} = \begin{bmatrix} 3r & r(X_1 + X_2 + X_3) & r(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) \\ r(X_1 + X_2 + X_3) & r(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) & r(X_1^3 + X_2^3 + X_3^3) \\ r(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) & r(X_1^3 + X_2^3 + X_3^3) & r(X_1^4 + X_2^4 + X_3^4) \end{bmatrix} \tag{2-23a}$$

dan

$$\underline{X'Y} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{r}(Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k}) \\ X_1 \sum_{k=1}^{r} Y_{1k} + X_2 \sum_{k=1}^{r} Y_{2k} + X_3 \sum_{k=1}^{r} Y_{3k} \\ X_1^2 \sum_{k=1}^{r} Y_{1k} + X_2^2 \sum_{k=1}^{r} Y_{2k} + X_3^2 \sum_{k=1}^{r} Y_{3k} \end{bmatrix} \tag{2-23b}$$

Determinan matriks berukuran $(\underline{X'X})$ dapat ditentukan dengan aturan sorrus dan matriks inversnya dapat ditentukan dengan aturan adjoin yaitu

$$(\underline{X'X})^{-1} = \frac{1}{\det(\underline{X'X})} \, adj\,(\underline{X'X}) \tag{2-24}$$

Dengan mengalikan matriks $(\underline{X'X})^{-1}$ dan $\underline{X'Y}$ diperoleh penduga β_0, β_1 dan β_2.

- Untuk 4 taraf perlakuan

Misalkan diberikan empat perlakuan pada satuan percobaan yaitu X_1, X_2, X_3 dan X_4. Untuk taraf perlakuan berjarak sama berlaku $X_2 = X_1 + d$, $X_3 = X_2 + d$, dan $X_4 = X_3 + d$. Persamaan regresi polinomial untuk empat taraf perlakuan adalah

$$\hat{Y} = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \beta_3 X^3$$

Untuk sejumlah r ulangan perlakuan yang sama, diperoleh

$$\underline{X'X} = \begin{bmatrix} 4r & r(X_1 + X_2 + X_3) & r(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) & r(X_1^3 + X_2^3 + X_3^3) \\ r(X_1 + X_2 + X_3) & r(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) & r(X_1^3 + X_2^3 + X_3^3) & r(X_1^4 + X_2^4 + X_3^4) \\ r(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) & r(X_1^3 + X_2^3 + X_3^3) & r(X_1^4 + X_2^4 + X_3^4) & r(X_1^5 + X_2^5 + X_3^5) \\ r(X_1^3 + X_2^3 + X_3^3) & r(X_1^4 + X_2^4 + X_3^4) & r(X_1^5 + X_2^5 + X_3^5) & r(X_1^6 + X_2^6 + X_3^6) \end{bmatrix} \tag{2-25a}$$

dan

$$\underline{X}'\underline{Y} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{r}(Y_{1k}+Y_{2k}+Y_{3k}) \\ X_1\sum_{k=1}^{r}Y_{1k}+X_2\sum_{k=1}^{r}Y_{2k}+X_3\sum_{k=1}^{r}Y_{3k} \\ X_1^2\sum_{k=1}^{r}Y_{1k}+X_2^2\sum_{k=1}^{r}Y_{2k}+X_3^2\sum_{k=1}^{r}Y_{3k} \\ X_1^3\sum_{k=1}^{r}Y_{1k}+X_2^3\sum_{k=1}^{r}Y_{2k}+X_3^3\sum_{k=1}^{r}Y_{3k} \end{bmatrix} \tag{2-25b}$$

Matriks $(\underline{X}'\underline{X})^{-1}$ dicari dengan bantuan program matematika, seperti Microsoft Excel karena ukuran matriks $(\underline{X}'\underline{X})$ sudah semakin besar hingga diperoleh penduga β_0, β_1, β_2 dan β_3.

3. Hasil dan Pembahasan

Berikut diberikan teladan penerapan penentuan fungsi polinomial dengan dua, tiga dan empat taraf perlakuan. Misalkan diberikan taraf-taraf perlakuan X_1, X_2, X_3, dan, X_4. Secara keseluruhan datanya diberikan pada tabel dibawah ini

Tabel 3. Data Hingga Empat Taraf Perlakuan

Y	X			
	0	10	20	30
1	415	325	35	15
2	423	333	43	13
3	417	327	37	17
4	414	324	34	14
5	421	331	41	11
Jumlah	2090	1640	190	70

- Untuk dua taraf perlakuan $(n = 2)$ yaitu $X_1 = 0$ dan $X_2 = 10$

Berdasarkan tabel 3 diketahui: $r = 5$, $Y_{1.} = T_1 = 2090$, $Y_{2.} = T_2 = 1640$ dan $\overline{X} = 5$. Akan dicari fungsi polinomial dengan metode ortogonal polinomial dalam bentuk persamaan $Y_u' = A_0\xi_0' + A_1\xi_1'$ dengan nilai-nilai koefisien dan polinomialnya dicari yaitu

$$A_0 = \frac{2090+1640}{(5 \text{ x } 2)} = 373\,;\ \xi_0' = 1\,;\ A_1 = \frac{(-1 \text{ x } 2090)+(1 \text{ x } 1640)}{(5 \text{ x } 2)} = -45\,;\ \xi_1' = 2\left(\frac{X-5}{10}\right)$$

Sehingga diperoleh persamaan polinomialnya adalah

$$Y_u' = 418 - 9\ X$$

Selanjutnya, dengan teknik analisis regresi diperoleh nilai persamaan regresinya adalah

$$\hat{Y} = 418 - 9\ X$$

- Untuk tiga taraf perlakuan $(n = 3)$ yaitu $X_1 = 0$, $X_2 = 10$ dan $X_3 = 20$

Berdasarkan tabel 3 diketahui: $r = 5$, $Y_{1.} = T_1 = 2090$, $Y_{2.} = T_2 = 1640$, $Y_{3.} = T_3 = 190$, dan $\overline{X} = 10$. Prosedur penentuan fungsi polinomial sama dengan dua taraf perlakuan sehingga diperoleh persamaan polinomialnya adalah

$$Y_u' = 418 + X - X^2$$

Selanjutnya, dengan teknik analisis regresi diperoleh persamaan regresinya adalah

$$\hat{Y} = 418 + X - X^2$$

- Untuk empat taraf perlakuan $(n = 4)$ yaitu $X_1 = 0, X_2 = 10, X_3 = 20$ dan $X_4 = 30$

  Berdasarkan tabel 3 diketahui: $r = 5$, $Y_{1.} = T_1 = 2090$, $Y_{2.} = T_2 = 1640$, $Y_{3.} = T_3 = 190$, $Y_{4.} = T_4 = 70$ dan $\overline{X} = 15$.

Tabel 4. Analisis Keragaman Untuk Empat Taraf Perlakuan

No.	Sumber keragaman	db	JK	KT	F_{hitung}	F_{tabel} $\alpha = 0.01$	F_{tabel} $\alpha = 0.05$
1.	Perlakuan X	3	1419540.5	473180.1667	37854.4	5,2922	3,2389
2.	Error (ε)	16	200	12.5			
3.	Total (T)	19	1419740.5				

Dapat dilihat, nilai $F_{hitung} \geq F_{tabel}$ untuk kedua taraf signifikan α, berarti perlakuan memberikan pengaruh nyata terhadap satuan percobaan.

Tabel 5. Koefisien Ortogonal Polinomial untuk Empat Taraf Perlakuan

Derajat polinomial	Total dari Sejumlah r Pengamatan ke- j: $Y_{1.}$	$Y_{2.}$	$Y_{3.}$	$Y_{4.}$	$\sum_i (\xi_i')^2$	λ	Kontras	$JK(kontras)$
	2090	1640	190	70				
Linier	-3	-1	+1	+3	20	2	-7650	585225
Kuadratik	+1	-1	-1	+1	4	1	330	5445
Kubik	-1	+3	-3	+1	20	$\frac{10}{3}$	2330	54289

Dari tabel diatas dapat dilihat bahwa derajat polinomial tertinggi yang paling nyata adalah kubik. Akan dicari nilai-nilai koefisien dan polinomialnya yaitu

$$A_0 = \frac{2090 + 1640 + 190 + 70}{(5 \text{ x } 4)} = \frac{3990}{20} = \frac{399}{2};\ \xi_0' = 1$$

$$A_1 = \frac{((-3) \text{ x } 2090) + ((-1) \text{ x } 1640) + (1 \text{ x } 190) + (3 \text{ x } 70)}{(5 \text{ x } 20)} = \frac{-751}{10};\ \xi_1' = \frac{X - 15}{10}$$

$$A_2 = \frac{(1 \text{ x } 2090) + ((-1) \text{ x } 1640) + ((-1) \text{ x } 190) + (1 \text{ x } 70)}{(5 \text{ x } 4)} = \frac{33}{2};\ \xi_2' = \left(\frac{X - 10}{10}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

$$A_3 = \frac{((-1) \text{ x } 2090) + (3 \text{ x } 1640) + ((-3) \text{ x } 190) + (1 \text{ x } 70)}{(5 \text{ x } 20)} = \frac{233}{10};\ \xi_3' = \frac{10}{3}\left(\frac{X - 15}{10}\right)^3 - \frac{41}{6}\left(\frac{X - 15}{10}\right)$$

Sehingga diperoleh persamaan polinomialnya adalah

$$Y_u' = 418.00000000 + 16.53333333\ X - 3.33000000\ X^2 + 0.07766667\ X^3$$

Dengan teknik analisis regresi diperoleh persamaan regresinya adalah

$$\hat{Y} = 418.00000000 + 16.53333333\ X - 3.33000000\ X^2 + 0.07766667\ X^3$$

4. Kesimpulan dan Saran

Dari contoh data yang diambil sebagai teladan penerapan, penentuan fungsi polinomial dengan metode ortogonal polinomial memberikan hasil yang sama jika dikaji dengan teknik analisis regresi. Oleh karena itu, metode ortogonal polinomial dapat digunakan tanpa harus menganalisis ulang dengan teknik analisis regresi untuk mendapatkan fungsi polinomialnya.

Pada skripsi ini, penulis hanya membahas tentang penentuan fungsi dengan metode ortogonal polinomial yang selanjutnya dikaji dengan teknik analisis regresi untuk taraf kuantitatif berjarak sama. Hasilnya, kedua metode tersebut dapat digunakan untuk menentukan fungsinya. Untuk penelitian lebih lanjut, sebaiknya juga dibahas penentuan fungsi untuk taraf kuantitatif berjarak tak sama dengan menentukan metode mana yang tepat digunakan.

DAFTAR PUSTAKA

1. Anonim.2007. *Taraf Perlakuan Berjarak Sama*. http://209.85.175.104/search?q=cache:aSit0whzIJ.staff.unud.ac.id/~sampurna/wp-content/uploads/2007/12/metodologi-ilmiah.doc
2. Anonim. 2008. *Rancangan Percobaan*. http://id.wikipedia.org/wiki/statistika
3. Anton, H. 1991. *Aljabar Linier Elementer*. Edisi Kelima. Erlangga. Jakarta
4. Dean. A and D. Voss. 1999. *Design and Analysis of Experiments*. Springer-Verlag. New York
5. Gomez. K.A and A.A. Gomez. 1984. *Statistical Procedures for Agricultural Research.* 2nd ed. An International Rice Research *Design Of Experiments*. Third Edition. CBS College Publishing. New York
6. Graybill, F.A. 1976. *Theory and Application Of The Linear Model*. Wadsworth Publishing Company, Inc. California
7. Hicks, C.R. 1982. *Fundamental Concepts In The of Scientific Experiments. An Introduction with Some Emphasis on Computation*. Addison-Wesley Publishing Company
8. Lentner, M and T. Bishop. 1986. *Experimental Design and Analysis*. Valley Book Company. Blacksburg, VA
9. Nugroho, S. 2008. *Dasar-Dasar Rancangan Percobaan*. Edisi Pertama. Unib Press. Bengkulu
10. Peng, K.C. 1967. *The Design and Analysis* Institute Book. John Wiley & Sons. Singapore
11. Rawling, J.D. 1988. *Applied Regression Analysis A Research Tool*. Wadsworth, Inc. California
12. Sembiring, R.K . 1995. *Analisis Regresi*. ITB. Bandung
13. Sriliana, I. 2007. *Data Hilang Dalam Rancangan Acak Kelompok Lengkap dan Rancangan Bujur Sangkar Latin Dasar)*. Skripsi MIPA Matematika UNIB
14. Sudjana. 2001. *Teknik Analisis Regresi dan Korelasi Bagi Para Peneliti*. Tarsito. Bandung
15. Weisberg, S. 2005. *Applied Linear Regression*. Third Edition. John Wiley & Sons, Inc. Canada

KAJIAN UJI NONPARAMETRIK PENGARUH PERLAKUAN TETAP PADA RANCANGAN ACAK LENGKAP

Andi Octa Fengki[1], Sigit Nugroho[2], dan Fachri Faisal[2]

1 Alumni Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Bengkulu

2 Staf Pengajar Matematika Fakultas MIPA Universitas Bengkulu

ABSTRACT

Fix treatment effect on completely randomized designs (CRD) can be tested by using nonparametric test or parametric test. Each of the tests has its criterions and assumptions that have to be fulfilled. The aims of this research are to study the creterions and methods of each test, to illustrate Median test exact distribution and Kruskal-Wallis Table, and to study of Bell-Doksum test consistence. The problem in this research limited to one way ANOVA both parametrically and nonparametrically (Median, Kruskal-Wallis, and Bell-Doksum). The result obtained from the examples and data simulations indicate that parametric test one way ANOVA is better to use, if samples having normal distribution with equal variances. But, nonparametric tests are better to be used for samples having normal distribution with unequal variances and also for samples that are not normally distributed. Among three nonparametric tests, Bell-Doksum gives better result than two other tests.

Keyword: *Analysis of Varians (ANOVA), Median, Kruskal-Wallis, Bell-Doksum , and k Independent Sample*

1. Pendahuluan

Salah satu rancangan lapangan adalah rancangan acak lengkap (RAL). Rancangan ini diterapkan pada percobaan yang dilakukan pada kondisi lingkungan relatif homogen atau dapat dianggap homogen. Lingkungan disini adalah faktor-faktor lain diluar yang diteliti. Setiap unit percobaan pada RAL diacak secara sempurna tanpa dibatasi oleh blok.

Sesuai dengan tujuan merancang percobaan secara khusus untuk mengukur pengaruh perlakuan. Pada RAL juga dilakukan pengukuran pengaruh perlakuan. Di mana pengaruh perlakuan ini terbagi dua yaitu pengaruh perlakuan tetap dan pengaruh perlakuan acak. Pengaruh perlakuan tetap artinya sampel tidak mengeneralisasi keadaan dilapangan. Sedangkan pengaruh perlakuan acak merupakan kebalikannya.

Pengaruh perlakuan pada rancangan acak lengkap kebanyakan dianalisis dengan menggunakan analisis varian (ANAVA) satu arah. Hipotesis pada pengaruh perlakuan pada RAL umumnya diuji dengan uji F. Hal ini dapat dilakakukan jika contoh percobaan diasumsikan diambil dari populasi-populasi yang berdistribusi normal dengan varian-varian yang sama (Daniel, 1989). Contoh ini minimal berskala interval atau rasio. Namun, ada kondisi tertentu penganalisisan dan pengujian ini tidak sahih, yaitu pada kondisi data berskala nominal dan ordinal atau contoh diambil populasi yang tidak diketahui distribusinya atau distribusi populasi tidak dapat diasumsikan normal.

Pada kondisi data berskala nominal dan ordinal atau distribusi dari populasi di mana contoh diambil tidak diketahui, maka dilakukan pengujian pengaruh perlakuan dengan uji nonparametrik. Uji nonparametrik ini merupakan alternatif yang dapat diambil bila asumsi-asumsi pada uji parametrik tidak terpenuhi.

Misalkan diperoleh data dari percobaan dengan RAL, namun data tersebut tidak memenuhi asumsi-asumsi uji parametrik. Sehingga prosedur alternatif yang digunakan untuk menguji pengaruh perlakuan tetap tersebut adalah uji nonparametrik perlakuan tetap pada RAL. Di lain pihak, terdapat beberapa pilihan uji dalam menguji perlakuan tetap pada RAL, sehingga perlu dilakukan pengkajian. Dengan harapan dapat menambah pemahaman tentang uji-uji tersebut.

Penelitian ini dilakukan untuk mengetahui kriteria dari metode pengujian uji pengaruh perlakuan tetap pada RAL, baik uji parametrik maupun nonparametrik, untuk mengilustrasikan distribusi pasti uji median dan Tabel Kruskal-Wallis, dan untuk mengetahui kekonsistenan uji Bell-Doksum. Namun, penggunaan ANAVA satu arah sebagai uji parametrik perlakuan tetap pada RAL dan uji Median, uji Kruskal-Wallis, dan uji Bell-Doksum untuk uji nonparametriknya menjadi suatu batasan penelitian ini.

2. Uji Pengaruh Perlakuan Perlakuan Tetap pada RAL

Model RAL merupakan model rancangan percobanan yang sederhana. Total variasi pada RAL dibagi menjadi dua, yaitu variasi perlakuan dan variasi galat. Atau dapat dituliskan menjadi

$$\textit{Total variasi} = \textit{variasi perlakuan} + \textit{variasi galat} \tag{1}$$

Dapat juga dituliskan dengan model linier menjadi

$$Y_{ij} = \mu + \tau_j + \varepsilon_{ij} \text{ untuk } i = 1,2,\dots,n_j \text{ dan } j = 1,2,\dots,k \tag{2}$$

dengan asumsi $\varepsilon_{ij} \sim NID\left(0,\sigma^2\right)$ dan $\sum_{j=1}^{k} n_j \tau_j = 0$.

Banyaknya k perlakuan yang digunakan pada RAL didefinisikan sebagai sebuah himpunan dari k perlakuan populasi yang memiliki rata-rata $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k$ sering disebut rata-rata perlakuan. Dimana rata-rata inilah yang akan diuji pada rancangan acak pengaruh tetap. Apakah semua rata-rata perlakuan tersebut semuanya sama atau tidak.

Uji pengaruh perlakuan tetap tetap pada RAL yaitu menguji serentak kesamaan rata-rata perlakuan atau menguji pengaruh perlakuan sama dengan nol. Hipotesis nol ditulis:

$$H_0:\ \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$$

atau

$$H_0: \text{Semua rata-rata perlakuan sama}$$

atau

$$H_0:\ \tau_j = 0, \text{ untuk setiap } j$$

Jika hipotesis nol diterima, maka rata-rata perlakuan masing-masing populasi sama. Ini mengindikasikan bahwa pengaruh perlakuan tetap pada masing-masing populasi.

