

SILABUS PENGANTAR MODEL LINIER

Program Studi Sarjana Statistika

Jurusan: Matematika

Fakultas: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Mata Kuliah: Pengantar Model Linier

Program: Sarjana Statistika (S1)

Bobot: 3 SKS

Semester: 5

Prasyarat: Aljabar Matriks, Kalkulus, Probabilitas dan Statistika Dasar

Pendekatan: TPACK

Perangkat lunak: R/Rstudio

Dosen: Sigit Nugroho dan Etis Sunandi

Referensi utama: Franklin A. Graybill, *Theory and Application of the Linear Statistical Model*

Deskripsi Mata Kuliah

Mata kuliah **Pengantar Model Linier** memberikan landasan teoritis dan komputasional mengenai pembentukan, estimasi, pengujian, dan interpretasi model linier. Pembahasan dimulai dari konsep model linier dan representasi matriks, kemudian dilanjutkan dengan metode kuadrat terkecil, sifat-sifat estimator, teorema Gauss–Markov, inferensi parameter, analisis varians, regresi linier sederhana dan berganda, serta diagnosis model.

Pendekatan **TPACK** mengintegrasikan:

- **Content Knowledge (CK):** teori model linier dan statistika matematis;
- **Pedagogical Knowledge (PK):** pembelajaran berbasis masalah, diskusi, inquiry, dan studi kasus;
- **Technological Knowledge (TK):** R/RStudio, simulasi Monte Carlo, visualisasi, dan komputasi matriks.

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah

Setelah menyelesaikan mata kuliah ini, mahasiswa mampu:

1. Menjelaskan konsep dasar model linier dan komponennya.
2. Merepresentasikan model linier dalam bentuk matriks.
3. Menjelaskan konsep ruang vektor, subruang, rank, dan matriks proyeksi yang mendasari estimasi model linier.
4. Menurunkan estimator **Ordinary Least Squares (OLS)**.
5. Menjelaskan sifat bias, varians, dan kovarians estimator.
6. Menerapkan **Teorema Gauss–Markov** untuk menjelaskan sifat BLUE.
7. Melakukan inferensi terhadap parameter model.
8. Melakukan pengujian hipotesis menggunakan statistik t dan F.

9. Menjelaskan hubungan antara regresi linier dan ANOVA dalam kerangka model linier umum.
10. Melakukan analisis regresi linier sederhana dan berganda menggunakan R.
11. Melakukan diagnosis terhadap asumsi model melalui residual dan grafik diagnostik.
12. Menginterpretasikan hasil model linier berdasarkan konteks permasalahan nyata.
13. Menggunakan simulasi komputer untuk memahami sifat estimator dan distribusi sampling.
14. Mengkomunikasikan hasil analisis model linier secara ilmiah.

Struktur Pembelajaran Berbasis TPACK

Komponen	Implementasi
Content Knowledge	Model linier, matriks, OLS, Gauss–Markov, inferensi, ANOVA, regresi
Pedagogical Knowledge	Ceramah interaktif, problem-based learning, inquiry, diskusi
Technological Knowledge	R, RStudio, R Markdown, simulasi Monte Carlo, visualisasi
PCK	Menghubungkan konsep matematis dengan interpretasi statistik
TCK	Menggunakan R untuk memvisualisasikan dan mensimulasikan teori
TPK	Pembelajaran interaktif berbasis simulasi dan eksplorasi
TPACK	Mahasiswa memahami teori → mensimulasikan → menganalisis data → menginterpretasikan

Rencana Pembelajaran Semester

Modul 1 Pengantar Model Linier

Capaian Pembelajaran Modul

Setelah menyelesaikan modul ini, mahasiswa mampu:

1. Menjelaskan pengertian dan fungsi model statistik.
2. Membedakan model deterministik dan stokastik.
3. Mengidentifikasi komponen model linier.
4. Menjelaskan makna Y , X , β , dan ϵ .
5. Membedakan model linier sederhana dan model linier berganda.
6. Menuliskan model linier dalam bentuk skalar dan matriks.
7. Mensimulasikan model linier menggunakan R.
8. Menjelaskan secara visual pengaruh error terhadap hubungan antara X dan Y .