Pengujian pengaruh perlakuan tetap pada RAL dapat dilakukan dengan metode parametrik maupun metode nonparametrik. Untuk metode parametrik dapat digunakan Analisis Varian (ANAVA) atau uji F, sedangkan untuk uji nonparametrik dapat digunakan uji Median, uji Kruskal-Wallis, dan uji Bell-Doksum.

3. Uji Parametrik

Jika contoh-contoh pada rancangan acak lengkap (RAL) memenuhi asumsi bahwa telah diambil dari populasi-populasi yang berdistribusi normal dengan varian-varian konstan, maka perlakuan tetap pada RAL dapat diuji dengan menggunakan uji parametrik. Secara implisit ini berarti bahwa asumsi kenormalan terpenuhi dan kehomogenan varian juga terpenuhi. Uji parametrik perlakuan tetap pada RAL diuji dengan menggunakan ANAVA satu arah.

Analisis varian (ANAVA) adalah proses pembagian variasi total pengamatan percobaan ke dalam porsi-porsi yang dapat dicirikan untuk mengetahui sumber-sumber keragaman. Salah satu jenis ANAVA adalah ANAVA satu arah. ANAVA satu arah merupakan salah satu alat penting untuk menganalisa data rancangan percobaan yang berdasarkan model RAL di atas (Hinkelmann dan Kimpthorne, 2008). Oleh karenanya, pengaruh perlakuan tetap pada RAL diuji dengan menggunakan ANAVA satu arah.

ANAVA satu arah menggunakan prinsip pembagian total variasi menjadi variasi perlakuan dan variasi galat. Akibatnya, pada ANAVA Satu arah muncul istilah jumlah kuadrat total (JKT), jumlah kuadrat perlakuan (JKP), dan jumlah kuadrat galat (JKG), yaitu

$$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\left(Y_{ij}-\overline{Y}_{..}\right)^2=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\left(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}_{..}\right)^2+\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\left(Y_{ij}-\overline{Y}_{i.}\right)^2 \tag{3}$$

atau dapat ditulis menjadi

$$JKT = JKP + JKG \tag{4}$$

Selanjutnya akan dihitung komponen ANAVA sesuai dengan teori di atas ditambah dengan derajat bebas (*db*). Berikut ini beberapa rumus untuk melengkapi komponen-komponen tabel ANAVA pada RAL menurut Lentner dan Bishop (1986):

$$dbPerlakuan = t-1 \tag{5}$$

$$dbGalat = n-t \tag{6}$$

$$\text{Faktor Koreksi } (FK) = \frac{Y_{..}^2}{r_i t} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i} Y_{ij}\right)^2}{r_i t} \tag{7}$$

$$JKT = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\left(Y_{ij}-\overline{Y}_{..}\right)^2 = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i} Y_{ij}^2 - FK \tag{8}$$

$$JKP = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\left(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}_{..}\right)^2 = \sum_{i=1}^{t}\left(\frac{Y_i^2}{r_i}\right) - FK \tag{9}$$

$$JKG = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\left(Y_{ij}-\overline{Y}_{i.}\right)^2 = JKT - JKP \tag{10}$$

$$KTP = \frac{JKP}{dbPerlakuan} \tag{11}$$

$$KTG = \frac{JKG}{dbGalat} \tag{12}$$

Selanjutnya, setelah dilakukan beberapa perhitungan di atas, hasil yang diperoleh digunakan untuk melengkapi tabel analisis varian (ANAVA) satu arah. Setiap nilai yang diperoleh disubtitusikan pada kolom yang besesuaian. Tabel ANAVA tersebut dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Analisis Varian (ANAVA) Satu Arah

Sumber Keragaman	db	JK	KT	$NHKT$	
Perlakuan	$t-1$	JKP	KTP	$\sigma_{\varepsilon}^{2}+\frac{1}{t-1}\sum_{i=1}^{t} r_i\tau_i^2$	$\sigma_{\varepsilon}^{2}+r_0\sigma_{\tau}^{2}$
Galat	$n-t$	JKG	KTG	σ_{ε}^{2}	σ_{ε}^{2}
Total	$n-1$	JKT			

Statistik uji yang digunakan untuk menguji perlakuan dengan taraf α adalah F, dengan perhitungan sebagai berikut

$$F_{hitung}=\frac{KTP}{KTG} \tag{13}$$

Nilai F_{hitung} tersebut dibandingkan dengan F_{tabel} yang memiliki derajat bebas pertama $k-1$ dan derajat bebas kedua $N-k$.

4. Uji Nonparametrik

Uji nonparametrik perlakuan tetap menggunakan data tidak normal. Namun, data yang diproses dalam pengujian atau yang dihitung menggunakan masing-masing statistik ujinya bukan data asli hasil pengamatan, akan tetapi merupakan data ordinal. Data ordinal ini merupakan data baru yang diperoleh dari pemberian pringkat pada data pengamatan asli.

Uji nonparametrik perlakuan tetap ini semuanya menggunakan distribusi kai-kuadrat sebagai pendekatan, kecuali untuk uji Bell-Doksum. Pada uji Bell-Doksum distribusi kai-kuadrat bukan distribusi pendekatan tetapi merupakan distribusi pasti uji tersebut. Distribusi kai-kuadrat digunakan sebagai pendekatan untuk contoh besar karena kesulitan memperoleh distribusi pasti masing-masing uji. Distribusi kai-kuadrat yang digunakan dalam pembahasan ini menggunakan parameter yang sama yaitu derajat bebasnya $k-1$. Oleh karenanya, pemahaman mengenai distribusi kai-kuadrat merupakan hal mendasar yang perlu dikenal sebelum melakukan pengujian dengan menggunakan uji-uji nonparametrik ini.

4.1 Uji Median

Untuk melakukan pengujian dengan uji Median, diperlukan beberapa asumsi. Asumsi-asumsi tersebut adalah sebagai berikut (Conover,1971):

1. Setiap contoh adalah contoh acak.
2. Contoh-contoh acak tersebut saling bebas.
3. Skala pengukurannya minimal skala ordinal.
4. Jika setiap populasi memiliki median yang sama, semua populasi memiliki peluang yang sama p dari sebuah pengamatan lebih besar dari median keseluruhan yang sama pula.

Hipotesis yang diuji pada uji Median adalah apakah semua contoh yang diambil berasal dari populasi-populasi yang memiliki median-median yang sama.. Hipotesis dapat dituliskan menjadi:

H_0 : Semua k populasi memiliki median yang sama
H_1 : Minimal ada satu median populasi yang berbeda

Atau dengan notasi

H_0 : $M_1 = M_2 = ... = M_k$
H_1 : $\exists i, j, i \neq j \ni M_i \neq M_j$, $i, j = 1,2,...,k$

Jika H_o diterima, maka median k populasi pengamatan sama. Artinya, setiap perlakuan memberikan pengaruh yang tetap pada setiap pengamatan.

Untuk menguji hipotesis uji Median seperti tersebut di atas, digunakan suatu statistik uji. Statistik uji ini dapat dihitung berdasarkan tabel uji Median (kontingensi $2 \times k$)pada Tabel 2 berikut

Tabel 2. Tabel Kontingensi Uji Median

	Contoh					Total
	1	2	…	k	1	
$> M$	O_{11}	O_{12}	…	O_{1k}	O_{11}	C_1
$\leq M$	O_{21}	O_{22}	…	O_{2k}	O_{21}	C_2
Total	n_1	n_2	…	n_k	n_1	N

Statistik uji Median dapat dituliskan sebagai berikut

$$T = \frac{N^2}{C_1 C_2} \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(O_{1j} - \frac{n_j C_1}{N} \right)}{n_j} \tag{14}$$

atau untuk mempermudah proses penghitungan, dapat menggunakan bentuk lain statistik uji tersebut di atas, yaitu

$$T = \frac{N^2}{C_1 C_2} \sum_{j=1}^{k} \frac{O_{1j}^2}{n_j} - \frac{NC_1}{C_2} \tag{15}$$

Jika nilai C_1 kira-kira sama dengan atau sangat dekat dengan nilai C_2, maka rumus statistik uji di atas dapat diubah menjadi

$$T = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(O_{1j} - O_{12} \right)^2}{n_j} \tag{16}$$

Persaman dalam bentuk terakhir ini merupakan statistik uji untuk uji Median yang sering digunakan. Jika nilai $C_1 = C_2$, maka persaman dalam bentuk terakhir ini menghasilkan sebaran pasti, dengan peluang diperoleh dengan

$$P\left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline O_{11} & O_{12} & \cdots & O_{1k} \\ \hline O_{21} & O_{22} & \cdots & O_{2k} \\ \hline \multicolumn{1}{c}{n_1} & \multicolumn{1}{c}{n_2} & \multicolumn{1}{c}{\cdots} & \multicolumn{1}{c}{n_k} \end{array} \quad \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ \hline N \end{array} \right) = \frac{\binom{n_1}{O_{11}} \binom{n_2}{O_{12}} \cdots \binom{n_k}{O_{1k}}}{\binom{N}{C_1}} \tag{17}$$

Akan tetapi, jika tidak demikian akan kesulitan dalam menetukan sebaran pastinya, maka digunakan sebaran pendekatan. Oleh karenanya, aturan pengambilan keputusan uji Median sebagai pendekatan adalah tolak H_0 jiika $T > \chi^2_{(1-\alpha, k-1)}$.

4.2 Uji Kruskal-Wallis

Uji Kruskal-Wallis merupakan perluasan dari uji Mann-Witney dengan contoh independen lebih dari dua. Misal, diketahui X_{ij} adalah pengamatan ulangan ke-i contoh ke-j, k banyaknya contoh acak yang diamati, dengan $i = 1,2..,r$ dan $j = 1,2,...,k$. Kemudian N adalah banyaknya keseluruhan pengamatan, merupakan penjumlahan dari banyaknya pengamatan masing-masing contoh n_j, atau dapat dirumuskan menjadi:

$$N = \sum_{j=1}^{k} n_j \tag{18}$$

Peringkatkan semua pengamatan untuk seluruh contoh dari data terkecil sampai terbesar, sehingga peringkat data terkecil adalah 1 dan N adalah peringkat data terbesar. Peringkat masing-masing pengamatan dilambangkan dengan $R(X_{ij})$. Perlu diperhatikan bahwa dalam pemeringkatan, data yang sama atau kembar peringkatnya dirata-ratakan. Rata-rata peringkat ini merupakan peringkat untuk masing-masing pengamatan yang kembar. Keadaan ini yang membedakan uji Kruskall-Wallis terhadap uji Median sebelumnya. Uji Kruskall-Wallis mempertimbangkan pengamatan yang kembar, sedangkan uji Median tidak mempermhatikan informasi tersebut.

Setelah data diperingkatkan, kemudian dihitung jumlah peringkat keseluruhan pengamatan pada masing-masing contoh. Jumlah peringkat keseluruhan pengamatan pada contoh ke-j dilambangkan dengan R_j, perhitungannya menggunakan

$$R_j = \sum_{j=1}^{k} R(X_{ij}) \tag{19}$$

Kemudian hitung statistik uji Kruskal-Wallis dengan rumus (20) atau (21).

Conover (1971) menyatakan bahwa asumsi-asumsi yang diperlukan untuk melakukan pengujian dengan menggunakan uji Kruskal-Wallis adalah:

1. Semua contoh merupakan contoh acak dari populasinya.
2. Sebagai tambahan dari independensi dalam tiap contoh, juga ada independensi antar contoh.
3. Semua peubah acak X_{ij} kontinu (sejumlah nilai kembar masih diperbolehkan).
4. Skala pengukurannya minimal skala ordinal.
5. Fungsi sebaran k populasi identik atau beberapa populasi cenderung memiliki nilai yang lebih besar dari populasi lainnya.

Sedangkan, hipotesis uji Kruskal-Wallis dapat dinyatakan dengan

H_0 : Semua fungsi sebaran k populasi identik

H_1 : Sedikitnya ada satu populasi cendrung memiliki nilai yang lebih besar dari populasi lainnya.

Uji Kruskal-Wallis sensitif terhadap perbedaan diantara rata-rata k populasinya, sehingga hipotesis alternatifnya dapat juga ditulis menjadi

H_1 : k populasi tidak memiliki rata-rata yang sama

Statistik uji Kruskal-Wallis didefinisikan dengan

$$H = \frac{12}{N(N+1)}\sum_{j=1}^{k}\frac{\left[R_j - \frac{n_j(N+1)}{2}\right]}{n_j} \tag{20}$$

Untuk kemudahan perhitungan, rumus statistik uji dapat disederhanakan menjadi

$$H = \frac{12}{N(N+1)}\sum_{j=1}^{k}\frac{R_i^2}{n_j} - 3(N+1) \tag{21}$$

Distribusi pasti dari H dapat ditentukan, tetapi untuk contoh dan pengulangan yang sedikit karena perhitungannya akan menjadi rumit untuk yang lebih besar. Kruskal-Wallis mengusulkan untuk menggunakan tabel Kruskal-Wallis untuk ukuran contoh kurang dari atau sama dengan lima dan dan banyaknya contoh sama dengan tiga. Jika tidak demikain, maka digunakan distribusi Kai-Kuadrat sebagai pendekatan.

Adapun aturan pengambilan keputusan pengujian dengan menggunakan statistik uji Kruskal-Wallis adalah

1. Jika dalam pengujian digunakan $k = 3$ dan $n_j \leq 5, j = 1,2,...,k$, maka daerah kritis pasti berukuran α dapat diperoleh dari tabel Kruskal-Wallis pada lampiran. Jika nilai H lebih besar dari H pada pada tabel Kruskal-Wallis yang bersesuaian, maka tolak hipotesis nol pada taraf pengujian tertentu.
2. Untuk $k > 3$ dan $n_j > 5, j = 1,2,...,k$, digunakan pendekatan dengan distribusi kai-kuadrat dengan derajat bebas $k-1$. Jika nilai H lebih besar atau sama dengan kai-kuadrat dengan derajat bebas $k-1$, maka tolak hipotesis nol pada taraf nyata α tertentu.

4.3 Uji Bell-Doksum

Metode pengujian pengaruh perlakuan tetap pada reancangan acak lengkap dapat juga dilakukan dengan uji Bel Doksum, yaitu uji Bell- Doksum untuk beberapa contoh saling bebas atau sering juga dinyatakan sebagai uji Bell-Doksum untuk k contoh saling bebas. Metode pengujian uji Bell-Doksum ini juga menggunakan prinsip pemeringkatan pada data pengamatan yang asli. Akan tetapi dalam proses perhitunganstatistik uji digunakan bantuan nilai deviasi normal baku. Seperti diketahui bahwa dengan menggunakan deviasi normal baku, dapat diperoleh distribusi pasti dari statistik uji. Dalam pengujian ini digunakan juga hubungan antara distribusi normal baku dan distribusi kai-kuadrat.

Misalkan, data terdiri dari k contoh acak yang saling bebas dengan ukuran dapat berbeda. Misalkan juga, $X_{1j}, X_{2j}, ...X_{n_j j}$ merupakan variabel-variabel acak contoh ke-j yang berukuran n_j. Jika N merupakan total keseluruhan ukuran contoh, maka berikan peringkat semua pengamatan pada setiap contoh dengan peringkat dari 1 sampai N seperti pada pemeringkatan Kruskal-Wallis. Peringkat pengamatan X_{ij} dilambangkan dengan $R(X_{ij})$. Ambil N bilangan dari deviasi normal baku dapat dilakukan dengan pembangkitan atau melihat tabel. Nilai deviasi normal baku ini juga diperingkatkan dari 1 sampai N. Gantikan data pengamatan dengan nilai deviasi normal baku yang memiliki peringkat yang sama. Jika data pengamatan ada yang kembar, maka peringkatnya dirata-ratakan dan nilai deviasi normal baku yang bersesuaian juga dirata-ratakan.

Misalkan, $Z(R(X_{ij}))$ merupakan nilai deviasi normal baku yang menggantikan data pengamatan X_{ij} dengan peringkat yang sama dan $Z(r)$ adalah nilai deviasi normal baku terkecil- ke-r yang menggantikan data pengamatan X_{ij} yang memiliki peringkat r pada data aslinya. Dengan demikian dapat dihitung nilai Z untuk setiap k contoh

$$Z_j = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} Z\left[R\left(X_{ij}\right)\right] \quad j = 1,2,\ldots,k \tag{22}$$

kemudian dihitung

$$\overline{Z} = \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N} Z(r) \tag{23}$$

Tahapan-tahapan penghitungan tersebut merupakan rangkaian kerja yang diperlukan untuk dapat melakukan pengujian dengan uji Bell-Doksum. Informasi-informasi di atas nantinya digunakan untuk menghitung statistik uji Bell-Doksum (24).

Asumsi yang diperlukan untuk melakukan pengujian dengan uji Bell-Doksum menurut Conover (1971) adalah:

1. Semua contoh merupakan contoh acak dari populasinya.
2. Sebagai tambahan dari independensi dalam tiap contoh, juga ada independensi antar contoh.
3. Semua peubah acak X_{ij} kontinu (sejumlah nilai kembar masih diperbolehkan).
4. Skala pengukurannya minimal skala ordinal.
5. Fungsi sebaran k populasi identik atau beberapa populasi cenderung memiliki nilai yang lebih besar dari populasi lainnya.
6. Diasumsikan grup N deviasi normal baku merupakan contoh acak berukuran N dari sebaran normal baku.

Hipotesis yang diuji dengan uji Bell-Doksum adalah

H_0 : Semua k populasi memiliki distribusi yang identik

H_1 : Paling sedikit satu populasi cendrung menghasilkan nilai yang lebih besar dari paling sedikit satu populasi lainnya.

Seperti uji Kruskal-Wallis, hipotesis alternatifnya kadang-kadang dapat dituliskan menjadi

H_1 : k populasi tidak memiliki rata-rata yang sama

Statistik uji yang digunakan pada uji Bell-Doksum adalah

$$T_2 = \sum_{j=1}^{k} n_j\left(Z_j - \overline{Z}\right)^2 \tag{24}$$

Distribusi pasti dari T_2 sesuai dengan sifat distribusi pasti dari distribusi normal baku. Seperti diketahui bahwa distribusi normal baku selalu memiliki varian satu dan rata-rata nol.

Karena nilai deviasi normal baku diperoleh secara acak dengan dibangkitkan atau melihat tabel deviasi normal acak, nilai T_2 tidak unik. Nilai T_2 untuk pengujian satu data yang sama dapat berbeda-beda, tergantung cara pengambilan deviasi normal bakunya. Dapat saja seseorang mendapatkan hasil uji Bell-Doksum yang lebih signifikan dari yang lainnya, walaupun data yang digunakan sama. Bagaimanapun juga, keadaan ini sama saja dengan dua orang yang melakukan percobaan dan mendapatkan himpunan data yang berbeda. Oleh karena itu, untuk mengatasi variasi yang tidak diinginkan tersebut dilakukan pengaturan cara pengambilan deviasi acak normal baku. Salah satu cara yang dapat dilakukan untuk mengatasi variasi yang tidak dinginkan dalam uji Bell-Doksum dapat dilakukan dengan mengikuti beberapapa teknik yang disarankan berikut (Conover, 1971):

1. Melibatkan penggunaan rata-rata $Z(r)$, lakukan penggantian $Z(r)$ seperti disarankan oleh Bell-Doksum. Statistik terurut $Z(r)$ divariasikan dari contoh ke contoh lainnya. Tetapi rata-rata $Z(r)$ hanya tergantung pada peringkat r statistik terurut dan ukuran contoh N. Penggunaan tabel deviasi normal acak diubah-ubah untuk mendapatkan $Z(r)$, biasanya tabel ini sudah tersedia. Tabel khusus dibutuhkan untuk dilihat apakah statistik uji signifikan, sedangkan ukuran contoh cukup besar untuk mengesahkan penggunaan distribusi pendekatan.
2. Menggunakan kuantil $\frac{r}{N+1}$ variabel acak normal baku untuk mengubah-ubah nilai $Z(r)$, dengan r merupakan peringkat data pengamatan statistik terurut ke-r dari contoh berukuran N yang belum dirata-ratakan.

Aturan pengambilan keputusan uji Bell-Doksum adalah jika $T_2 > \chi_{1-\alpha,k-1}$, maka tolak H_0 pada taraf α. Sebagai catatan distribusi ini adalah distribusi pasti bukan merupakan distribusi pendekatan seperti uji Median maupun uji Kruskal-Wallis.

5. Ilustrasi Distribusi Pasti Uji Median

Seperti diketahui pada pembahasan sebelumnya, distribusi pasti statistik uji median dapat ditentukan apabila jumlah total baris pertama dan total baris kedua pada tabel kontingensi uji Median nilainya sama atau setidaknya hampir sama agar hipotesis nol diterima. Akan tetapi, untuk total baris dan kolom yang tidak sama, distribusi pasti uji Median juga dapat ditentukan. Namun, ini sangat sulit dihitung karena sangat banyak kemungkinan yang diperoleh. Atau akan lebih banyak kemungkinan yang diperoleh dibanding total baris pertama dan total baris kedua tabel kontingensi uji Median yang sama. Oleh karenanya, dilakukan ilustrasi cara memperoleh distribusi pasti uji Median untuk jumlah total baris pertama dan total baris yang kedua sama.

Nilai distribusi pasti uji Median tersebut dapat dihitung dengan menggunakan rumus statistik uji median (16), karena sesuai dengan ketentuan nilai total baris pertama dan total baris kedua sama. Nilai yang diperoleh ini selanjutnya merupakan nilai variabel acak atau nilai kuantil distribusi pasti uji Median. Sedangkan, peluang distribusi pasti uji Median dapat ditentukan dengan rumus (17).

Pada pengilustrasian ini digunakan $k = 3$ dan $N = 6$, dengan perincian $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, dan $n_3 = 2$. Tabel kontingensi diatur sedemikian rupa sehingga total baris pertama sama dengan 3. Demikian juga dengan total baris kedua juga diatur sama dengan 3. Dengan demikian, diperoleh 7 kemungkinan tabel kontingensi dengan nilai distribusi dan peluang pasti uji Mediannya masing-masing. Akhirnya, semua perhitungan untuk 7 kemungkinan nilai distribusi dan peluang pasti uji Median di atas dapat dirangkum menjadi tabel nilai kuantil uji Median dan peluang pastinya untuk ukuran masing-masing contoh $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, dan $n_3 = 3$. Rangkuman tersebut dapat dilihat pada Tabel 3 berikut:

Tabel 3. Distribusi Pasti Uji Median untuk $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, dan $n_3 = 3$

No.	t	Banyaknya	$P(T=t)$	$P(T \le t)$
1.	0	1	0.4	0.4
2.	4	6	0.1+0.1+0.1+0.1=0.6	1

6. Ilustrasi Tabel Kruskal-Wallis

Tabel distribusi pasti Kruskal-Wallis dapat ditentukan dengan cara menghitung nilai statistik uji Kruskal Wallis (20) atau (21) pada pembahasan sebelumnya. Penghitungan ini dilakukan untuk semua kemungkinan. Dimana kemungkinan nilai statistik uji Kruskal-Wallis tersebut ditentukan oleh banyaknya keseluruhan pengamatan N, masing-masing contoh n_j, dan banyaknya susunan peringkat.

Seperti pembahasan sebelumnya, rancangan yang digunakan pada uji Kruskal-Wallis adalah rancangan acak lengkap. Artinya, pengacakan dilakukan pada setiap unit percobaan karena rancangan acak lengkap mengasumsikan bahwa semua unit percobaan dikondisikan homogen. Oleh karenanya, untuk meletakan suatu unit percobaan pada RAL yang keseluruhan pengamatannya N dapat dilakukan $N!$ cara. Oleh karena, setiap contoh memiliki ukuran n_j untuk $j = 1,2,..,k$ dan pada tiap contoh posisi unit percobaan tidak begitu diperhatikan sehingga banyaknya cara meletakkan unit percobana pada RAL adalah $\frac{N!}{n_1!n_2!...n_k!}$. Keadaan ini analog dengan penyusunan peringkat Kruskal-Wallis untuk menggantikan data pengamatan pada RAL. Dengan demikian banyaknya susunan peringkat (BSP) Kruskall-Walis adalah

$$BSP = \frac{N!}{n_1!n_2!...n_k!} \tag{25}$$

Pengilustrasian Tabel Distribusi Pasti Kruskal-Wallis dilakukan dengan pengambilan contoh, yaitu untuk $k = 3$ dan $n_1 = 2$, $n_2 = 1$, dan $n_2 = 1$. Sehungga diperoleh banyaknya susunan peringkat

$$\begin{aligned} BSP &= \frac{4!}{2!1!1!} \\ &= \frac{24}{2} \\ &= 12 \end{aligned}$$

Karena diketahui $N = 4$, sehingga peringkat data pengamatan adalah 1, 2, 3, dan 4. Peringkat-peringkat ini akan diatur posisinya pada Tabel Layout peringkat uji Kruskal-Wallis.

Dari seluruh perhitungan di atas, diperoleh tiga jenis nilai statistik uji Kruskal-Wallis H, yaitu 0.3, 1,8, dan 2.7. Rincian banyaknya masing-masing nilai statistik uji tersebut berturut-turut 2,4, dan 6. Sedangkan, banyaknya seluruh kemungkinan adalah 12 dan peluang satu kemungkinan nilai H adalah $\frac{1}{12}$. Oleh karena itu, diperoleh $P(H = 0.3) = \frac{2}{12}$, $P(H = 1.8) = \frac{4}{12}$, dan $P(H = 2.7) = \frac{6}{12}$, keadaan ini dirangkum pada Tabel 4 berikut:

Tabel 4. Tabel Distribusi Pasti Kruskal-Wallis untuk $n_1 = 2$, $n_2 = 1$, dan $n_3 = 1$

No.	h	Banyaknya	$P(H = h)$	$P(H \leq h)$
1.	0.3	2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2.	1.8	4	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
3.	2.7	6	$\frac{1}{2}$	1

7. Teladan Penerapan

Teladan yang diberikan untuk melakukan pengujian menggunakan beberapa uji yang dibahas sebelumnya diperoleh dengan membangkitkan data dengan Microsoft Excel. Data yang dibangkitkan ada dua jenis, yaitu data yang berdistribusi normal (Tabel 5) dan data yang tidak berdistribusi normal (Tabel 6).

Dari data yang diperoleh dengan simulasi banyaknya kolom diasumsikan sebagai banyaknya contoh yang diamati, sedangkan banyaknya baris diasumsikan sebagai banyaknya ulangan pengamatan. Data yang terbentuk diasumsikan sebagai data pada rancangan acak lengkap dimana pengacakan dilakukan pada masing-masing unit percobaan.

Tabel 5. Data Berdistribusi Normal

		Contoh				
		1	2	3	4	5
Ulangan	1	14.8084	12.3036	13.6865	20.5510	17.0229
	2	14.0424	4.6337	7.8760	11.6195	22.6061
	3	12.2848	12.5954	13.4764	10.6300	17.9109
	4	3.4206	3.4206	7.8448	3.4206	23.3193
	5	9.2362	4.6337	3.4206	18.1389	20.6429
	6	12.0231	3.0939	13.0455	10.5185	15.5846
	7	8.4450	4.1543	16.1139	10.3568	22.8786
	8	12.5530	9.7360	14.0363	7.4271	13.4107
	9	12.7105	12.1027	8.0149	16.0948	22.2995
	10	15.5391	9.8490	7.5093	10.3298	18.5987

Tabel 6. Data Tidak Berdistribusi Normal (Seragam Kontinu)

		Contoh				
		1	2	3	4	5
Ulangan	1	14.9422	8.1876	24.6975	11.3458	17.5744
	2	12.4958	13.7802	30.6377	11.7547	16.8859
	3	16.5995	9.8006	32.5382	17.1702	30.9165
	4	11.3458	12.0977	28.9655	12.0758	21.5738
	5	13.0667	11.3458	44.3898	10.6489	28.4097
	6	12.8663	18.9577	24.3064	11.0211	34.2026
	7	12.1797	10.2522	24.8387	13.4345	17.5016
	8	12.7576	17.8121	26.4623	15.8955	19.3671
	9	10.7978	19.0669	28.9906	12.0828	42.1659
	10	14.4900	8.7159	37.2598	13.5037	12.8297

Hasil perhitungan uji parametrik data normal dapat dirangkum dalam ANAVA Satu Arah pada Tabel 7 berikut

Tabel 7. ANAVA Satu Arah Data Normal

Sumber Keragaman	Derajat Bebas	Jumlah Kuadrat	Kuadrat Tengah	*NHKT*	F - hitung	Nilai- p
Perlakuan	4	763.6510	190.9128	$\sigma_\varepsilon^2 + \frac{5}{2}\sum_{j=1}^{k}\tau_j^2$	11.4833	2×10^{-6}
Galat	45	748.1343	16.6252	σ_ε^2		
Total	49	1511.7853				

Jika taraf nyata pengujian ditetapkan $\alpha = 0.05$, maka hipotesis nol ditolak karena nilai- p jauh lebih kecil dari $\alpha = 0.05$. Keputusan dapat juga diambil dengan cara membandingkan nilai F yang diperoleh dari perhitungan di atas dengan F teoritis dengan derajat bebas $v_1 = 4$ dan $v_2 = 45$ dan taraf nyata $\alpha = 0.05$. Nilai F teoritis ini adalah $F_{(0.05;4,45)} = 2.5787$. Karena F hasil perhitungan lebih besar dari $F_{(0.05;4,45)}$, hipotesis nol juga ditolak. Artinya, terdapat pengaruh perlakuan pada data pertama.

Hasil perhitungan data seragam kontinu di atas dapat dirangkum dalam ANAVA Satu Arah pada Tabel 8 berikut

Tabel 8. ANAVA Satu Arah Data Seragam Kontinu

Sumber Keragaman	Derajat Bebas	Jumlah Kuadrat	Kuadrat Tengah	*NHKT*	F - hitung	Nilai- p
Perlakuan	4	763.6510	653.3232	$\sigma_\varepsilon^2 + \frac{5}{2}\sum_{j=1}^{k}\tau_j^2$	21.2636	<<0.000001
Galat	45	1382.6224	30.7249	σ_ε^2		
Total	49	3995.9151				

Jika taraf nyata pengujian ditetapkan $\alpha = 0.05$, maka hipotesis nol ditolak karena nilai- p jauh lebih kecil dari $\alpha = 0.05$. Keputusan dapat juga diambil dengan cara membandingkan nilai F yang diperoleh dari perhitungan di atas dengan F teoritis dengan derajat bebas $v_1 = 4$ dan $v_2 = 45$ dan taraf nyata $\alpha = 0.05$. Nilai F teoritis ini adalah $F_{(0.05;4,45)} = 2.5787$. Karena F hasil perhitungan lebih besar dari $F_{(0.05;4,45)}$, hipotesis nol juga ditolak. Artinya, juga terdapat pengaruh perlakuan pada data kedua atau pengaruh perlakuannya tidak tetap.

Kemudian, untuk kedua data teladan di atas dihitung satatistik uji Median T dengan (15), Kruskal-Wallis H dengan (21), dan Bell-Doksum T_2 dengan (24). Rangkuman hasilnya dapat dilihat pada Tabel 9 berikut

Tabel 9. Rangkuman Hasil Uji Nonparametrik

Data	T	$\hat{\alpha}$	H	$\hat{\alpha}$	T_2	$\hat{\alpha}$
Normal	15.2	0.00430	22.82	1.4×10^{-4}	27.73	1.4×10^{-5}
Seragam Kontinu	28	0.00001	31.31	2.6×10^{-6}	31.75	2.2×10^{-6}

Nilai statistik uji untuk kedua data di atas dibandingkan dengan distribusi kai-kuadrat $\chi^2_{0.05;4} = 9.4877$. Dengan demikian, hipotesis nol ditolak untuk masing-masing pengujian baik data normal maupun data seragam kontinu, karena nilai statistik uji untuk masing-masing data lebih besar dari $\chi^2_{0.05;4} = 9.4877$. Dengan demikan, untuk data normal maupun data seragam kontinu terdapat pengaruh perlakuan.

8. Kesimpulan

Dari pengkajian dalam penelitian ini dapat disimpulkan bahwa untuk teladan data normal pada penelitian ini, uji F, uji Median, uji Kruskal, dan uji Bell-Doksum memperlihatkan hasil yang sama, yaitu menolak hipotesis nol dengan taraf nyata berturut-turut 2×10^{-6}, 4.3×10^{-4}, 1.4×10^{-4}, dan 1.4×10^{-5}. Artinya, uji Bell-Doksum lebih mampu mendekati uji F untuk data normal. Sedangkan uji Kruskal-Wallis juga dapat menghampiri uji F, tetapi tidak sebaik uji Bell-Doksum melainkan nilainya hampir sama dengan uji Median.

Sedangkan, untuk teladan data seragam kontinu uji F, uji Median, uji Kruskal, dan uji Bell-Doksum, juga memperlihatkan hasil yang sama, yaitu menolak hipotesis nol dengan taraf nyata secara terurut adalah $<<1\times10^{-7}$, 1×10^{-5}, 2.6×10^{-6} 2.2×10^{-6}. Namun, taraf nyata untuk uji F sangat jauh berbeda, menunjukkan uji F tidak cukup baik digunakan untuk data tidak normal. Sedangkan uji Bell-Doksum memperlihatkan hasil yang lebih baik dibanding dua uji nonparametrik lainnya.

9. Daftar Pustaka

Anonim. 2007. *Berbagai Jenis rancanga Percobaan*. http://gesaf.files.wordpress.com/2008/07/berbagai-jenis-rancangan-percobaan.pdf

Conover, W.J. 1971. *Pratical Nonparametric Statistics*. Wiley International Edition, John Wiley & Sons, New York

Dajan, A. 1996. *Pengantar Metode Statistik, Jilid II*. LP3ES, Jakarta

Daniel, W.W. 1989. *Statistika Nonparametrik Terapan*. Edisi Terjemahan, Penerbit PT Gramedia, Jakarta

Dudewicz, E.J. dan S.N. Mishra. 1995. *Statistika Matematika Modern*. Penerbit ITB Bandung, Bandung

Gibbons, J.D. 1985. *Nonparametric Statistic Inference, 2nd ed*. Marcel Dekker, New York

Gibbons., J.D. dan S. Chakraborti. 2003. *Nonparametric Statistic Inference, 4nd ed*. Marcel Dekker, New York

Herawati, N. 2007. *Rancangan Percobaan*. http://lemlit.unila.ac.id/file/data%20lama/makalah%20pdf/BAHANMETODOL.DOSEN.pdf

Hinkelmann, K. dan O. Kempthore. 2008. *Design and Analysis of Experiment Volume 1, Introduction to Experimental Design, Second Edition*. Wiley-Interscience A John Wiley & Sons Inc., Publication, New Jersey

Lentner, M. dan T. Bishop. 1986. *Experimental Design and Analysis*. Valley Book Company, Blackburg

Mattjik, A.A. dan Sumertajaja, M. 2000. *Rancangan Percobaan dengan Aplikasi SAS dan MINITAB Jilid 1*. IPB-Press, Bogor

Murti, B. 1996. *Penerapan Metode Statistik Nonparametrik dalam Ilmu-Ilmu Kesehatan*. Penerbit PT Gramedia, Jakarta

Nugroho, S.. 2008. *Metode Statistik Nonparametrik*. UNIB-Press, Bengkulu

Randles, R. H. dan D. A. Wolf. 1979. *Introduction to The Theory of Nonparametric Statistics*. Jhon Wiley and Sons

Siegel, S. and N. J. Catellan, Jr. 1988. *Nonparametric Statistics for The Behavioral Science, 2nd ed*. McGraw-Hill International Edition, McGraw-Hill Book Company, Singapore

Sprent, P. 2001. *Applied Nonparametric Statistical Methods*. CRC Press LLC, USA

Tambunan, T. 2008. *Statistik Nonparametrik*. http://rumahbelajarpsikologi.com/index.php/nonpar.html

Weiss, N. A. 2002. *Elementary Statistics 5th ed*. Pearson Education Inc. New York

Kajian Uji Lanjut dari Anava dalam Rancangan Acak Lengkap

Shinta Kristilya[1], Sigit Nugroho[2], dan Jose Rizal[2]
1 Alumni Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Bengkulu
2 Staf Pengajar Matematika Fakultas MIPA Universitas Bengkulu

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji uji lanjut dari ANAVA dalam Rancangan Acak Lengkap (RAL) dengan faktor kualitatif dan perlakuan tetap. Uji lanjut yang dikaji, yaitu uji *Least Significant Difference* (LSD), *Honestly Significant Difference* (HSD), Student-Newmann-Keuls (SNK), dan Duncan's *New Multiple Range* (DNMR). Selain itu, untuk mengkaji perbandingan antara keempat metode tersebut melalui analisis data simulasi dengan menggunakan bantuan program Microsoft Excel. Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur. Data simulasi memiliki sebaran Normal, berdasarkan hasil pengujian LSD, HSD, SNK, dan DNMR diperoleh bahwa LSD lebih powerful daripada metode lainnya karena lebih banyak menunjukkan perlakuan yang berbeda nyata/signifikan.