Materi

- Pengertian model statistik
- Model linier

- Komponen model:
 - variabel respons
 - variabel prediktor
 - parameter
 - error
- Model deterministik dan stokastik
- Model linier sederhana
- Model linier berganda
- Notasi:

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

Praktikum R

- Membuat dataset sederhana
- Visualisasi hubungan X dan Y
- Simulasi model linier
- Mengamati pengaruh error terhadap data

TPACK

CK: konsep model linier

TK: simulasi R

PK: inquiry-based learning

Modul 2 — Aljabar Matriks untuk Model Linier

Capaian Pembelajaran Modul

Setelah menyelesaikan modul ini, mahasiswa mampu:

1. Menjelaskan konsep vektor dan matriks.
2. Melakukan operasi dasar matriks.
3. Menjelaskan dan menghitung transpose matriks.
4. Menentukan determinan matriks.
5. Menentukan invers matriks dan menjelaskan syarat keberadaannya.
6. Menentukan rank matriks.
7. Menjelaskan konsep matriks positif definit.
8. Menyelesaikan sistem persamaan linier menggunakan matriks.
9. Membentuk **design matrix** untuk model linier.
10. Merepresentasikan model linier dalam bentuk $Y=X\beta+\varepsilon$.
11. Mengimplementasikan operasi matriks menggunakan R.
12. Menghubungkan operasi matriks dengan estimasi parameter model linier.

Materi

- Vektor dan matriks
- Operasi matriks
- Transpose
- Determinan

- Invers matriks
- Rank matriks
- Matriks positif definit
- Sistem persamaan linier
- Representasi model linier dalam bentuk matriks

Praktikum R

```
X <- matrix(c(1,1,1,2,1,3), ncol=2)
t(X)
solve(t(X) %*% X)
```

Modul 3 — Geometri Model Linier

Capaian Pembelajaran Modul

Setelah menyelesaikan modul ini, mahasiswa mampu:

1. Menjelaskan konsep ruang vektor.
2. Menjelaskan subruang vektor.
3. Menentukan basis dan dimensi suatu ruang.
4. Menjelaskan **column space**, **row space**, dan **null space**.
5. Menjelaskan konsep independensi linier.
6. Menjelaskan ortogonalitas dua vektor.
7. Menentukan proyeksi suatu vektor terhadap vektor atau subruang.
8. Menjelaskan residual sebagai komponen yang ortogonal terhadap ruang model.
9. Menjelaskan secara geometris konsep least squares.
10. Menjelaskan hubungan:

$$\hat{Y} \in C(X)$$

dan

$$e = Y - \hat{Y} \perp C(X).$$

11. Membentuk dan mengeksplorasi projection matrix menggunakan R.
12. Menghubungkan geometri model dengan estimator OLS.

Materi

- Ruang vektor
- Subruang
- Basis
- Dimensi
- Column space
- Row space
- Null space
- Ortogonalitas
- Proyeksi vektor

Konsep utama:

$$\hat{Y} = P_X Y$$

dengan

$$P_X = X(X'X)^{-1}X'.$$

TPACK

Mahasiswa menghubungkan:

geometri → matriks → estimasi → visualisasi komputer.

Modul 4 — Metode Kuadrat Terkecil

Capaian Pembelajaran Modul

Setelah menyelesaikan Modul ini, mahasiswa mampu:

1. Menjelaskan prinsip metode kuadrat terkecil.
2. Menjelaskan fungsi objektif least squares.
3. Menurunkan normal equations.
4. Menurunkan estimator OLS secara matematis.
5. Menghitung estimator OLS menggunakan operasi matriks.
6. Menjelaskan makna fitted values.
7. Menghitung dan menginterpretasikan residual.
8. Menjelaskan hubungan antara OLS dan proyeksi ortogonal.
9. Mengimplementasikan OLS secara manual menggunakan R.
10. Membandingkan hasil perhitungan manual dengan `lm()`.
11. Memvisualisasikan fitted values dan residual.