Kata Kunci: *Uji Least Significant Difference* (*LSD*), *Uji Honestly Significant Difference* (*HSD*), *Uji Student-Newman-Keuls* (*SNK*), *Uji Duncan's New Multiple Range* (*DNMR*), *Data Simulasi*

1. PENDAHULUAN

Rancangan percobaan merupakan rangkaian kegiatan berupa pemikiran dan tindakan yang dipersiapkan secara kritis dan seksama mengenai berbagai aspek yang dipertimbangkan dan sedapat mungkin diupayakan dapat diselenggarakan dalam suatu percobaan dalam rangka menemukan suatu pengetahuan baru (Hanafiah, 2003).

Bidang ilmu pertanian dan ekonomi melibatkan data-data dari penelitian yang dilakukan pada kondisi lingkungan, alat, bahan, dan media yang homogen. Data ini diperoleh dari tindakan coba-coba (*trial and error*) terhadap suatu objek pengamatan yang selanjutnya diselidiki pengaruhnya. Tindakan yang diterapkan pada objek pengamatan ini disebut perlakuan. Data ini terdiri atas variabel takbebas/respon (*dependent random variable*) yang dilambangkan dengan Y dan variabel bebas (*independent random variable*) yang dilambangkan dengan X .

Perlakuan ini dapat berasal dari faktor kualitatif (mutu), yaitu perlakuan yang hanya memperhitungkan mutu perlakuan X, misalnya mutu macam pupuk, mutu macam alat, dan sebagainya. Selain itu, perlakuan juga dapat berasal dari faktor kuantitatif (takaran), yaitu perlakuan yang memperhitungkan takaran perlakuan X, misalnya takaran pupuk, takaran pestisida, dan sebagainya (Hanafiah, 2003).

Suatu penelitian dengan faktor kualitatif dapat diduga pengaruh perlakuan terhadap nilai-nilai pengamatan hasil percobaan. Pengujian terhadap penduga tersebut dilakukan dengan langkah awal penyusunan hipotesis. Hipotesis ini terdiri atas dua macam, yaitu hipotesis nol dan hipotesis tandingan. Hipotesis nol menyatakan dugaan sementara dari suatu pengamatan. Sedangkan hipotesis tandingan menyatakan bahwa hipotesis nol tidak benar (Furqon, 2004).

Apabila hipotesis nol tersebut ditolak berarti peneliti dapat menarik kesimpulan bahwa suatu perlakuan berpengaruh nyata terhadap respon yang diamati, tetapi tidak dapat menentukan perlakuan mana yang berpengaruh nyata. Uji lanjutan untuk mengetahui perlakuan mana yang signifikan/berpengaruh nyata/berbeda nyata adalah dengan menggunakan uji perbandingan nilai tengah perlakuan *Least Significant Difference* (LSD), Benferroni, Peubah Ganda-t, *Honestly Significant Difference* (HSD), Student-Newman-Keuls (SNK), Duncan's *New Multiple Range* (DNMR), Scheffe, Dunnett, Hsu, dan Kontras Rataan (Nugroho, 2008).

Kempthorne (1955) menyatakan bahwa prosedur uji lanjut ANAVA digunakan untuk membandingkan tiap rataan perlakuan dengan rataan perlakuan yang lain secara berpasangan. Metode Benferroni, Peubah Ganda-t, Scheffe, Dunnett, dan Hsu dapat diterapkan apabila memenuhi kondisi tertentu dari masing-masing metode. Sedangkan uji perbandingan nilai tengah perlakuan atau sering disebut sebagai uji lanjut dari ANAVA *Least Significant Difference* (LSD), *Honestly Significant Difference* (HSD), Student-Newman-Keuls (SNK), dan Duncan's *New Multiple Range* (DNMR) lebih mudah diterapkan dalam teladan penerapan. Selain itu, keempat prosedur pengujian ini dapat dibandingkan satu dengan lainnya karena memiliki kemiripan.

Berdasarkan hal tersebut, penulis tertarik untuk mempelajari keempat prosedur uji lanjut dari ANAVA supaya diketahui metode mana yang lebih powerful (kecenderungan menolak hipotesis nol) dalam penentuan perlakuan yang berbeda tersebut.

Prosedur pengujian uji lanjut dari ANAVA tersebut dapat diolah dengan menggunakan bantuan program Microsoft Excel, yaitu teladan penerapan dengan simulasi data berpasangan.

Melalui studi literatur, penelitian ini akan membahas tentang kajian prosedur pada beberapa uji lanjut dari ANAVA dalam mengetahui perlakuan mana yang berbeda nyata ketika hipotesis nol ditolak.

2. RANCANGAN PERCOBAAN

2.1 Pengantar Teori Rancangan Percobaan

Rancangan percobaan merupakan pengaturan satuan percobaan dan alokasi perlakuan kedalam satuan percobaan. Salah satu tujuan utama penelitian percobaan adalah untuk meyakinkan bahwa populasi-populasi perlakuan memiliki parameter yang sama atau berbeda mengenai rataannya. Upaya untuk mendeteksi perbedaan-perbedaan nyata antar rataan perlakuan harus digunakan rancangan percobaan yang paling sensitif, yaitu rancangan yang memiliki kesalahan percobaan yang paling kecil (Nugroho, 2008).

2.1.1 Beberapa Istilah dalam Suatu Rancangan Percobaan

Terdapat beberapa istilah dalam rancangan percobaan yang harus dikenal, yaitu:

1. Perlakuan (*Treatment*)
   Perlakuan merupakan suatu prosedur atau metode yang diterapkan pada unit percobaan. Menurut Nugroho (2008), perlakuan merupakan beberapa kondisi yang mencirikan suatu populasi.
2. Unit/Satuan Percobaan
   Unit percobaan adalah unit terkecil dalam suatu percobaan yang diberi suatu perlakuan.

3. Satuan Amatan
   Satuan amatan adalah anak gugus dari unit percobaan dimana respon perlakuan diukur.
4. Faktor
   Faktor adalah peubah bebas yang dicobakan dalam percobaan sebagai penyusun struktur perlakuan.
5. Taraf (*Level*)
   Taraf adalah kategori yang berbeda dari suatu faktor.

2.1.2 Sumber Keragaman dalam Rancangan Percobaan

Terdapat dua macam sumber keragaman dalam rancangan percobaan, yaitu:
1. Faktor utama merupakan faktor-faktor yang akan diteliti dan sengaja diberikan.
2. Di luar faktor-faktor yang akan diteliti (faktor eksternal).

Faktor-faktor ini diharapkan pengaruhnya sekecil mungkin. Adapun faktor-faktor yang dimaksud terdiri atas:
1. Faktor yang dapat diidentifikasi dan diperkirakan pengaruhnya sebelum percobaan. Hal ini diatasi dengan cara dilakukan pengelompokan, sehingga keragaman di antara kelompok dapat diukur dan dikeluarkan dari galat percobaan.
2. Faktor yang dapat diidentifikasi, tetapi pengaruhnya tidak dapat diduga. Hal ini dapat diatasi dengan dilakukan pengacakan.
3. Faktor yang tidak dapat diidentifikasi. Hal ini diatasi dengan dilakukan pengulangan.

2.1.3 Peminimuman Galat Percobaan

Meminimumkan galat percobaan (*experimental error*) yang berguna dalam meningkatkan ketelitian percobaan diharuskan terdapat hal-hal berikut antara lain:
1. Pengendalian terhadap lingkungan. Hal ini dapat dilakukan dengan perancangan percobaan, penggunaan peubah pengiring, dan perluasan ukuran satuan percobaan.
2. Pengacakan. Hal ini dilakukan dengan memberikan kesempatan yang sama pada setiap satuan percobaan untuk dikenakan perlakuan.
3. Pengulangan. Ulangan dilakukan dengan memberikan perlakuan yang sama pada satuan percobaan lebih dari satu kali. Fungsi dari ulangan antara lain:
   a. Pendugaan galat
   b. Meningkatkan ketelitian percobaan
   c. Memperluas cakupan kesimpulan
   d. Mengendalikan ragam galat

2.2 Rancangan Acak Lengkap (RAL)

Rancangan acak lengkap merupakan jenis rancangan percobaan yang paling sederhana. Adapun yang melatarbelakangi digunakannya RAL adalah sebagai berikut:
1. Satuan percobaan yang digunakan homogen atau tidak ada faktor lain yang mempengaruhi respon di luar faktor yang dicoba atau diteliti.
2. Faktor luar yang dapat mempengaruhi percobaan dapat dikontrol. Misalnya, percobaan yang dilakukan di laboratorium.

Keuntungan-keuntungan RAL antara lain (Lentner & Bishop, 1986):
1. Pelaksanaannya mudah, yaitu tidak terdapat pembatasan dalam hal banyaknya perlakuan ataupun banyaknya ulangan dalam perlakuan.

2. Analisis data mudah, yaitu RAL sangat mudah dianalisis bahkan dengan ulangan setiap perlakuan yang tidak sama.
3. Derajat bebas yang diberikan adalah maksimum untuk pendugaan galat percobaan.

Sedangkan kerugiannya adalah rancangan ini relatif tidak efisien ketika terdapat rancangan percobaan lain yang lebih tepat. Hal ini bersumber dari fakta bahwa semua keragaman yang tidak diketahui tercakup dalam galat percobaan.

2.2.1 Model Linier dan Asumsi

Bentuk umum dari model linier untuk RAL dengan ulangan yang sama dapat dituliskan sebagai berikut (Lentner & Bishop, 1986):

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}\,;\; i = 1, 2, \ldots, t \text{ dan } j = 1, 2, \ldots, r \tag{1}$$

Keterangan:

Y_{ij} = pengamatan pada perlakuan ke-i dan ulangan ke-j

μ = rataan umum

τ_i = pengaruh perlakuan ke-i = $\mu_i - \mu$

ε_{ij} = penyimpangan pengamatan ke-ij dari rataan perlakuan (komponen galat)

μ_i = model rataan perlakuan ke-i

Asumsi-asumsi yang digunakan dalam RAL dengan model pengaruh perlakuan tetap adalah (Ryan, 2007):

a. μ adalah konstanta tetap untuk semua perlakuan pengamatan.

b. $\varepsilon_{ij} \sim NID(0, \sigma_\varepsilon^{\,2})$

ε_{ij} menyebar mengikuti distribusi normal dan saling bebas dengan nilai rataan 0, serta varian/ragam $\sigma_\varepsilon^{\,2}$.

c. $\sum_{i=1}^{t} \tau_i = 0$.

Bentuk hipotesis yang diuji untuk model pengaruh perlakuan tetap adalah:

H_0 : $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_t$

H_1 : paling sedikit terdapat $\mu_i \neq \mu_h$; $i \neq h = 1, 2, \ldots, t$

Hipotesis tersebut dirumuskan untuk menguji bahwa tidak terdapat pengaruh perlakuan terhadap respon yang diamati. Dengan kata lain, rataan setiap perlakuan dalam suatu percobaan adalah sama (Montgomery, 1997).

2.2.2 Layout Data pada RAL

Pengacakan dilakukan supaya analisis data yang dilakukan menjadi sahih. Pengacakan dapat dilakukan dengan menggunakan undian atau angka acak. Misalkan terdapat t perlakuan yang akan dicobakan dan masing-masing perlakuan diulang dengan perulangan yang sama, yaitu r kali. Sehingga terdapat tr satuan percobaan dengan hasil undian atau angka acak yang diperoleh perlakuan-perlakuan tersebut ditempatkan pada satuan percobaan tersebut. Data hasil percobaan RAL ditabelkan sebagai berikut (Lentner & Bishop, 1986):

Tabel 1 Layout Data pada RAL

		Pengamatan/Ulangan						Total Perlakuan	Rataan Perlakuan
		1	2	…	j	…	r		
Perlakuan	1	Y_{11}	Y_{12}	…	Y_{1j}	…	Y_{1r}	$Y_{1.}$	$\bar{Y}_{1.}$
	2	Y_{21}	Y_{22}	…	Y_{2j}	…	Y_{2r}	$Y_{2.}$	$\bar{Y}_{2.}$
	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮	⋮
	i	Y_{i1}	Y_{i2}	…	Y_{ij}	…	Y_{ir}	$Y_{i.}$	$\bar{Y}_{i.}$
	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮	⋮
	t	Y_{t1}	Y_{t2}	…	Y_{tj}	…	Y_{tr}	$Y_{t.}$	$\bar{Y}_{t.}$
Total Ulangan		$Y_{.1}$	$Y_{.2}$	…	$Y_{.j}$	…	$Y_{.r}$	$Y_{..}$	$\bar{Y}_{..}$

Sumber: Lentner & Bishop, 1986

2.2.3 Analisis Varian (ANAVA)

Tabel 2 Struktur Tabel ANAVA pada RAL dengan Model Pengaruh Tetap

Sumber Keragaman (SK)	Derajat Bebas (db)	Jumlah Kuadrat (JK)	Kuadrat Tengah (KT)	NHKT
Perlakuan	$t-1$	$JK[P]$	$KT[P]$	$\sigma_\varepsilon^2 + \frac{r}{t-1}\sum_{i=1}^{t}\tau_i^2$
Galat	$t(r-1)$	$JK[G]$	$KT[G]$	σ_ε^2
Total	$tr-1$	$JK[T]$		

Sumber: Lentner & Bishop, 1986

Prosedur pengujian hipotesis akan dijelaskan sebagai berikut:

1. Perumusan Hipotesis

   H_0 : $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_t$

   H_1 : paling sedikit terdapat $\mu_i \neq \mu_h$; $i \neq h = 1, 2, \ldots, t$
2. Tingkat signifikan ($\alpha = 0.05$ dan $\alpha = 0.01$)
3. Statistik uji yang digunakan adalah statistik uji-F. F_{hitung} dibandingkan dengan F_{tabel} yang memiliki derajat bebas $(t-1)$ dan $t(r-1)$.
4. Kriteria Pengujian
   - Jika nilai $F_{hitung} > F_{tabel}$, maka H_0 ditolak.
   - Jika nilai $F_{hitung} \leq F_{tabel}$, maka H_0 diterima.
5. Kesimpulan

Penolakan hipotesis nol berimplikasi bahwa perlakuan yang diberikan terhadap unit-unit percobaan memberikan pengaruh nyata terhadap respon yang diamati.

Menurut Lentner dan Bishop (1986), pendefinisian secara umum dan formula perhitungan untuk masing-masing jumlah kuadrat adalah sebagai berikut:

$$JK[T] = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} Y_{ij}^{2} - \frac{Y_{..}^{2}}{n} \tag{2}$$

$$JK[P] = \sum_{i=1}^{t} \frac{Y_{i.}^{2}}{r} - \frac{Y_{..}^{2}}{n} \tag{3}$$

$$JK[G] = JK[T] - JK[P] \tag{4}$$

$$KT[P] = \frac{JK[P]}{t-1} \tag{5}$$

$$KT[G] = \frac{JK[G]}{t(r-1)} \tag{6}$$

$$F_{hitung} = \frac{KT[P]}{KT[G]} \tag{7}$$

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Uji *Least Significant Difference* (LSD)

Nilai kritis LSD (Hanafiah, 2003):

$$\mathrm{LSD}_{\alpha} = t_{\frac{\alpha}{2};v}\left(\sqrt{\frac{2KT\,[G]}{r}}\right) \tag{8}$$

Adapun langkah-langkah pengujian LSD adalah sebagai berikut:

1. Rataan perlakuan diurutkan dari yang terkecil sampai yang terbesar atau sebaliknya.
2. Angka bantuan untuk mencegah kekeliruan perbandingan ditandai dengan i merupakan penunjuk perlakuan ke-i berdasarkan hasil pengurutan langkah 1, dan h merupakan kebalikan dari urutan perlakuan ke-i.
3. Dihitung selisih mutlak antara rataan perlakuan ke-i dengan rataan perlakuan ke-h, kemudian dibandingkan dengan nilai kritis LSD_{α} yang telah ditentukan sebelumnya. Jika selisih rataan perlakuan lebih kecil atau sama dengan LSD_{α}, maka kriteria pemberian tanda yang menunjukkan hipotesis nol diterima dilihat pada langkah 5. Sebaliknya, jika selisih rataan perlakuan lebih besar dari LSD_{α}, maka kriteria pemberian tanda yang menunjukkan hipotesis nol ditolak dilihat pada langkah 4.
4. Perlakuan yang berbeda dengan perlakuan yang dibandingkan harus ditandai dengan menggunakan salah satu dari dua tanda. Adapun kriteria pemberian tanda pada setiap selisih mutlak rataan perlakuan tersebut, yaitu (Soetomboz, 2009):

   (a) * = nyata (*significant*)

   Jika nilai selisih mutlak lebih besar dari LSD_{α} $\left(\left|\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{h.}\right| > \mathrm{LSD}_{\alpha}\right)$ pada taraf signifikan rendah umumnya 5%, maka hasil uji disebut berbeda nyata.

   (b) ** = sangat nyata (*highly significant*)

Jika nilai selisih mutlak lebih besar dari LSD_α $\left(\left|\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{h.}\right| > \text{LSD}_\alpha\right)$ pada taraf signifikan tinggi umumnya 1%, maka hasil uji disebut berbeda sangat nyata.

5. Hipotesis nol diterima artinya tidak terdapat perbedaan antara perlakuan yang satu dengan yang lain. Adapun kriteria pemberian tanda pada setiap selisih mutlak rataan perlakuan tersebut, yaitu:

   tn = tidak nyata (*non significant*)

   Jika nilai selisih mutlak lebih kecil atau sama dengan LSD_α $\left(\left|\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{h.}\right| \le \text{LSD}_\alpha\right)$ pada taraf signifikan tertentu, maka hasil uji disebut berbeda tidak nyata.

Setelah prosedur perbandingan selesai, kriteria pengujiannya adalah:
Jika $\left|\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{h.}\right| > \text{LSD}_\alpha$ dengan hasil (*) atau (**), maka perlakuan dengan $\overline{Y}_{i.}$ memiliki perbedaan terhadap perlakuan dengan $\overline{Y}_{h.}$. Selang kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ adalah:

$$\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{h.} \pm \text{LSD}_\alpha \tag{9}$$

3.2 Uji *Honestly Significant Difference* (HSD)

Nilai kritis HSD (Furqon, 2004):

$$\text{HSD}_\alpha = q_{\alpha;\,t;\,db\,galat}\left(\sqrt{\frac{KT\,[G]}{r}}\right) \tag{10}$$

dimana $q_{\alpha;\,t;\,db\,galat}$ adalah nilai pada distribusi *studentized range* dengan taraf pengujian/signifikan α, banyaknya perlakuan t, dan derajat bebas galat.

Prosedur perbandingan ini sangat bagus digunakan untuk memisahkan perlakuan-perlakuan yang memang benar berbeda dan metode ini dikenal tidak terlalu sensitif.

Adapun langkah-langkah pengujian HSD adalah sebagai berikut:

1. Rataan perlakuan diurutkan dari yang terkecil sampai yang terbesar atau sebaliknya.
2. Angka penunjuk perlakuan dapat membantu dalam perbandingan, ditandai dengan i yang merupakan penunjuk perlakuan ke-i sesuai hasil pengurutan langkah 1, dan h merupakan kebalikan dari urutan perlakuan ke-i.
3. Dihitung selisih mutlak antara rataan perlakuan ke-i dengan rataan perlakuan ke-h, kemudian dibandingkan dengan nilai kritis HSD_α yang telah ditentukan sebelumnya. Jika selisih rataan perlakuan lebih kecil atau sama dengan HSD_α, maka kriteria pemberian tanda yang menunjukkan hipotesis nol diterima dilihat pada langkah 5. Sebaliknya, jika selisih rataan perlakuan lebih besar dari HSD_α, maka kriteria pemberian tanda yang menunjukkan hipotesis nol ditolak dilihat pada langkah 4.
4. Perlakuan yang berbeda dengan perlakuan yang dibandingkan harus ditandai dengan menggunakan salah satu dari dua tanda. Adapun kriteria pemberian tanda pada setiap selisih mutlak rataan perlakuan tersebut, yaitu:

   (a) * = nyata (*significant*)

   Jika nilai selisih mutlak lebih besar dari HSD_α $\left(\left|\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{h.}\right| > \text{HSD}_\alpha\right)$ pada taraf signifikan rendah umumnya 5%, maka hasil uji disebut berbeda nyata.

   (b) ** = sangat nyata (*highly significant*)

Jika nilai selisih mutlak lebih besar dari HSD_α $\left(\left|\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{h.}\right| > \text{HSD}_\alpha\right)$ pada taraf signifikan tinggi umumnya 1%, maka hasil uji disebut berbeda sangat nyata.

5. Hipotesis nol diterima artinya tidak terdapat perbedaan antara perlakuan yang satu dengan yang lain. Adapun kriteria pemberian tanda pada setiap selisih mutlak rataan perlakuan tersebut, yaitu:
   tn = tidak nyata (*non significant*)

   Jika nilai selisih mutlak lebih kecil atau sama dengan HSD_α $\left(\left|\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{h.}\right| \le \text{HSD}_\alpha\right)$ pada taraf pengujian yang digunakan, maka hasil uji ini disebut berbeda tidak nyata.

Setelah prosedur perbandingan selesai, kriteria pengujiannya adalah:
Jika $\left|\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{h.}\right| > \text{HSD}_\alpha$ dengan hasil (*) atau (**), maka perlakuan dengan $\overline{Y}_{i.}$ memiliki perbedaan terhadap perlakuan dengan $\overline{Y}_{h.}$. Selang kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ adalah:

$$\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{h.} \pm \text{HSD}_\alpha \tag{11}$$

3.3 Uji Student-Newman-Keuls (SNK)

Nilai kritis SNK dapat dihitung sebagai berikut (Montgomery, 1997):

$$\text{SNK}_p = q_{\alpha;\, p;\, db\ galat}\left(\sqrt{\frac{KT\,[G]}{r}}\right) \tag{12}$$

dimana $q_{\alpha;\, p;\, db\ galat}$ adalah nilai pada distribusi *studentized range* pada taraf pengujian α, jarak peringkat dua perlakuan p dengan $p = 2, 3, 4, \ldots, t$, dan derajat bebas galat.

Adapun langkah-langkah pengujian SNK adalah sebagai berikut:

1. Rataan perlakuan diurutkan dari yang terkecil sampai yang terbesar atau sebaliknya.
2. Angka penunjuk perlakuan dapat membantu dalam perbandingan, ditandai dengan i yang merupakan penunjuk perlakuan ke-i sesuai hasil pengurutan langkah 1, dan h merupakan kebalikan dari urutan perlakuan ke-i.
3. Dihitung selisih mutlak antara rataan perlakuan ke-i dengan rataan perlakuan ke-h.
4. Sebagai pembanding digunakan $p = 2, 3, 4, \ldots, t$ untuk menentukan $q_{\alpha;\, p;\, db\ galat}$, selanjutnya dihitung nilai SNK_p dari masing-masing jarak p.
5. Selisih rataan perlakuan yang terkecil dengan terbesar pertama dibandingkan dengan SNK_p yang memiliki jarak p terbesar atau $p = t$. Selanjutnya, selisih rataan perlakuan yang terkecil dengan terbesar kedua dibandingkan dengan SNK_p yang memiliki jarak $p = t-1$. Perbandingan ini berlangsung sampai seluruh rataan perlakuan telah dibandingkan dengan rataan perlakuan terkecil.
6. Selisih rataan perlakuan yang terkecil kedua dengan terbesar pertama dibandingkan dengan SNK_p yang memiliki jarak $p = t-1$. Selanjutnya, selisih rataan perlakuan yang terkecil kedua dengan terbesar kedua dibandingkan dengan SNK_p yang memiliki jarak $p = t-2$. Perbandingan ini berlangsung sampai seluruh rataan perlakuan telah dibandingkan dengan rataan perlakuan terkecil kedua. Proses ini berlangsung untuk seluruh kemungkinan perbandingan.
7. Jika selisih rataan perlakuan lebih kecil atau sama dengan SNK_p untuk nilai $q_{\alpha;\, p;\, db\ galat}$ dengan jarak p tertentu yang telah dibandingkan, maka kriteria

pemberian tanda yang menunjukkan hipotesis nol diterima dapat dilihat pada langkah 9. Sebaliknya, jika nilai selisih rataan perlakuan lebih besar dari SNK_p untuk nilai $q_{\alpha;\, p;\, db\ galat}$ dengan jarak p tertentu yang telah dibandingkan, maka kriteria pemberian tanda yang menunjukkan hipotesis nol ditolak pada langkah 8.
8. Kriteria penolakan hipotesis nol sama halnya seperti pada prosedur uji LSD dan HSD.
9. Sama saja seperti pada uji LSD dan HSD.

Setelah prosedur perbandingan selesai, kriteria pengujiannya adalah:
Jika $\left|\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{h.}\right| > \text{SNK}_p$ dengan hasil (*) atau (**), maka pasangan pada perlakuan dengan $\overline{Y}_{i.}$ memiliki perbedaan terhadap perlakuan dengan $\overline{Y}_{h.}$.

3.4 Uji Duncan's *New Multiple Range* (DNMR)

Nilai kritis DNMR dapat dihitung sebagai berikut (Hines & Montgomery, 1989):

$$\text{DNMR}_p = q_{\alpha;\, p;\, db\ galat}\left(\sqrt{\frac{KT\,[G]}{r}}\right) \tag{13}$$

dimana $q_{\alpha;\, p;\, db\ galat}$ nilai Tabel Duncan pada taraf pengujian α, jarak peringkat dua perlakuan p dengan $p = 2, 3, 4, \ldots, t$, dan derajat bebas galat.

Adapun langkah-langkah pengujian DNMR adalah sebagai berikut:
1. Rataan perlakuan diurutkan dari yang terkecil sampai yang terbesar atau sebaliknya.
2. Angka bantuan untuk mencegah kekeliruan perbandingan ditandai dengan i merupakan penunjuk perlakuan ke-i berdasarkan hasil pengurutan langkah 1, dan h merupakan kebalikan dari urutan perlakuan ke-i.
3. Dihitung selisih mutlak antara rataan perlakuan ke-i dengan rataan perlakuan ke-h.
4. Sebagai pembanding digunakan $p = 2, 3, 4, \ldots, t$ untuk menentukan $q_{\alpha;\, p;\, db\ galat}$, kemudian dihitung nilai kritis DNMR_p dari masing-masing jarak p.
5. Selisih rataan perlakuan yang terkecil dengan terbesar pertama dibandingkan dengan DNMR_p yang memiliki jarak p terbesar atau $p = t$. Selanjutnya, selisih rataan perlakuan yang terkecil dengan terbesar kedua dibandingkan dengan DNMR_p yang memiliki jarak $p = t - 1$. Perbandingan ini berlangsung sampai seluruh rataan perlakuan telah dibandingkan dengan rataan perlakuan terkecil.
6. Selisih rataan perlakuan yang terkecil kedua dengan terbesar pertama dibandingkan dengan DNMR_p yang memiliki jarak $p = t - 1$. Selanjutnya, selisih rataan perlakuan yang terkecil kedua dengan terbesar kedua dibandingkan dengan DNMR_p yang memiliki jarak $p = t - 2$. Perbandingan ini berlangsung sampai seluruh rataan perlakuan telah dibandingkan dengan rataan perlakuan terkecil kedua. Proses ini berlangsung untuk seluruh kemungkinan perbandingan.
7. Jika selisih rataan perlakuan lebih kecil dari DNMR_p untuk nilai $q_{\alpha;\, p;\, db\ galat}$ dengan jarak p tertentu yang telah dibandingkan, maka cara pemberian tanda yang menunjukkan hipotesis nol diterima dapat dilihat pada langkah 9. Sebaliknya, jika selisih rataan perlakuan lebih besar dari nilai kritis DNMR_p untuk nilai $q_{\alpha;\, p;\, db\ galat}$

dengan jarak p tertentu yang telah dibandingkan, maka cara pemberian tanda yang menunjukkan hipotesis nol ditolak dapat dilihat pada langkah 8.
8. Kriteria penolakan hipotesis nol sama seperti pada prosedur uji LSD, HSD, SNK.
9. Kriteria pemberian tanda untuk hipotesis nol diterima sama pada LSD, HSD, SNK.

Setelah prosedur perbandingan selesai, kriteria pengujiannya adalah:
Jika $\left|\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{h.}\right| > \text{DNMR}_p$ dengan hasil (*) atau (**), maka pasangan pada perlakuan dengan $\overline{Y}_{i.}$ memiliki perbedaan terhadap perlakuan dengan $\overline{Y}_{h.}$.

3.5 Kajian Prosedur Uji Lanjut dari ANAVA dalam RAL

Pengkajian perbandingan antara keempat prosedur uji lanjut dari ANAVA ini pada RAL adalah dengan dilakukan 1500 simulasi data yang memiliki rataan dan varian yang berbeda-beda. Perhitungan-perhitungan dalam simulasi data ini sama seperti perhitungan yang dilakukan dalam teladan penerapan sebelumnya. Hasil simulasi ini adalah mengetahui banyaknya perlakuan yang memberikan pengaruh yang berbeda yang disimbolkan dengan (*) dan (**). Berdasarkan simulasi tersebut, diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 3 Hasil Signifikan Uji Lanjut dari ANAVA

Signifikasi	Uji Lanjut dari ANAVA			
	Uji LSD	Uji HSD	Uji SNK	Uji DNMR
(*) dan (**)	8519	6211	7609	8048
tn	6481	8789	7391	6952
Total	15000	15000	15000	15000

Berdasarkan 15000 simulasi pada data dengan masing-masing uji lanjut dari ANAVA tersebut yang memiliki 10 perbandingan perlakuan, terdapat 8519 kesimpulan yang dihasilkan uji LSD yang menunjukkan bahwa perlakuan memberikan pengaruh yang berbeda. Sedangkan uji HSD tidak dapat menunjukkan lebih nyata perlakuan yang berbeda.

Selanjutnya dari 1500 simulasi pada data yang memiliki sebaran Normal, terdapat 93 kesimpulan dari ANAVA yang menyatakan tidak signifikan/nyata. Secara teori, uji lanjut dari ANAVA hanya dapat dilakukan dengan syarat hipotesis nol pada ANAVA ditolak.

4. KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan mengenai uji lanjut dari ANAVA tersebut, kesimpulan dari skripsi ini adalah sebagai berikut:

- Uji LSD dan HSD memiliki prosedur yang hampir sama, tetapi berbeda pada statistik uji yang digunakannya.
- Uji SNK dan DNMR menggunakan konsep jarak sebagai pembanding terhadap masing-masing statistik uji.
- Berdasarkan teori, uji lanjut dari ANAVA hanya dapat dilakukan apabila hipotesis nol ditolak. Akan tetapi, berdasarkan hasil simulai diperoleh bahwa uji LSD dan

DNMR dapat menunjukkan pengaruh perlakuan yang berbeda baik untuk hasil pengujian hipotesis ANAVA yang signifikan/nyata maupun yang tidak nyata.

4.2 Saran

Sebaiknya dilakukan juga kajian uji LSD, HSD, SNK, dan DNMR untuk rancangan percobaan lainnya, seperti Rancangan Acak Kelompok Lengkap (RAKL) dan Rancangan Bujur Sangkar Latin (RBSL). Serta dapat juga melakukan analisis untuk uji lanjut dari ANAVA seperti Benferroni, Peubah Ganda-t, Scheffe, Dunnett, Hsu, dan Kontras Rataan pada Rancangan Acak Lengkap (RAL).

DAFTAR PUSTAKA

Anonim. 2003. *Statistical Analysis* (1-*Way ANOVA*). http://www.chem.agilent.com/cag/bsp/products/gsgx/Downloads/pdf/one_way_anova.pdf

Anonim. 2009a. *Assessing the Response from any Factor Combination*. http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/prc/section4/prc436.htm#example1

Anonim. 2009b. *Multiple/Post Hoc Group Comparisons in ANOVA*. http://www.nd.edu/~rwilliam/stats1/x53.pdf

Anonim. 2009c. *Part V Analysis of Variance* (*ANOVA*) *Post Hoc Comparisons*. http://www.uwsp.edu/psych/cw/statmanual/posthocs.html

Anonim. 2009d. *Post-Hoc Test*. http://faculty.uncfsu.edu/dwallace/lesson%2016.pdf

Anonim. 2009e. *Tukey's Method*. http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/prc/section4/prc436.htm#example1

Antony, J. 2003. *Design of Experiments for Engineers and Scientists*. Elsevier Science and Technology Books. Newport.

Berthovex, P. M., *et al*. 2002. *Statistics for Environmental Engineers Second Edition*. Lewis Publishers. USA.

Dean, A. and D. Voss. 1999. *Design and Analysis of Experiments*. Springer. New York.

Djunaidi. 2008. *Pengujian Hipotesis Dua Rata-rata Berpasangan*. http://nyoba-ya.blogspot.com/2008/09/analisis-lanjut-one-way-anova.html

Furqon. 2004. *Statistika Terapan untuk Penelitian*. Alfabeta. Bandung.

Hanafiah, K. A. 2003. *Rancangan Percobaan Teori dan Aplikasi*. PT Raja Grafindo Persada. Jakarta.

Hines, W. W. and D. C. Montgomery. 1989. *Probabilita dan Statistik dalam Ilmu Rekayasa dan Manajemen*. Universitas Indonesia Press. Jakarta.

Hinkelmann, K. and O. Kempthorne. 1955. *Design and Analysis of Experiments Volume 1 Introduction to Experimental Design Second Edition*. John Wiley and Sons. Canada.

Lentner, M. and T. Bishop. 1986. *Experimental Design and Analysis*. Valey Book Company. Blacksburg.

Montgomery, D. C. 1997. *Design and Analysis of Experiments Fifth Edition*. John Wiley and Sons. New York.

Nugroho, S. 2008a. *Dasar-dasar Rancangan Percobaan Edisi Pertama*. UNIB Press. Bengkulu.

Nugroho, S. 2008b. *Statistika Matematika*. UNIB Press. Bengkulu.

Ryan, T. P. 2007. *Modern Experimental Design*. Wiley. Canada.

Santoso, A. 2008. *ANAVA Identity Post Hoc dan Kontras*. http://psikologistatistik.blogspot.com/2008/04/anava-identity-post-hoc-dan-kontras.html

Seaman, MA. 1991. *How do I Decide between the Tukey and Newman-Keuls Multiple Comparison Test?*. http://www1.graphpad.com/faq/viewfaq.cfm?faq=1093

Soetomboz. 2009. *Uji Lanjutan BNT untuk RAL Tunggal*. http://analistat.com/old/index.php?id=artikel/rancangan_percobaan/RAL_Tunggal/Uji_Duncan

Stevens. 1999. *Post Hoc Tests in ANOVA*. http://www.uoregon.edu/~stevensj/posthoc.pdf

RANCANGAN ACAK LENGKAP DENGAN SUBSAMPEL

Etis Sunandi[1], Sigit Nugroho[2], dan Jose Rizal[2]
1 Alumni Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Bengkulu
2 Staf Pengajar Matematika Fakultas MIPA Universitas Bengkulu

ABSTRACT

In the Completely Randomized Design, the number of Experimental Unit (EU) is not limited. Sometimes, EU is not easy to be measured or to be observed. This situation can be handled by using the Completely Randomized Design with subsampling.

This research studies procedure of ANOVA (Analysis of Variance) in the case of : (1) unequal numbers of EU per treatment, but a constant number of sampling units for each EU, (2) an equal number or EU per treatment, but an unequal numbers of sampling units per EU, and (3) unequal numbers of EU per treatment and unequal numbers of sampling units per EU.

The result shows that procedure of ANOVA for all of the three cases are different. Furthermore, the second and third case have similar forms in term of their expected means squares.

Keyword : *Completely Randomized Design with subsampling, unequal, treatment, sampling units, ANOVA, Satterthwaites procedure*

1. Pendahuluan

Percobaan merupakan salah satu cara untuk menemukan sesuatu. Percobaan sering dirancang untuk meneliti satu atau lebih populasi. Suatu kondisi yang mencirikan sebuah populasi disebut perlakuan (Sriliana, 2007).

Rancangan percobaan merupakan bagian dari rancangan penelitian ilmiah. Rancangan percobaan dikenal juga sebagai rancangan lapangan. Jenis-jenis rancangan lapangan yang biasanya digunakan adalah Rancangan Acak Lengkap, Rancangan Kelompok Acak Lengkap, Rancangan Persegi Latin, dan Rancangan Persegi Latin Graeco (Lentner & Bishop, 1986).