Materi

- Prinsip least squares
- Fungsi objektif

$$S(\beta) = (Y - X\beta)'(Y - X\beta)$$

- Normal equations
- Estimator OLS
- Derivasi estimator

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

- Fitted values
- Residual

$$e = Y - \hat{Y}$$

Praktikum R

```
model <- lm(Y ~ X1 + X2, data = data)
coef(model)
fitted(model)
residuals(model)
```

Modul 5 — Sifat-Sifat Estimator OLS

Capaian Pembelajaran Modul

Setelah menyelesaikan modul ini, mahasiswa mampu:

1. Menjelaskan konsep unbiased estimator.
2. Membedakan bias dan ketidakbiasan estimator.
3. Menurunkan nilai harapan estimator OLS.
4. Menurunkan varians estimator OLS.
5. Menjelaskan kovarians antar-estimator.
6. Menjelaskan peran asumsi $E(\epsilon)=0$ dan $Var(\epsilon)=\sigma^2 I$.
7. Menurunkan estimator varians residual.
8. Menjelaskan derajat bebas $n-p$.
9. Menghitung σ^2 .
10. Memverifikasi sifat estimator OLS menggunakan simulasi R.

Materi

- Unbiasedness
- Bias estimator
- Varians estimator
- Kovarians estimator
- Expected value estimator
- Varians residual
- Estimasi σ^2

Hasil utama:

$$E(\hat{\beta}) = \beta$$

dan

$$Var(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X'X)^{-1}.$$

Praktikum

Simulasi Monte Carlo untuk menunjukkan bahwa rata-rata estimator OLS mendekati parameter sebenarnya.

Modul 6 — Teorema Gauss–Markov

Capaian Pembelajaran Modul

Setelah menyelesaikan modul ini, mahasiswa mampu:

1. Menjelaskan konsep **linear estimator**.
2. Menjelaskan perbedaan estimator bias dan unbiased.
3. Mendefinisikan **BLUE**.
4. Menjelaskan dan membuktikan Teorema Gauss–Markov.
5. Menjelaskan asumsi model linier klasik.
6. Membandingkan efisiensi beberapa estimator.
7. Menggunakan **bias, varians, dan MSE** sebagai ukuran kinerja estimator.
8. Membuktikan secara simulasi bahwa OLS memiliki varians minimum di antara estimator linier unbiased.
9. Menggunakan R untuk membandingkan OLS dengan estimator alternatif.

Materi

- Linear estimator
- Unbiased estimator
- BLUE
- Teorema Gauss–Markov
- Asumsi model linier klasik
- Efisiensi estimator
- Perbandingan estimator

Pembelajaran berbasis simulasi

Mahasiswa membandingkan:

- OLS
- estimator bias
- estimator unbiased alternatif

berdasarkan:

- bias
- varians
- MSE.

Modul 7 — Estimasi Varians dan Distribusi Sampling

Capaian Pembelajaran Modul

Setelah mengikuti modul ini, mahasiswa mampu:

1. Menjelaskan estimator varians error σ^2 .
2. Menjelaskan distribusi sampling estimator OLS.
3. Menjelaskan distribusi Normal, χ^2 , t , dan F .
4. Menurunkan distribusi $\hat{\beta}$ pada model normal.
5. Menjelaskan distribusi SSE/σ^2 .
6. Menjelaskan hubungan antara distribusi Normal, χ^2 , t , dan F .
7. Menggunakan R untuk mensimulasikan distribusi sampling estimator.

Materi

- Estimator σ^2
- Distribusi normal
- Distribusi χ^2
- Distribusi t
- Distribusi F
- Distribusi estimator OLS

Untuk model normal:

$$\hat{\beta} \sim N [\beta, \sigma^2 (X'X)^{-1}] .$$

Praktikum

Simulasi distribusi estimator menggunakan R.

Modul 8 — Ujian Tengah Semester

Materi:

- Konsep model linier
- Aljabar matriks
- Geometri model
- OLS
- Sifat estimator
- Gauss–Markov
- Distribusi sampling

Bentuk: ujian teori + analisis R.

Modul 9 — Inferensi Parameter Model Linier

Capaian Pembelajaran Modul

Setelah menyelesaikan modul ini, mahasiswa mampu:

1. Menjelaskan konsep inferensi parameter model linier.
2. Membedakan estimasi titik dan estimasi interval.
3. Membentuk interval kepercayaan parameter regresi.
4. Merumuskan hipotesis terhadap parameter model linier.
5. Menggunakan statistik t untuk pengujian parameter.
6. Menginterpretasikan nilai p-value.
7. Menginterpretasikan koefisien regresi secara statistik dan substantif.
8. Melakukan inferensi parameter menggunakan R.
9. Menjelaskan hubungan antara confidence interval dan pengujian hipotesis.

Materi

- Interval kepercayaan
- Pengujian hipotesis
- Hipotesis terhadap parameter
- Statistik t
- Confidence interval
- Interpretasi koefisien
- Statistik uji:

$$t = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j0}}{SE(\hat{\beta}_j)}.$$

Praktikum R

```
summary(model)
confint(model)
```

Modul 10 — Pengujian Hipotesis Linear

Capaian Pembelajaran Modul

Setelah menyelesaikan modul ini, mahasiswa mampu:

1. Menjelaskan konsep hipotesis linear pada model linier.
2. Merumuskan **General Linear Hypothesis** dalam bentuk matriks.

3. Membedakan restricted model dan unrestricted model.
4. Menjelaskan prinsip **partial F-test**.
5. Melakukan pengujian signifikansi beberapa parameter secara simultan.
6. Menghubungkan F-test dengan pengurangan residual sum of squares.
7. Menggunakan anova() di R untuk membandingkan model.
8. Menginterpretasikan hasil pengujian secara statistik dan substantif.

Materi

- Hipotesis linear

$$H_0 : C\beta = d$$

- General linear hypothesis
- Restricted model
- Unrestricted model
- Partial F-test
- Uji signifikansi simultan

Praktikum

anova(model)

Modul 11 — Regresi Linier Sederhana

Capaian Pembelajaran Modul

Setelah mengikuti modul ini, mahasiswa mampu:

1. Menjelaskan model regresi linier sederhana.
2. Menurunkan estimator intercept dan slope dengan OLS.
3. Menginterpretasikan koefisien regresi.
4. Menjelaskan hubungan antara korelasi dan regresi.
5. Menghitung dan menginterpretasikan R².
6. Menghitung standard error parameter.
7. Membentuk confidence interval untuk parameter.
8. Membedakan confidence interval dan prediction interval.
9. Mengimplementasikan regresi sederhana menggunakan R/RStudio.
10. Menginterpretasikan output dan grafik diagnostik dasar.

Materi

- Model regresi sederhana

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$$

- Estimasi intercept
- Estimasi slope
- Interpretasi slope
- Korelasi dan regresi
- R²
- Standard error
- Confidence interval

- Prediction interval

Praktikum R

```
model <- lm(Y ~ X, data=data)
summary(model)
plot(model)
```

Modul 12 — Regresi Linier Berganda

Capaian Pembelajaran Modul

Setelah menyelesaikan modul ini, mahasiswa mampu:

1. Menjelaskan struktur model regresi linier berganda.
2. Menyusun model regresi dalam bentuk skalar dan matriks.
3. Menginterpretasikan koefisien regresi secara parsial.
4. Menjelaskan R² dan adjusted R².
5. Melakukan pengujian parameter secara parsial.
6. Melakukan pengujian signifikansi model secara simultan.
7. Membandingkan nested models menggunakan partial F-test.
8. Menggunakan prinsip pemilihan model dasar.
9. Mengimplementasikan regresi linier berganda menggunakan R/RStudio.
10. Menginterpretasikan output regresi berdasarkan konteks data nyata.