Rancangan Acak Lengkap adalah rancangan lapangan pada suatu lokasi yang homogen. Rancangan ini dikatakan acak karena setiap satuan percobaan mempunyai peluang yang sama untuk mendapatkan perlakuan sedangkan dikatakan lengkap karena seluruh perlakuan yang dirancang dalam percobaan tersebut digunakan. (Lentner & Bishop, 1986). Analisis dalam Rancangan Acak Lengkap ini dapat dilakukan dengan mudah dan langsung.

Dalam Rancangan Acak Lengkap, banyaknya satuan percobaan tidak dibatasi. Namun dalam beberapa situasi, dimungkinkan ketidakpraktisan untuk mengukur atau mengamati keseluruhan satuan percobaan. Oleh karena itu, upaya yang dapat dilakukan untuk menanggulangi hal tersebut menggunakan Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel.

Ketidaksamaan jumlah data tiap perlakuan dan unit sampel dapat terjadi dalam Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel. Ketidaksamaan ini dimungkinkan terjadi karena adanya data yang hilang atau jumlah ulangan yang berbeda.

Menurut Lentner dan Bishop (1986) kemungkinan ketidaksamaan kasus data pengamatan yang akan ditemui antara lain : (1) ketidaksamaan jumlah ulangan tetapi jumlah unit sampel sama, (2) ketidaksamaan jumlah unit sampel tetapi jumlah ulangan sama, dan (3) ketidaksamaan jumlah unit sampel dan ulangan. Dari tiga kasus tersebut dimungkinkan mempunyai tabel ANAVA yang berbeda satu dengan lainnya.

Berdasarkan hal tersebut, penulis tertarik untuk mempelajari dan membahas prosedur ANAVA dalam Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel pada 3 kasus yang berlainan, seperti tersebut di atas.

2. Landasan Teori

2.1 Rancangan Acak Lengkap (RAL)

Rancangan Acak Lengkap adalah rancangan lapangan dimana seluruh satuan percobaan homogen. (Lentner & Bishop, 1986).

RAL merupakan rancangan yang paling sederhana jika dibandingkan dengan rancangan-rancangan lainnya. Dalam rancangan ini sumber keragaman yang diamati hanya perlakuan dan galat. Oleh karena itu, RAL umumnya cocok digunakan untuk kondisi lingkungan, alat, dan media yang homogen (Hanafiah, 2000).

2.1.1 Kelebihan dan Kelemahan dari RAL

Menurut Lentner dan Bishop (1986), kelebihan dari Rancangan Acak Lengkap adalah sebagai berikut:

a. *Fleksibel*. Disesuaikan dengan sumber keragaman yang ada dan tidak ada batasan antara jumlah perlakuan atau ulangan.
b. *Mudah dianalisis*. Dari semua rancangan lapangan, RAL adalah rancangan yang paling mudah dalam analisisnya, walaupun dalam keadaan jumlah ulangan dan perlakuan tidak sama.
c. *Derajat bebas estimasi maksimum terdapat pada error*. Ini berlaku hanya untuk percobaan-percobaan kecil atau untuk pengamatan dimana variasi luar besar.

Sedangkan kelemahan dari Rancangan Acak Lengkap adalah relatif tidak efesien bila ada rancangan yang lebih tepat untuk digunakan. Hal ini bersumber dari fakta bahwa semua keragaman yang tidak diketahui (serta keragaman faktor luar yang dapat dikendalikan) tercakup dalam galat percobaan (Nugroho, 2008).

2.1.2 Model Linier dan Asumsi

Model linier untuk Rancangan Acak Lengkap terdiri dari t perlakuan dan r_i ulangan adalah sebagai berikut (Montgomery, 1976):

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}; \quad i = 1,2,...,t \qquad j = 1,2,...,r_i \tag{1}$$

Keterangan:

Y_{ij} = *pengamatan pada perlakuan ke - i dalam ulangan ke - j*

μ = *rataan umum*

τ_i = *perlakuan ke - i*

ε_{ij} = *komponen galat*

Agar inferensia valid, asumsi-asumsi untuk model pengaruh tetap adalah:

a. ε_{ij} menyebar secara bebas dan identik menurut sebaran $N(0, \sigma_{\varepsilon}^2)$ untuk setiap i, j.

b. ε_{ij} dan τ_i saling bebas

c. $\sum_i \tau_i r_i = 0$

d. μ adalah konstanta tetap

2.1.3 Layout Data pada Rancangan Acak Lengkap

Pada Rancangan Acak Lengkap, data-data percobaan ditabelkan sebagai berikut:

Tabel 2.1 Layout Data pada Rancangan Acak Lengkap

	Perlakuan					
	1	**2**	**…**	***i***	**…**	***t***
	Y_{11}	Y_{21}	…	Y_{i1}	…	Y_{t1}
	Y_{12}	Y_{22}	…	Y_{i2}	…	Y_{t2}
	.	.		.		.
	.	.		.		.
	.	.		.		.
	Y_{1j}	Y_{2j}	…	Y_{ij}	…	Y_{tj}
	.	.		.		.
	.	.		.		.
	.	.		.		.
Total perlakuan	Y_{1r_1}	Y_{2r_2}	…	Y_{ir_i}	…	Y_{tr_t}

Sumber: Lentner & Bishop, 1986

Total ulangan dan total perlakuan yang diperoleh dari tabel digunakan untuk pendugaan dan perhitungan jumlah kuadrat. Kedua total tersebut juga dapat digunakan untuk menghitung rata-rata, yaitu:

$$\bar{Y}_{i.} = \frac{Y_{i.}}{r_i} = \textit{rata - rata perlakuan ke - i}$$

$$\bar{Y}_{..} = \frac{Y_{..}}{\sum_{i=1}^{t} r_i} = \textit{rataan umum} \qquad (2)$$

2.1.4 Analisis Varian untuk Rancangan Acak Lengkap

Model RAL terbentuk dari perlakuan dan galat. Sebagai konsekuensinya, Analisa Varian (ANAVA) untuk Rancangan Acak Lengkap hanya mencantumkan suatu sumber keragaman perlakuan dan galat.

Pada ketentuan-ketentuan perhitungan, jumlah kuadrat yang diperlukan untuk sumber keragaman antara lain adalah Jumlah Kuadrat Perlakuan (*JKP*), Jumlah Kuadrat Galat (*JKG*), dan Jumlah Kuadrat Total (*JKT*).

Adapun pendefinisian secara umum dan formula perhitungan untuk masing-masing jumlah kuadrat adalah sebagai berikut:

$$FK = faktor\ koreksi = \frac{Y_{..}^{2}}{\sum_{i=1}^{t} r_i} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i} Y_{ij}\right)^2}{\sum_{i=1}^{t} r_i} \tag{3}$$

Faktor koreksi (*FK*) adalah nilai untuk mengoreksi nilai rata-rata (μ) dan perlakuan (τ) sehingga dalam ANAVA nilai $\mu = 0$ (Hanafiah, 2000).

$$JKT = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\left(Y_{ij} - \bar{Y}_{..}\right)^2 = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i} Y_{ij}^2 - FK \tag{4}$$

$$JKP = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\left(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}\right)^2 = \sum_{i=1}^{t}\frac{Y_{i.}^2}{r_i} - FK \tag{5}$$

$$JKG = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\left(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.}\right)^2 = JKT - JKP \tag{6}$$

Perhitungan-perhitungan di atas dapat diringkas dalam tabel ANAVA untuk RAL, sebagai berikut:

Tabel 2.2 ANAVA untuk Rancangan Acak Lengkap

Sumber Keragaman	Derajat Bebas	Jumlah Kuadrat	Kuadrat Tengah	NHKT
Perlakuan	$t-1$	JKP	$KTP = \frac{JKP}{db}$	$\sigma_\varepsilon^2 + \frac{1}{t-1}\sum_i r_i\tau_i^2$
Galat	$\sum_{i=1}^{t} r_i - t$	JKG	$KTG = \frac{JKG}{db}$	σ_ε^2
Total	$\sum_{i=1}^{t} r_i - 1$	JKT		

Sumber: Lentner & Bishop, 1986

2.1.5 Inferensia dalam Model Tetap

Apabila perlakuan ke-i mendefinisikan populasi yang berdistribusi normal dengan rata-rata μ_i dan varian σ_τ^2, biasanya dituliskan dengan $\tau_i \sim N\left(\mu_i, \sigma_\tau^2\right)$, maka inferensia yang mungkin tentang rata-rata perlakuan salah satunya adalah pengujian kesamaan rata-rata perlakuan secara simultan. Hipotesis pengujiannya adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} &H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_t \\ &H_1 : \text{paling sedikit ada } \mu_i \neq \mu_j, i \neq j = 1,2,\ldots,t \end{aligned} \tag{7}$$

Yang mana dalam Rancangan Acak Lengkap akan ekivalen dengan

H_0 : semua rata-rata perlakuan adalah sama
H_1 : ada satu pasang rata-rata perlakuan yang tidak sama

Atau dalam bentuk

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = ... = \tau_t$$
$$H_1 : \text{paling sedikit ada } \tau_i \neq 0, i = 1, 2, ..., t \tag{8}$$

Statistik hitungnya adalah

$$F_{hit} = \frac{Kuadrat\ Tengah\ Perlakuan(KTP)}{Kuadrat\ Tengah\ Galat\left(KTG\right)} \sim F_{(\alpha;dbp;dbg)} \tag{9}$$

Ho ditolak jika $F_{hit} > F_{(\alpha;dbp;dbg)}$, yang berarti ada pengaruh dari perlakuan terhadap pengamatan.

2.2 Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel

Dalam sebuah Rancangan Acak Lengkap pengukuran dan analisis dilakukan untuk setiap satuan percobaan. Namun, dalam beberapa situasi, dimungkinkan ketidakpraktisan untuk mengukur atau mengamati keseluruhan satuan percobaan sehingga diperlukan penarikan sampel satuan percobaan atau disebut dengan unit sampel. Pengamatan dari rancangan dihitung menurut unit sampel. Rancangan ini disebut Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel. (Lentner & Bishop, 1986).

Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel mempunyai kelebihan yang sama dengan Rancangan Acak Lengkap dan lebih efisien dalam pengukuran dan analisis.

Sedangkan kelemahannya adalah bertambahnya galat dikarenakan adanya galat sampel yang diambil dan juga jika ada rancangan lain yang lebih cocok digunakan dalam sebuah penelitian maka Rancangan Acak Lengkap Dengan subsampel tidak efisian digunakan pada rancangan tersebut.

2.2.1 Model Linier dan Asumsi

Model linier untuk Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel terdiri dari t perlakuan, s unit sampel, dan r ulangan adalah sebagai berikut (Lentner & Bishop, 1986):

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} + \delta_{ijk};\ \ i = 1,2,...,t \quad j = 1,2,...,r\ ,\ \ k = 1,2,...,s \tag{10}$$

Keterangan :

Y_{ijk} = *pengamatan pada perlakuan ke - i dalam perulangan ke - j dan pada unit sampel ke - k*

μ = *rataan umum*

τ_i = *pengaruh perlakuan ke - i*

ε_{ij} = *komponen galat*

δ_{ijk} = *komponen galat sampel*

Agar inferensia valid, asumsi-asumsi untuk model pengaruh tetap adalah:

a. ε_{ij} menyebar secara bebas dan identik menurut sebaran $N\left(0,\sigma_\varepsilon^2\right)$ untuk setiap i, j.

b. δ_{ijk} menyebar secara bebas dan identik menurut sebaran $N\left(0,\sigma_\delta^2\right)$ $\forall\ i, j, k$.

c. δ_{ijk} dan ε_{ij} saling bebas.

d. $\sum_{i} \tau_i r_i = 0$

e. μ adalah konstanta tetap.

2.2.2 Layout Data pada Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel

Pada Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel, data-data percobaan ditabelkan seperti yang tercantum pada Tabel 2.7.

Tabel 2.7 Layout Data pada Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel

Perlakuan					
1	**2**	**...**	***I***	**...**	***t***
Y_{111}	Y_{211}	…	Y_{i11}	…	Y_{t11}
Y_{112}	Y_{212}	…	Y_{i12}	…	Y_{t12}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$Y_{11s_{11}}$	$Y_{21s_{21}}$	…	$Y_{i1s_{i1}}$	…	$Y_{t1s_{t1}}$
Y_{121}	Y_{221}	…	Y_{i21}	…	Y_{t21}
Y_{122}	Y_{222}	…	Y_{i22}	…	Y_{t22}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$Y_{12s_{12}}$	$Y_{22s_{22}}$	…	$Y_{i2s_{i2}}$	…	$Y_{t2s_{t2}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$Y_{1r_1 1}$	$Y_{2r_2 1}$	…	$Y_{ir_i 1}$	…	$Y_{tr_t 1}$
$Y_{1r_1 2}$	$Y_{2r_2 2}$	…	$Y_{ir_i 2}$	…	$Y_{tr_t 2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$Y_{1r_1 s_{1r_1}}$	$Y_{2r_2 s_{2r_2}}$	…	$Y_{ir_i s_{ir_i}}$	…	$Y_{tr_t s_{tr_t}}$

Masing-masing total dirumuskan sebagai berikut :

$$Y_{ij.} = \sum_{k=1}^{s} Y_{ijk}$$

$$Y_{i..} = \sum_{j=1}^{r} Y_{ij.} \qquad (11)$$

$$Y_{...} = \sum_{i=1}^{t} Y_{i..}$$

Keterangan :

$Y_{ij.}$ = *total unit sampel pada perlakuan ke-i dalam ulangan ke-j*

$Y_{i..}$ = *total perlakuan*

$Y_{...}$ = *total keseluruhan*

Total keseluruhan, unit sampel, dan perlakuan yang diperoleh digunakan untuk pendugaan dan perhitungan jumlah kuadrat. Ketiga total tersebut juga dapat digunakan untuk menghitung rata-rata, yaitu:

$$\begin{aligned}
\overline{Y}_{i..} &= \frac{Y_{i..}}{rs} = rata\text{ - }rata\ perlakuan\ ke\text{ - }i \\
\overline{Y}_{ij.} &= \frac{Y_{ij.}}{s} = rata\text{ - }rata\ unit\ sampel\ ke\text{ - }ij \\
\overline{Y}_{...} &= \frac{Y_{...}}{rst} = rataan\ keseluruhan
\end{aligned} \tag{12}$$

2.2.3 Analisis Varian untuk Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel

Model Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel terbentuk dari perlakuan, unit sampel, dan galat. Sebagai konsekuensinya, Analisis Varian (ANAVA) untuk Rancangan percobaan Acak Lengkap dengan subsampel hanya mencantumkan sumber keragaman perlakuan, galat, dan galat sampel.

Pada ketentuan-ketentuan perhitungan, jumlah kuadrat yang diperlukan untuk sumber keragaman antara lain adalah Jumlah Kuadrat Perlakuan (*JKP*), Jumlah Kuadrat Galat (*JKG*), Jumlah Kuadrat Galat sampel (*JKS*), dan Jumlah Kuadrat Total (*JKT*).

Adapun pendefinisian secara umum dan formula perhitungan untuk masing-masing jumlah kuadrat dengan jumlah ulangan dan unit sampel sama adalah sebagai berikut:

$$FK = faktor\ koreksi = \frac{Y_{...}^{\ 2}}{rst} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} Y_{ijk}\right)^2}{rst} \tag{13}$$

$$JKT = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s}\left(Y_{ijk} - \overline{Y}_{...}\right)^2 = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} Y_{ijk}^2 - FK \tag{14}$$

$$JKP = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s}\left(\overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{...}\right)^2 = \frac{1}{sr}\sum_{i=1}^{t} Y_{i..}^2 - FK \tag{15}$$

$$JKG = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s}\left(\overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{...}\right)^2 = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} Y_{ij.}^2 - \frac{1}{rs}\sum_{i=1}^{t} Y_{i..}^2 \tag{16}$$

$$JKS = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s}(Y_{ijk} - \overline{Y}_{ij.})^2 = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} Y_{ijk}^2 - \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} Y_{ij.}^2 \tag{17}$$

Perhitungan-perhitungan di atas dapat diringkas dalam tabel ANAVA untuk Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel adalah sebagai berikut:

Tabel 2.8 ANAVA untuk Rancangan Acak Lengkap Dengan subsampel pada kasus jumlah ulangan dan unit sampel sama

Sumber Keragaman	Derajat Bebas	Jumlah Kuadrat	Kuadrat Tengah	NHKT
Perlakuan	$t-1$	JKP	$KTP = \frac{JKP}{db}$	$\sigma_\delta^2 + \alpha\sigma_\varepsilon^2 + rs\phi_\tau^2$
Galat	$t(r-1)$	JKG	$KTG = \frac{JKG}{db}$	$\sigma_\delta^2 + \beta\sigma_\varepsilon^2$
Galat sampel	$tr(s\text{-}1)$	JKS	$KTS = \frac{JKS}{db}$	σ_δ^2
Total	$n-1$	JKT		

Sumber: Lentner & Bishop, 1986

Keterangan : $\alpha = \beta = s$

2.2.4 Inferensia dalam Model Tetap

Prosedur pengujian hipotesis pada Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel sama dengan Rancangan Acak Lengkap, yakni ketika $\alpha = \beta$ (dalam tabel 2.8). Namun, ada kasus yang menyebabkan $\alpha \neq \beta$, berarti tidak ada uji yang pasti mengenai uji pengaruh perlakuan. Untuk ini, dilakukan pendekatan pengujian dengan menggunakan *Prosedur Satterthwaites*.

2.2.5 Prosedur Satterthwaites

Dalam sebuah pengamatan, kadang-kadang ANAVA tidak dapat membuktikan uji pasti untuk beberapa model parameter, seperti halnya pada ANAVA Rancangan Acan Lengkap dengan subsampel pada kasus ke-2 dan 3.

Satterthwaites telah merancang prosedur pendekatan yang dapat memberikan pengujian pada ANAVA tertentu (Seperti RAL dengan subsampel pada kasus 2 dan 3). Pada dasarnya, penyebab utama timbulnya prosedur Satterthwaites karena adanya ketidaksamaan koefesien pada nilai harapan kuadrat tengah perlakuan dan galat. Pada prinsipnya, prosedur Satterthwaites adalah sederhana, hanya menambah kuadrat tengah ***maya*** sehingga kedua kuadrat tengah tersebut mempunyai nilai harapan yang sama dalam hipotesis nol. Satu hal yang perlu diperhatikan bahwa salah satu atau kedua kuadrat tengah tersebut dapat dibentuk kuadrat tengah tiruan.