Materi

- Model regresi berganda

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

- Interpretasi koefisien parsial
- R²
- Adjusted R²
- Pengujian simultan
- Pengujian parsial
- Nested models
- Pemilihan model dasar

Praktikum

```
model <- lm(Y ~ X1 + X2 + X3, data=data)
summary(model)
anova(model)
```

Modul 13 — Analisis Varians dalam Model Linier

Capaian Pembelajaran Modul

Setelah menyelesaikan modul ini, mahasiswa mampu:

1. Menjelaskan konsep variasi total, variasi regresi, dan variasi error.
2. Menurunkan identitas:

$$SST = SSR + SSE$$

3. Menentukan derajat bebas masing-masing sumber variasi.
4. Menghitung mean square.
5. Menjelaskan konstruksi statistik F.
6. Menjelaskan ANOVA sebagai bagian dari model linier.
7. Menghubungkan ANOVA dengan pengujian signifikansi regresi.
8. Menginterpretasikan tabel ANOVA menggunakan R/RStudio.
9. Menjelaskan hubungan antara F-statistic dan R².
10. Menggunakan simulasi untuk memahami dekomposisi variasi.

Materi

- Total Sum of Squares
- Regression Sum of Squares
- Error Sum of Squares
- Derajat bebas
- Mean squares
- F-statistic
- ANOVA sebagai model linier

Identitas dasar:

$$SST=SSR+SSE.$$

TPACK

Mahasiswa memahami bahwa **ANOVA dan regresi merupakan bagian dari kerangka model linier yang sama.**

Modul 14 — Diagnostik Model Linier

Capaian Pembelajaran Modul

Setelah menyelesaikan modul ini, mahasiswa mampu:

1. Menjelaskan fungsi residual dalam diagnostik model linier.
2. Membaca grafik residual versus fitted values.
3. Mengevaluasi asumsi linearitas.
4. Mengevaluasi normalitas residual.
5. Mengevaluasi homoskedastisitas.
6. Menjelaskan asumsi independensi.
7. Mengidentifikasi outlier.
8. Menjelaskan leverage dan influential observations.
9. Menginterpretasikan Cook's distance.
10. Menggunakan plot(model) untuk diagnostik model.
11. Menghubungkan hasil diagnostik dengan validitas inferensi.
12. Mengambil keputusan apakah model perlu diperbaiki atau ditransformasi.

Materi

- Residual
- Residual versus fitted
- Normal Q-Q plot

- Homoskedastisitas
- Independensi
- Outlier
- Leverage
- Influence
- Cook's distance

Praktikum R

```
par(mfrow=c(2,2))
plot(model)
```

Modul 15 — Pelanggaran Asumsi Model

Capaian Pembelajaran Modul

Setelah mengikuti Modul 15, mahasiswa mampu:

1. Menjelaskan asumsi-asumsi utama model linier klasik.
2. Mengidentifikasi non-normality pada residual.
3. Mengidentifikasi heteroskedastisitas.
4. Menjelaskan autokorelasi residual.
5. Menjelaskan multikolinearitas sebagai masalah desain/model.
6. Menjelaskan dampak pelanggaran asumsi terhadap OLS.
7. Membedakan dampak terhadap **unbiasedness, efisiensi, standard error, dan inferensi**.
8. Menentukan transformasi variabel yang sesuai.
9. Menjelaskan prinsip dasar Weighted Least Squares (WLS).
10. Menggunakan R/RStudio untuk mendeteksi dan mengevaluasi pelanggaran asumsi.
11. Membandingkan model sebelum dan sesudah penanganan masalah.

Materi

- Non-normality
- Heteroskedastisitas
- Autokorelasi
- Multikolinearitas sebagai masalah desain/model
- Dampak pelanggaran asumsi
- Transformasi variabel
- Pengantar weighted least squares

Praktikum

- Residual plot
- Q-Q plot
- Scale-location plot
- Pemeriksaan pola residual

Modul 16 — Proyek Mini Model Linier

Mahasiswa melakukan **mini project** menggunakan data nyata.

Tahapan:

1. Identifikasi permasalahan.

2. Menentukan variabel respons.
3. Menentukan prediktor.
4. Eksplorasi data.
5. Membentuk model.
6. Estimasi parameter.
7. Pengujian hipotesis.
8. Diagnosis model.
9. Interpretasi.
10. Penyusunan laporan.

Produk akhir

Laporan analisis + R Markdown + presentasi.

Strategi Pembelajaran TPACK

Aktivitas	CK	PK	TK
Kuliah interaktif	Teori model linier	Ekspositori interaktif	Slide/digital board
Diskusi	Konsep OLS	Collaborative learning	LMS
Simulasi	Distribusi estimator	Inquiry learning	R
Praktikum	Estimasi model	Learning by doing	R/RStudio
Studi kasus	Regresi/ANOVA	Problem-based learning	Dataset nyata
Mini project	Model linier	Project-based learning	R Markdown
Presentasi	Interpretasi hasil	Collaborative learning	Presentasi digital

Metode Pembelajaran

Komposisi pembelajaran yang disarankan:

- Ceramah interaktif: 20%
- Diskusi dan problem-based learning: 20%
- Praktikum R: 30%
- Simulasi: 10%
- Studi kasus: 10%
- Mini project/presentasi: 10%

Sistem Evaluasi

Komponen	Bobot
Kehadiran dan partisipasi	5%
Tugas teori	10%
Praktikum R	20%
Kuis	10%
UTS	20%

Komponen	Bobot
Mini project	15%
UAS	20%
Total	100%

Penilaian mini project

Aspek	Bobot
Perumusan masalah	15%
Eksplorasi data	15%
Pembentukan model	20%
Analisis dan diagnosis	20%
Interpretasi statistik	20%
Presentasi	10%