Misalkan $KT_1 + KT_2 + ... + KT_n$ merupakan kuadrat tengah lain dalam tabel ANAVA. Kuadrat tengah maya (KTM) dibentuk dari kombinasi linier KT_i, untuk *i= 1, 2, …, n*

$$KTM = a_1 KT_1 + a_2 KT_2 + ... + a_n KT_n \tag{18}$$

Dimana $a_1, a_2, ..., a_n$, $a_i \geq 0$ kontanta sehingga KTM mempunyai nilai harapan yang diinginkan. Derajat bebas untuk KTM adalah

$$dbM = \frac{KTM^2}{\sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i KT_i)^2}{dbi}} \tag{19}$$

Dimana :
dbM = Derajat Bebas Maya
KTM = Kuadrat Tengah Maya
a_i = Koefisien Kuadrat Tengah ke-i
KT_i = Kuadrat Tengah ke-i
dbi = Derajat Bebas ke-i

2.3 Sifat-sifat Peubah Acak

2.3.1 Nilai Harapan

Nilai harapan dalam matematika dinotasikan dengan E (peubah acak tertentu). Misalkan, suatu peubah acak *X* dengan kepekatan peluang *f(x)* mempunyai nilai harapan *E(X)*, yang diperoleh dari

$$E(X) = \begin{cases} \sum_x x f(x), \text{ bila X diskrit} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x), \text{ bila X kontinu} \end{cases} \tag{20}$$

Misalkan *X* suatu peubah acak dengan kepekatan peluang *f(x)* dan *g(x)* adalah fungsi dari *x*. Nilai harapan *g(X)* adalah

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum_x g(x) f(x), \text{ bila X diskrit} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x), \text{ bila X kontinu} \end{cases} \tag{21}$$

Jika *X* dan *Y* peubah acak dengan peluang kepekatan gabungan *f(x,y),* maka nilai harapan *g(X,Y)* adalah

$$E[g(X,Y)] = \begin{cases} \sum_x \sum_y g(x,y) f(x,y), \text{ bila X diskrit} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f(x,y), \text{ bila X kontinu} \end{cases} \tag{22}$$

Dalam perhitungan dimungkinkan adanya penyederhanaan nilai harapan. Hal ini dilakukan bila menggunakan sifat-sifat nilai harapan. Menurut Walpole dan Myers tahun 1986, adapun sifat-sifatnya adalah sebagai berikut :

- Jika a dan b tetapan, maka *E(aX + b) = a E(X) + b*
  - Akibat 1 : jika *a = 0,* maka *E(b) = b*
  - Akibat 2 : jika *b = 0*, maka *E(aX) = a E(X)*
- Nilai harapan jumlah dua fungsi atau lebih suatu peubah acak *X* sama dengan jumlah atau selisih nilai harapan masing-masing fungsi tersebut, yaitu

  $$E[g(X) \pm h(X) \pm ... \pm m(X)] = E[g(X)] \pm E[h(X)] \pm ... \pm E[m(X)]$$
- Nilai harapan jumlah dua fungsi atau lebih suatu peubah acak X,Y sama dengan jumlah atau selisih nilai harapan masing-masing fungsi tersebut, yaitu

$$E\left[g(X,Y) \pm h(X,Y) \pm \ldots \pm m(X,Y)\right] = E\left[g\left(X,Y\right)\right] \pm E\left[h\left(X,Y\right)\right] \pm \ldots \pm E\left[m\left(X,Y\right)\right]$$

- Akibat : jika dipilih $g(X,Y) = X$, dan $h(X,Y) = Y$ maka diperoleh

$$E\left[X \pm Y\right] = E\left[X\right] \pm E\left[Y\right]$$

- Misalkan X dan Y dua peubah acak yang saling Bebas, nilai harapannya adalah

$$E(XY) = E(X)\,E(Y)$$

Generalisasi sifat di atas dimungkinkan dapat dibuat untuk lebih dari dua peubah acak.

2.3.2 Varian

Menurut Walpole tahun 1995 definisi varian dengan peubah acak X adalah jumlah kuadrat dari selisih data dengan nilai tengah peubah acak tersebut, biasanya dinotasikan sebagai berikut :

$$\mathrm{var}(X) = \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \mu\right)^2}{n} \tag{23}$$

Adapun sifat-sifat varian menurut Nugroho(2006) adalah

- Jika X adalah peubah acak, maka $\mathrm{var}(X) = E\left(X^2\right) - \mu^2$, μ adalah rata-rata X
- Jika X peubah acak, dengan a dan b adalah konstanta, maka

$$\mathrm{var}(aX + b) = a^2\,\mathrm{var}(X)$$

- Jika X dan Y adalah peubah acak dengan fungsi kepekatan bersama f(x,y), maka

$$\mathrm{var}(X + Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) + 2\,\mathrm{cov}(X,Y)$$

- Jika X dan Y saling bebas dengan a dan b konstanta, maka

$$\mathrm{var}(X \pm Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y)$$

$$\mathrm{var}\left(aX \pm bY\right) = a^2\,\mathrm{var}(X) + b^2\,\mathrm{var}(Y)$$

2.3.3 Estimasi rata-rata dan varian

Bilamana memilih model peluang, perlu diperoleh mean (rata-rata) dan varian (ragam). Namun, biasanya nilai rata-rata dan varian populasi ini tidak diketahui, tetapi dapat diestimasi atau diduga berdasarkan suatu contoh acak. Teknik secara umum digunakan beberapa sifat nilai harapan.

Misalkan X_1, ..., X_n melambangkan sampel acak dari suatu populasi dengan fungsi kepekatan peluang *f(x)*. Suatu fungsi sampel acak yang tidak tergantung dengan sembarang parameter yang tak diketahui disebut dengan *statistik*. Salah satu statistik sampel yang penting adalah rata-rata sampel, yang tidak lain adalah rata-rata peubah dalam sampel acak, dan dinotasikan dengan

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \tag{24}$$

Statistik $\bar{X}$ adalah peubah acak. Jika suatu sampel benar-benar diamati, maka nilai amatan dari $\bar{X}$ biasanya dinotasikan dengan $\bar{x}$. Nilai ini berguna sebagai penduga bagi rata-rata populasi, $\mu = E(X)$

Nugroho (2006) menyatakan suatu penduga $\hat{\theta}$ dikatakan sebagai penduga tak bias dari parameter θ jika E($\hat{\theta}$) = θ. Berdasarkan definisi ini, maka $\bar{x}$ merupakan penduga tak bias bagi μ untuk setiap fungsi kepekatan dimana rata-ratanya ada. Sifat berikutnya mengindikasikan bahwa ragam dari $\bar{X}$ menjadi kecil, bilamana n membesar, sehingga untuk ukuran sampel yang besar, nilai amatan $\bar{x}$ biasanya akan memberikan nilai dugaan yang sangat dekat dengan μ untuk n yang sangat besar.

Jika rata-rata populasi μ diketahui dan σ^2 tak diketahui, maka penduga alami bagi $\sigma^2 = E(X-\mu)^2$ adalah

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \mu\right)^2}{n} \tag{25}$$

Karena σ^2 merupakan rata-rata dari $(X-\mu)^2$. Sudah tentu, secara mudah dapat ditunjukkan bahwa E(V) = σ^2.

Dalam kebanyakan kasus, tidak dimungkinkan untuk mendapatkan nilai rata-rata populasi, μ, bilamana σ^2 tak diketahui, yang akan menghasilkan penduga

$$\hat{\sigma}_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n} \tag{26}$$

Namun, penduga di atas bukan merupakan penduga tak bias bagi ragam populasi, σ^{-2}. Untuk itu, sebagai penduga tak bias baginya, digunakan

$$\hat{\sigma}_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n-1} \tag{27}$$

yang merupakan modifikasi dari penduga biasnya.

3. Rancangan Acak Lengkap dengan Subsampel pada Kasus Ketidaksamaan Jumlah Ulangan tetapi Jumlah Unit Sampel Sama

3.1 Model linier dan asumsi

Model linier untuk Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel pada kasus ketidaksamaan jumlah ulangan tetapi jumlah unit sampel sama terdiri dari t perlakuan, s unit sampel, dan r_i ulangan adalah sebagai berikut (Lentner & Bishop, 1986):

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} + \delta_{ijk}; \quad i = 1,2,...,t \quad j = 1,2,...,r_i, \quad k = 1,2,...,s \tag{28}$$

dimana:

Y_{ijk} = *pengamatan pada perlakuan ke - i dalam perulangan ke - j dan pada unit sampel ke - k*

μ = *rataan umum*

τ_i = *pengaruh perlakuan ke - i*

ε_{ij} = *komponen galat*

δ_{ijk} = *komponen galat sampel*

Agar inferensia valid, asumsi-asumsi untuk model pengaruh tetap adalah:

a. ε_{ij} menyebar secara bebas dan identik menurut sebaran $N\left(0,\sigma_{\varepsilon}^{2}\right)$ untuk setiap i, j.

b. δ_{ijk} menyebar secara bebas dan identik menurut sebaran $N\left(0,\sigma_{\delta}^{2}\right)$ untuk setiap i, j, k.

c. $\sum_{i} \tau_i r_i = 0$

d. μ adalah konstanta tetap

e. ε_{ij} dan δ_{ijk} saling bebas

3.2 Layout Data

Dalam Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel pada kasus ketidaksamaan jumlah ulangan tetapi jumlah unit sampel sama data-data yang diperoleh, disusun dalam layout seperti di bawah ini:

Tabel 3.1 Layout Data pada Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel pada kasus ketidaksamaan jumlah ulangan tetapi jumlah unit sampel sama

Perlakuan					
1	**2**	**…**	***i***	**…**	***t***
Y_{111}	Y_{211}	$\cdots$	Y_{i11}	$\cdots$	Y_{t11}
Y_{112}	Y_{212}	$\cdots$	Y_{i12}	$\cdots$	Y_{t12}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Y_{11s}	Y_{21s}	$\cdots$	Y_{i1s}	$\cdots$	Y_{t1s}
Y_{121}	Y_{221}	$\cdots$	Y_{i21}	$\cdots$	Y_{t21}
Y_{122}	Y_{222}	$\cdots$	Y_{i22}	$\cdots$	Y_{t22}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Y_{12s}	Y_{22s}	$\cdots$	Y_{i2s}	$\cdots$	Y_{t2s}
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$Y_{1r_1 1}$	$Y_{2r_2 1}$	$\cdots$	$Y_{ir_i 1}$	$\cdots$	$Y_{tr_t 1}$
$Y_{1r_1 2}$	$Y_{2r_2 2}$	$\cdots$	$Y_{ir_i 2}$	$\cdots$	$Y_{tr_t 2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$Y_{1r_1 s}$	$Y_{2r_2 s}$	$\cdots$	$Y_{ir_i s}$	$\cdots$	$Y_{tr_t s}$

masing-masing total dirumuskan sebagai berikut :

$$Y_{ij.} = \sum_{k=1}^{s} Y_{ijk} = s\mu + s\tau_i + s\varepsilon_{ij} + \delta_{ij.} \qquad (29)$$

$$Y_{i..} = \sum_{j=1}^{r_i} Y_{ij.} = r_i s\mu + r_i s\tau_i + s\varepsilon_{i.} + \delta_{i..} \qquad (30)$$

$$Y_{...} = \sum_{i=1}^{t} Y_{i..} = \sum_{i=1}^{t} r_i s\mu + s\sum_{i=1}^{t} r_i\tau_i + s\varepsilon_{..} + \delta_{...} \qquad (31)$$

dimana :

$Y_{ij.}$ = *total unit sampel pada perlakuan ke-i dalam ulangan ke-j*

$Y_{i..}$ = *total perlakuan*

$Y_{...} = total\ keseluruhan$

Total ulangan, unit sampel dan perlakuan yang diperoleh digunakan untuk pendugaan dan perhitungan jumlah kuadrat. Ketiga total tersebut juga dapat digunakan untuk menghitung rata-rata, yaitu:

$$\overline{Y}_{ij.} = \frac{Y_{ij.}}{s} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} + \overline{\delta}_{ij.} \tag{32}$$

$$\overline{Y}_{i..} = \frac{Y_{i..}}{r_i s} = \mu + \tau_i + \overline{\varepsilon}_{i.} + \overline{\delta}_{i..} \tag{33}$$

$$\overline{Y}_{...} = \frac{Y_{...}}{\sum_{i=1}^{t} r_i s} = \mu + \frac{\sum_{i=1}^{t} r_i \tau_i}{\sum_{i=1}^{t} r_i} + \overline{\varepsilon}_{..} + \overline{\delta}_{...} \tag{34}$$

dimana :

$\overline{Y}_{i..} =$ *rata - rata perlakuan ke - i*

$\overline{Y}_{ij.} =$ *rata - rata unit sampel ke - ij*

$\overline{Y}_{...} =$ *rataan keseluruhan*

3.3 Analisis Varian

Menurut Lentner dan Bishop (1986), pendefinisian secara umum dan formula perhitungan untuk masing-masing jumlah kuadrat dengan ketidaksamaan jumlah ulangan tetapi unit sampel sama adalah sebagai berikut:

$$FK = \text{faktor koreksi} = \frac{Y_{...}^{2}}{s\sum_{i=1}^{t} r_i} = \frac{\left(\sum_{k=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\sum_{i=1=}^{s} Y_{ijk}\right)^2}{s\sum_{i=1}^{t} r_i} \tag{35}$$

$$JKT = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\sum_{k=1}^{s}\left(Y_{ijk} - \overline{Y}_{...}\right)^2 = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\sum_{k=1}^{s} Y_{ijk}^2 - FK \tag{36}$$

$$JKP = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\sum_{k=1}^{s}\left(\overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{...}\right)^2 = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{t}\frac{Y_{i..}^2}{r_i} - FK \tag{39}$$

$$JKG = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\sum_{k=1}^{s}\left(\overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{...}\right)^2 = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i} Y_{ij.}^2 - \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{t}\frac{Y_{i..}^2}{r_i} \tag{40}$$

$$JKS = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\sum_{k=1}^{s}(Y_{ijk} - \overline{Y}_{ij.})^2 = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\sum_{k=1}^{s} Y_{ijk}^2 - \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i} Y_{ij.}^2 \tag{41}$$

Derajat bebas untuk perlakuan adalah banyaknya perlakuan dikurangi satu *(t-1)*, galat $\sum_{i=1}^{t} r_i - t$, galat sampel $s\sum_{i=1}^{t} r_i - \sum_{i=1}^{t} r_i$, dan total $s\sum_{i=1}^{t} r_i - 1$. Pencarian kuadrat tengah dari masing-masing sumber keragaman ditentukan dengan membagi jumlah kuadrat dengan derajat bebas masing-masing.

Perhitungan-perhitungan di atas dapat diringkas dalam tabel ANAVA untuk Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel adalah sebagai berikut:

Tabel 3.2 ANAVA untuk Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel Pada kasus ketidaksamaan jumlah ulangan tetapi jumlah unit sampel sama

Sumber Keragaman	Derajat Bebas	Jumlah Kuadrat	Kuadrat Tengah	NHKT
Perlakuan	$t-1$	JKP	$KTP=\frac{JKP}{db}$	$\sigma_\delta^2+\varphi\sigma_\varepsilon^2+\kappa$
Galat	$\sum_{i=1}^{t} r_i - t$	JKG	$KTG=\frac{JKG}{db}$	$\sigma_\delta^2+\theta\sigma_\varepsilon^2$
Galat sampel	$\sum_{i1=}^{t} r_i(s-1)$	JKS	$KTS=\frac{JKS}{db}$	σ_δ^2
Total	$n-1$	JKT		

dengan $\kappa=\frac{s\sum_{i=1}^{t} r_i\tau_i^2}{t-1}$, dan $\varphi=\theta=s$

4. Rancangan Acak Lengkap dengan Subsampel pada Kasus Ketidaksamaan Jumlah Unit Sampel tetapi Jumlah Ulangan Sama

4.1 Model linier dan asumsi

Model linier untuk Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel pada kasus ketidaksamaan jumlah unit sampel tetapi jumlah ulangan sama terdiri dari t perlakuan, s_{ij} unit sampel, dan r ulangan adalah sebagai berikut (Lentner & Bishop, 1986):

$$Y_{ijk}=\mu+\tau_i+\varepsilon_{ij}+\delta_{ijk};\quad i=1,2,\ldots,t \qquad j=1,2,\ldots,r\,, \quad k=1,2,\ldots,s_{ij} \tag{42}$$

dimana:

Y_{ijk} $=$ *pengamatan pada perlakuan ke - i dalam perulangan ke - j dan pada unit sampel ke - k*

μ $=$ *rataan umum*

τ_i $=$ *pengaruh perlakuan ke - i*

ε_{ij} $=$ *komponen galat*

δ_{ijk} $=$ *komponen galat sampel*

Agar inferensia valid, asumsi-asumsi untuk model pengaruh tetap adalah:

a. ε_{ij} menyebar secara bebas dan identik menurut sebaran $N(0,\sigma_\varepsilon^2)$ untuk setiap i, j.

b. δ_{ijk} menyebar secara bebas dan identik menurut sebaran $N(0,\sigma_\delta^2)$ untuk setiap i, j, k.

c. $r\sum_i \tau_i = 0$

d. μ adalah konstanta tetap

e. ε_{ij} dan δ_{ijk} saling bebas

1.2 Layout Data

Dalam Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel pada kasus ketidaksamaan jumlah unit sampel tetapi jumlah ulangan sama data-data yang diperoleh, disusun dalam layout seperti di bawah ini:

Tabel 4.1 Layout Data pada Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel pada kasus ketidaksamaan jumlah unit sampel tetapi jumlah ulangan sama

Perlakuan					
1	**2**	**...**	**i**	**...**	**t**
Y_{111}	Y_{211}	$\cdots$	Y_{i11}	$\cdots$	Y_{t11}
Y_{112}	Y_{212}	$\cdots$	Y_{i12}	$\cdots$	Y_{t12}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$Y_{11s_{11}}$	$Y_{21s_{2j}}$	$\cdots$	$Y_{i1s_{i1}}$	$\cdots$	$Y_{t1s_{t1}}$
Y_{121}	Y_{221}	$\cdots$	Y_{i21}	$\cdots$	Y_{t21}
Y_{122}	Y_{222}	$\cdots$	Y_{i22}	$\cdots$	Y_{t22}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$Y_{12s_{12}}$	$Y_{22s_{22}}$	$\cdots$	$Y_{i2s_{i2}}$	$\cdots$	$Y_{t2s_{t2}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Y_{1r1}	Y_{2r1}	$\cdots$	Y_{ir1}	$\cdots$	Y_{tr1}
Y_{1r2}	Y_{2r2}	$\cdots$	Y_{ir2}	$\cdots$	Y_{tr2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$Y_{1rs_{1r}}$	$Y_{2rs_{2r}}$	$\cdots$	$Y_{irs_{ir}}$	$\cdots$	$Y_{trs_{tr}}$

masing-masing total dirumuskan sebagai berikut :

$$Y_{ij.} = \sum_{k=1}^{s_{ij}} Y_{ijk} = s_{ij}\mu + s_{ij}\tau_i + s_{ij}\varepsilon_{ij} + \delta_{ij.} \tag{43}$$

$$Y_{i..} = \sum_{j=1}^{r} Y_{ij.} = s_{i.}\mu + s_{i.}\tau_i + \sum_{j=1}^{r} s_{ij}\varepsilon_{ij} + \delta_{i..} \tag{44}$$

$$Y_{...} = \sum_{i=1}^{t} Y_{i..} = s_{..}\mu + \sum_{i=1}^{t} s_{i.}\tau_i + \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} s_{ij}\varepsilon_{ij} + \delta_{...} \tag{45}$$

dimana :