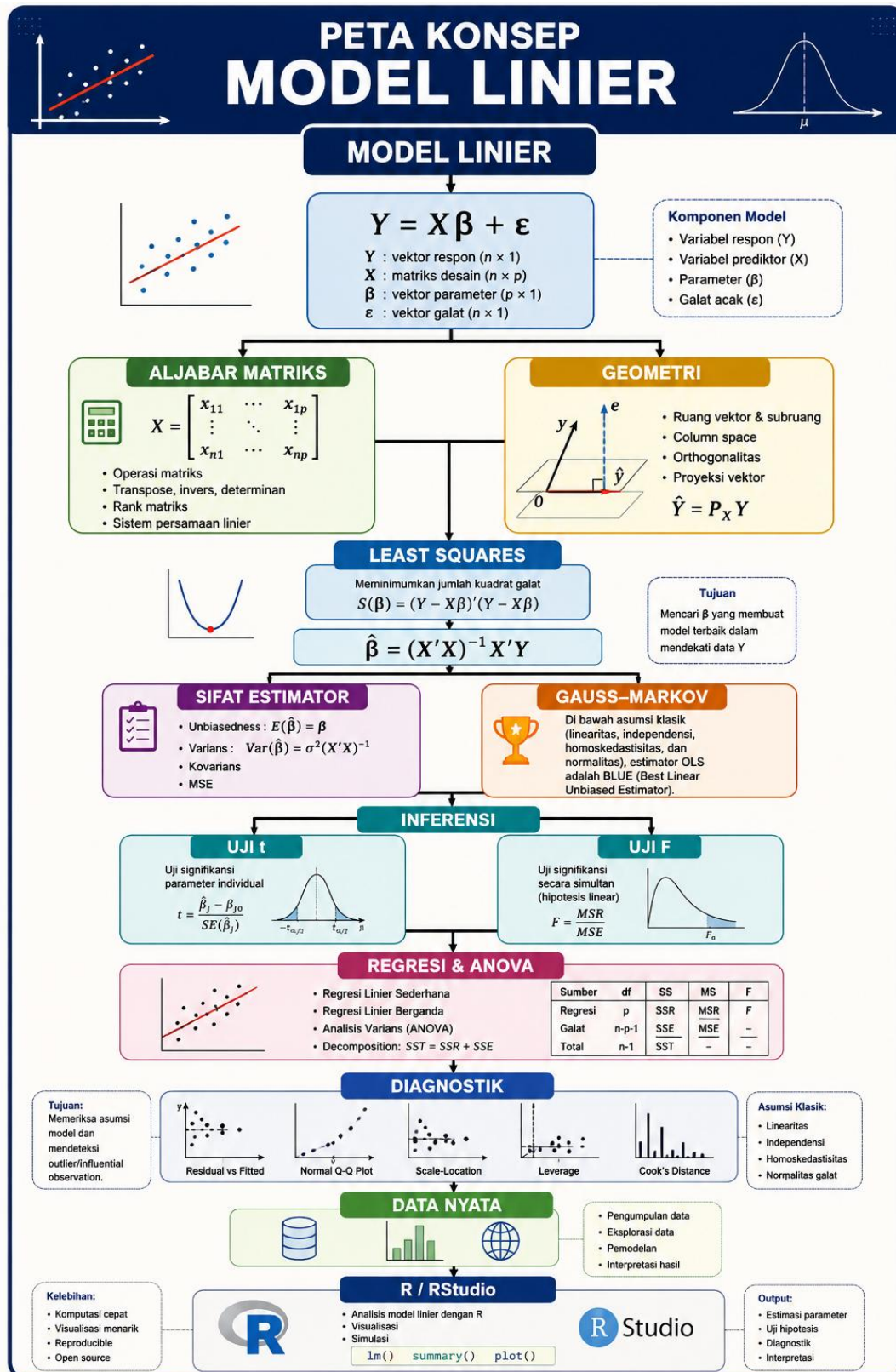
Keterampilan R yang Ditargetkan

Pada akhir semester mahasiswa sekurang-kurangnya mampu menggunakan:

lm()
summary()
coef()
fitted()
residuals()
anova()
confint()
predict()
plot()
vcov()
model.matrix()
serta operasi matriks:
t(X)
solve(X)
crossprod(X)
tcrossprod(X)

Mahasiswa tidak hanya mengetahui **cara menggunakan lm()**, tetapi mampu menjelaskan **mengapa lm() menghasilkan estimator tersebut secara matematis**.

Peta Konsep Mata Kuliah



Referensi Utama

Graybill, Franklin A.

Theory and Application of the Linear Statistical Model.

Wiley.

Referensi pendukung

1. Montgomery, D. C., Peck, E. A., & Vining, G. G. — *Introduction to Linear Regression Analysis.*
2. Kutner, M. H., Nachtsheim, C. J., Neter, J., & Li, W. — *Applied Linear Statistical Models.*
3. Rencher, A. C. & Schaalje, G. B. — *Linear Models in Statistics.*
4. Seber, G. A. F. & Lee, A. J. — *Linear Regression Analysis.*
5. Weisberg, S. — *Applied Linear Regression.*

Posisi Graybill dalam mata kuliah

Untuk **S1 Statistika**, saya menyarankan Graybill digunakan sebagai **referensi teoritis utama**, tetapi penyajiannya dibuat bertahap:

konsep → aljabar matriks → geometri → derivasi → simulasi R → data nyata.

Dengan demikian, mahasiswa tidak langsung tenggelam dalam pembuktian matematis, tetapi tetap memperoleh fondasi yang kuat untuk melanjutkan ke **Teori Model Linier, Regresi Lanjut, ANOVA, Model Linier Umum, Model Campuran, Model Linier Terampat, dan Statistika Multivariat.**