$Y_{ij.}$ = *total unit sampel pada perlakuan ke-i dalam ulangan ke-j*

$Y_{i..}$ = *total perlakuan*

$Y_{...}$ = *total keseluruhan*

Total keseluruhan, unit sampel dan perlakuan yang diperoleh digunakan untuk pendugaan dan perhitungan jumlah kuadrat. Ketiga total tersebut juga dapat digunakan untuk menghitung rata-rata, yaitu:

$$\bar{Y}_{ij.} = \frac{Y_{ij.}}{s_{ij}} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} + \bar{\delta}_{ij.} \tag{46}$$

$$\bar{Y}_{i..} = \frac{Y_{i..}}{s_{i.}} = \mu + \tau_i + \frac{\sum_{j=1}^{r} s_{ij}\varepsilon_{ij}}{s_{i.}} + \bar{\delta}_{i..} \tag{47}$$

$$\bar{Y}_{...} = \frac{Y_{...}}{s_{..}} = \mu + \frac{\sum_{i=1}^{t} s_{i.}\tau_i}{s_{..}} + \frac{\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} s_{ij}\varepsilon_{ij}}{s_{..}} + \bar{\delta}_{...} \tag{48}$$

dimana :

$\bar{Y}_{i..}$ = rata-rata perlakuan ke-*i*

$\bar{Y}_{ij.}$ = rata-rata unit sampel ke-*ij*

$\bar{Y}_{...}$ = rataan keseluruhan

4.3 Analisis Varian

Menurut Lentner dan Bishop (1986), pendefinisian secara umum dan formula perhitungan untuk masing-masing jumlah kuadrat dengan ketidaksamaan jumlah unit sampel tetapi jumlah ulangan sama adalah sebagai berikut:

$$FK = \text{faktor koreksi} = \frac{Y_{...}^2}{s_{..}} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s_{ij}} Y_{ijk}\right)^2}{\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} s_{ij}} \tag{49}$$

$$JKT = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s_{ij}}\left(Y_{ijk} - \bar{Y}_{...}\right)^2 = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s_{ij}} Y_{ijk}^2 - FK \tag{50}$$

$$JKP = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s_{ij}}\left(\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...}\right)^2 = \sum_{i=1}^{t}\frac{Y_{i..}^2}{s_{i.}} - FK \tag{51}$$

$$JKG = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s_{ij}}\left(\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{...}\right)^2 = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\frac{Y_{ij.}^2}{s_{ij}} - \sum_{i=1}^{t}\frac{Y_{i..}^2}{s_{i.}} \tag{52}$$

$$JKS = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s_{ij}}(Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.})^2 = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s_{ij}} Y_{ijk}^2 - \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\frac{Y_{ij.}^2}{s_{ij}} \tag{53}$$

Derajat bebas untuk perlakuan banyaknya perlakuan dikurangi satu *(t-1)*, galat $tr - t$, galat sampel $\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} s_{ij} - tr$, dan total $\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} s_{ij} - 1$. Pencarian kuadrat tengah dari masing-masing sumber keragaman ditentukan dengan membagi jumlah kuadrat dengan derajat bebas masing-masing.

Perhitungan-perhitungan di atas dapat diringkas dalam tabel ANAVA untuk Rancangan acak lengkap dengan subsampel adalah sebagai berikut:

Tabel 4.2 ANAVA untuk Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel pada kasus ketidaksamaan jumlah unit sampel tetapi jumlah ulangan sama

Sumber Keragaman	Derajat Bebas	Jumlah Kuadrat	Kuadrat Tengah	NHKT
Perlakuan	$t-1$	JKP	$KTP=\frac{JKP}{db}$	$\sigma_\delta^2+\kappa+\varphi\sigma_\varepsilon^2$
Galat	tr - t	JKG	$KTG=\frac{JKG}{db}$	$\theta\sigma_\varepsilon^2+\sigma_\delta^2$
Galat sampel	$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}s_{ij}-1$	JKS	$KTS=\frac{JKS}{db}$	σ_δ^2
Total	$n-1$	JKT		

dengan

$$\kappa=\frac{\left(\sum_{i=1}^{t}s_{i.}\tau_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{t}s_{i.}\tau_i\right)^2}{s_{..}}\right)}{t-1}$$

$$\varphi=\frac{\left(\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\frac{s_{ij}^2}{s_{i.}}-\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\frac{s_{ij}^2}{s_{..}}\right)}{t-1}$$

$$\theta=\frac{\left(s_{..}-\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\frac{s_{ij}^2}{s_{i.}}\right)}{tr-t}$$

5. Rancangan Acak Lengkap dengan Subsampel pada Kasus Ketidaksamaan Jumlah Ulangan dan Unit Sampel

5.1 Model linier dan asumsi

Model linier untuk Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel pada kasus ketidaksamaan ulangan dan unit sampel terdiri dari *t* perlakuan, s_{ij} unit sampel, dan r_i ulangan adalah sebagai berikut (Lentner & Bishop, 1986):

$$Y_{ijk}=\mu+\tau_i+\varepsilon_{ij}+\delta_{ijk};\quad i=1,2,...,t\qquad j=1,2,...,r_i,\quad k=1,2,...,s_{ij}\tag{54}$$

dimana:

Y_{ijk} = *pengamatan pada perlakuan ke - i dalam perulangan ke - j dan pada unit sampel ke - k*

μ = *rataan umum*

τ_i = *pengaruh perlakuan ke - i*

ε_{ij} = *komponen galat*

δ_{ijk} = *komponen galat sampel*

Agar inferensia valid, asumsi-asumsi untuk model pengaruh tetap adalah:

a. ε_{ij} menyebar secara bebas dan identik menurut sebaran $N\left(0,\sigma_\varepsilon^2\right)$ untuk setiap i, j.

b. δ_{ijk} menyebar secara bebas dan identik menurut sebaran $N\left(0,\sigma_\delta^2\right)$ untuk setiap i, j, k.

c. $\sum_i \tau_i r_i = 0$

d. μ adalah konstanta tetap

e. ε_{ij} dan δ_{ijk} saling bebas

5.2 Layout Data

Dalam Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel pada kasus ketidaksamaan jumlah ulangan dan unit sampel data-data yang diperoleh, disusun dalam layout seperti di bawah ini:

Tabel 5.1 Layout Data pada Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel pada kasus ketidaksamaan jumlah ulangan dan unit sampel

Perlakuan					
1	**2**	**...**	***i***	**...**	***T***
Y_{111}	Y_{211}	$\cdots$	Y_{i11}	$\cdots$	Y_{t11}
Y_{112}	Y_{212}	$\cdots$	Y_{i12}	$\cdots$	Y_{t12}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$Y_{11s_{11}}$	$Y_{21s_{21}}$	$\cdots$	$Y_{i1s_{i1}}$	$\cdots$	$Y_{t1s_{t1}}$
Y_{121}	Y_{221}	$\cdots$	Y_{i21}	$\cdots$	Y_{t21}
Y_{122}	Y_{222}	$\cdots$	Y_{i22}	$\cdots$	Y_{t22}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$Y_{12s_{12}}$	$Y_{22s_{22}}$	$\cdots$	$Y_{i2s_{i2}}$	$\cdots$	$Y_{t2s_{t2}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$Y_{1r_1 1}$	$Y_{2r_2 1}$	$\cdots$	$Y_{ir_i 1}$	$\cdots$	$Y_{tr_t 1}$
$Y_{1r_1 2}$	$Y_{2r_2 2}$	$\cdots$	$Y_{ir_i 2}$	$\cdots$	$Y_{tr_t 2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$Y_{1r_1s_{1r_1}}$	$Y_{2r_2s_{2r_2}}$	$\cdots$	$Y_{ir_is_{ir_i}}$	$\cdots$	$Y_{tr_ts_{tr_t}}$

masing-masing total dirumuskan sebagai berikut :

$$Y_{ij.} = \sum_{k=1}^{s_{ij}} Y_{ijk} = s_{ij}\mu + s_{ij}\tau_i + s_{ij}\varepsilon_{ij} + \delta_{ij.} \tag{55}$$

$$Y_{i..} = \sum_{j=1}^{r_i} Y_{ij.} = s_{i.}\mu + s_{i.}\tau_i + \sum_{j=1}^{r_i} s_{ij}\varepsilon_{ij} + \delta_{i..} \tag{56}$$

$$Y_{...} = \sum_{i=1}^{t} Y_{i..} = \sum_{i=1}^{t} s_{i.}\mu + \sum_{i=1}^{t} s_{i.}\tau_i + \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i} s_{ij}\varepsilon_{ij} + \delta_{...} \tag{57}$$

dimana :

$Y_{ij.}$ = *total unit sampel pada perlakuan ke-i dalam ulangan ke-j*

$Y_{i..}$ = *total perlakuan*

$Y_{...}$ = *total keseluruhan*

Total keseluruhan, unit sampel dan perlakuan yang diperoleh digunakan untuk pendugaan dan perhitungan jumlah kuadrat. Ketiga total tersebut juga dapat digunakan untuk menghitung rata-rata, yaitu:

$$\overline{Y}_{ij.} = \frac{Y_{ij.}}{s_{ij}} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} + \overline{\delta}_{ij.} \tag{58}$$

$$\overline{Y}_{i..} = \frac{Y_{i..}}{s_{i.}} = \mu + \tau_i + \frac{\sum_{j=1}^{r_i} s_{ij}\varepsilon_{ij}}{s_{i.}} + \overline{\delta}_{i..} \tag{59}$$

$$\overline{Y}_{...} = \frac{Y_{...}}{s_{..}} = \mu + \frac{\sum_{i=1}^{t} s_{i.}\tau_i}{s_{..}} + \frac{\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i} s_{ij}\varepsilon_{ij}}{s_{..}} + \overline{\delta}_{...} \tag{60}$$

Dimana :

$\overline{Y}_{i..}$ = rata-rata perlakuan ke-*i*

$\overline{Y}_{ij.}$ = rata-rata unit sampel ke-*ij*

$\overline{Y}_{...}$ = rataan keseluruhan

$$s_{i.} = \sum_{j=1}^{r_i} s_{ij}$$

$$s_{..} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i} s_{ij}$$

5.3 Analisis Varian

Model Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel pada kasus ketidaksamaan jumlah ulangan dan unit sampel terbentuk dari perlakuan, unit sampel dan galat. Sebagai konsekuensinya, Analisis Varian (ANAVA) untuk Rancangan Percobaan Acak Lengkap dengan subsampel hanya mencantumkan sumber keragaman perlakuan, galat dan galat sampel.

Pada ketentuan-ketentuan perhitungan, jumlah kuadrat yang diperlukan untuk sumber keragaman antara lain adalah Jumlah Kuadrat Perlakuan (*JKP*), Jumlah Kuadrat

Galat (*JKG*), Jumlah Kuadrat Galat sampel (*JKS*), dan Jumlah Kuadrat Total (*JKT*) (Lentner & Bishop, 1986).

Menurut Lentner dan Bishop (1986), pendefinisian secara umum dan formula perhitungan untuk masing-masing jumlah kuadrat dengan ketidaksamaan jumlah ulangan dan unit sampel adalah sebagai berikut:

$$FK = \text{faktor koreksi} = \frac{Y_{...}^{2}}{s_{..}} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\sum_{k=1}^{s_{ij}} Y_{ijk}\right)^2}{s_{..}} \tag{61}$$

$$JKT = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\sum_{k=1}^{s_{ij}}\left(Y_{ijk} - \overline{Y}_{...}\right)^2 = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\sum_{k=1}^{s_{ij}} Y_{ijk}^2 - FK \tag{62}$$

$$JKP = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\sum_{k=1}^{s_{ij}}\left(\overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{...}\right)^2 = \sum_{i=1}^{t}\frac{Y_{i..}^2}{s_{i.}} - FK \tag{63}$$

$$JKG = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\sum_{k=1}^{s_{ij}}\left(\overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{...}\right)^2 = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\frac{Y_{ij.}^2}{s_{ij}} - \sum_{i=1}^{t}\frac{Y_{i..}^2}{s_{i.}} \tag{64}$$

$$JKS = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\sum_{k=1}^{s_{ij}}(Y_{ijk} - \overline{Y}_{ij.})^2 = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\sum_{k=1}^{s_{ij}} Y_{ijk}^2 - \frac{1}{s_{..}}\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i} Y_{ij.}^2 \tag{65}$$

Derajat bebas untuk perlakuan banyaknya perlakuan dikurangi satu *(t-1)*, galat $\sum_{i=1}^{t} r_i - t$, galat sampel $\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i} s_{ij} - \sum_{i=1}^{t} r_i$, dan total $\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i} s_{ij} - 1$. Pencarian kuadrat tengah dari masing-masing sumber keragaman ditentukan dengan membagi jumlah kuadrat dengan derajat bebas masing-masing.

Perhitungan-perhitungan di atas dapat diringkas dalam tabel ANAVA untuk Rancangan acak lengkap dengan subsampel pada kasus ketidaksamaan jumlah ulangan dan unit sampel adalah sebagai berikut:

Tabel 5.2 ANAVA untuk Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel pada kasus ketidaksamaan jumlah ulangan dan unit sampel

Sumber Keragaman	Derajat Bebas	Jumlah Kuadrat	Kuadrat Tengah	NHKT
Perlakuan	$t-1$	JKP	$KTP = \frac{JKP}{db}$	$\kappa + \varphi\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\delta^2$
Galat	$\sum_{i=1}^{t} r_i - t$	JKG	$KTG = \frac{JKG}{db}$	$\theta\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\delta^2$
Galat sampel	$s_{..} - \sum_{i=1}^{t} r_i$	JKS	$KTS = \frac{JKS}{db}$	σ_δ^2
Total	$s_{..} - 1$	JKT		

dengan

$$\kappa = \frac{\left(\sum_{i=1}^{t} s_{i.}\tau_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{t} s_{i.}\tau_i \right)^2}{s_{..}} \right)}{t-1}$$

$$\varphi = \frac{\left(\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i} \frac{s_{ij}^2}{s_{i.}} - \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i} \frac{s_{ij}^2}{s_{..}} \right)}{t-1}$$

$$\theta = \frac{\left(s_{..} - \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i} \frac{s_{ij}^2}{s_{i.}} \right)}{\sum_{i=1}^{t} r_i - t}$$

6. Kesimpulan dan Saran

6.1 Kesimpulan

- Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel merupakan rancangan yang digunakan apabila satuan percobaan banyak. Hal ini bertujuan untuk menghemat sumber-sumber pendukung dalam penelitian.
- Prosedur tabel ANAVA untuk ketiga kasus penelitian ini mempunyai perbedaan, namun untuk koefisien nilai harapan kuadrat tengah perlakuan dan galat pada kasus ke-2 dan 3 mempunyai kesamaan bentuk notasi
- Prosedur ANAVA pada kasus 1, koefisien nilai harapan kuadrat tengah perlakuan dan galat adalah sama yaitu s
- Prosedur ANAVA pada kasus 2, koefisien nilai harapan kuadrat tengah perlakuan dan galat masing-masing adalah $\varphi = \frac{\left(\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} \frac{s_{ij}^2}{s_{i.}} - \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} \frac{s_{ij}^2}{s_{..}} \right)}{t-1}$ dan $\theta = \frac{\left(s_{..} - \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} \frac{s_{ij}^2}{s_{i.}} \right)}{tr-t}$
- Prosedur ANAVA pada kasus 3, koefisien nilai harapan kuadrat tengah perlakuan dan galat masing-masing adalah $\varphi = \frac{\left(\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i} \frac{s_{ij}^2}{s_{i.}} - \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i} \frac{s_{ij}^2}{s_{..}} \right)}{t-1}$ dan $\theta = \frac{\left(s_{..} - \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i} \frac{s_{ij}^2}{s_{i.}} \right)}{\sum_{i=1}^{t} r_i - t}$
- Nilai Kuadrat Tengah Maya dalam Prosedur Satterthwaites pada kasus 2 dan 3, memiliki nilai yang sama kuadrat tengah galat dan galat sampel di setiap kasus.
- Dari teladan penerapan ketiga kasus, untuk taraf uji < 5% dapat disimpulkan ada pengaruh perlakuan terhadap pengamatan.

6.2 Saran

Dalam penulisan skripsi ini, penulis hanya membahas rancangan dengan subsampel pada Rancangan Acak Lengkap. Untuk penelitian lebih lanjut, sebaiknya dibahas pula rancangan dengan subsampel pada rancangan-rancangan lainnya. Misalnya Rancangan Acak Kelompok Lengkap dengan subsampel.

Daftar Pustaka

Anonim.2000.*The Completely Randomized Design (CRD) with subsampling.* http://webservant@tfrec.wsu.edu/The%Completely%Randomize%Design%(CRD) %with%subsampling

Anonim.2000. *The Completely Randomized Design (CRD) with* http://webservant@tfrec.wsu.edu/The%Completely%Randomize%Design%(CRD) %with%subsampling

Hinkelmann, K. and Kempthorne, O.2007.*Design and Analysis of Experiments.* A John Wiley & Sons, Inc. Blacksburg

Lentner, M. and T. Bishop. 1986. *Experimental Design and Analysis*. Valey Book Company. Blacksburg

Montgomery, D. C. 1976. *Design and Analysis of Experiments*. John Wiley and Sons. Canada

Nugroho, S. 2008. *Dasar-Dasar Rancangan Percobaan*.UNIB Press. Bengkulu

Sriliana, I. 2007. *Data Hilang dalam Rancangan Acak Kelompok Lengkap Dasar dan Rancangan Bujur Sangkar Latin Dasar*.Skripsi. Bengkulu

Walpole, RE. 1995. *Pengantar Statistika Edisi ke-3*. PT Gramedia Pustaka Utama. Jakarta

Walpole, R.E dan Myers, R.H. 1986. *Ilmu Peluang Statistika Untuk Insinyur dan Ilmuan, Terbitan ke-2.* ITB. Bandung